## Primo compito di esonero del Corso di Elettricità e Magnetismo A.A. 2005/2006

*24 Febbraio 2006*

(Proff. F. Lacava, C. Mariani, F. Ricci)

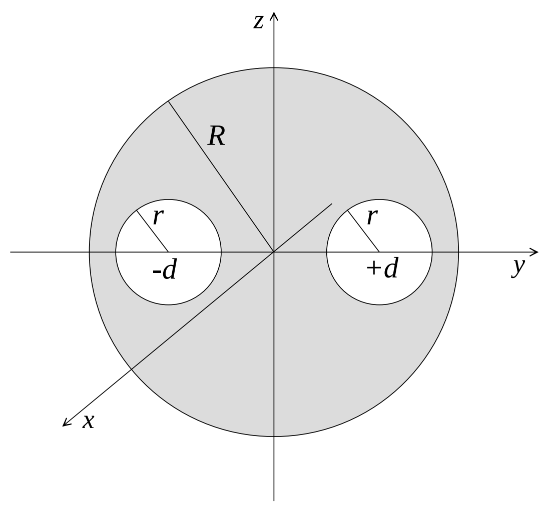
**Esercizio 1**

Una sfera di raggio $R = 4.0$ cm uniformemente carica con densità di carica $\rho$ ha al suo interno due cavità sferiche di raggio $r = 1.0$ cm centrate sull'asse $y$ rispettivamente a $y = \pm d$, con $d = 2.0$ cm.
Si determini:

*a*) il valore della densità di carica $\rho$, sapendo che il flusso del campo elettrico attraverso una superficie chiusa che racchiude la sfera vale $\Phi(\mathbf{E}) = 1.7 \cdot 10^4$ V m;

*b*) l'espressione del campo $\mathbf{E}$ sull'asse $z$ per $0 < z < R$ e per $z > R$;

*c*) il valore del potenziale rispetto all'infinito sull'asse $z$ nel punto $z = R$.




**Esercizio 2**

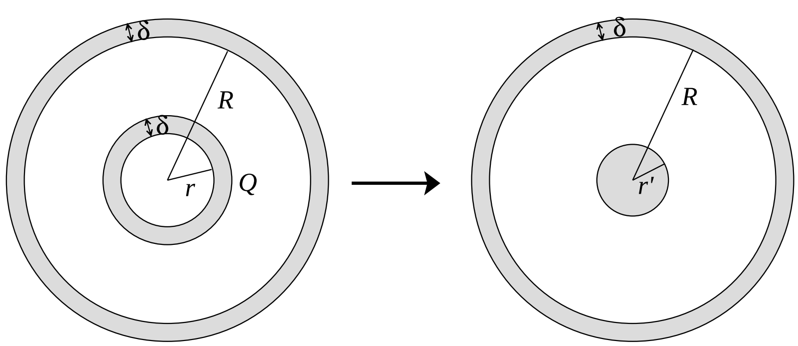
Due bolle di sapone sferiche conduttrici concentriche una dentro l'altra hanno spessore $\delta = 2.0 \cdot 10^{-5}$ cm e raggio interno rispettivamente $R = 4.0$ cm e $r = 2.0$ cm (figura 1). La bolla esterna ha complessivamente carica nulla, mentre la bolla interna possiede una carica $Q$ tale che la bolla esterna si trova ad un potenziale rispetto all'infinito $V_o = 200$ V. Ad un certo istante la bolla interna di raggio $r$ si rompe collassando in una goccia sferica di raggio $r'$ (figura 2). Considerando l'acqua saponata sostanza conduttrice, determinare:

*a*) la carica $Q$ posseduta dalla bolla interna;

*b*) il potenziale della bolla interna prima dello scoppio (figura 1);

*c*) il potenziale della goccia di raggio $r'$ (figura 2);

*d*) la variazione di energia elettrostatica in seguito allo scoppio della bolla interna.




1 2

**Soluzione Esercizio 1**

*a*) Dal teorema di Gauss $\Phi(\mathbf{E}) = Q/\epsilon_o$ si ottiene $Q$ e quindi, dividendo per il volume della sfera cava, si ha $\rho$:

$$\rho = \frac{3Q}{4\pi(R^3 - 2r^3)} = \frac{3\Phi\epsilon_o}{4\pi(R^3 - 2r^3)} \simeq \; 5.8 \cdot 10^{-4} \; \mathrm{C/m^3} \; .$$

*b*) Il campo $\mathbf{E}$ si può pensare come sovrapposizione dei campi generati da una sfera carica con densità $\rho$ di raggio $R$ centrata nell'origine e due sfere cariche con densità $-\rho$ di raggio $r$ centrate rispettivamente in $\pm d$. Sull'asse $z$, per ragioni di simmetria, il campo è diretto lungo $z$, $\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{z}}$ e la sua espressione in funzione di $z$ è, per $z > R$

$$E(z) = \frac{\rho}{3\epsilon_o}\left[\frac{R^3}{z^2} - \frac{2zr^3}{(d^2 + z^2)^{3/2}}\right] \; ,$$

e per $z < R$

$$E(z) = \frac{\rho}{3\epsilon_o}\left[z - \frac{2zr^3}{(d^2 + z^2)^{3/2}}\right] \; ,$$

essendo, in entrambe le espressioni, il primo termine il campo generato dalla sfera positiva (all'esterno per $z > R$ e all'interno per $z < R$) ed il secondo il campo generato dalle due sfere negative.

*c*) Il potenziale nel punto $z = R$ si ottiene per integrazione del campo (o per sovrapposizione dei potenziali della sfera positiva e di quelle negative)

$$V(R) = \int_R^\infty dz \; E(z) = \frac{\rho}{3\epsilon_o}\left[R^2 - \frac{2r^3}{(d^2 + R^2)^{1/2}}\right] \simeq \; 3.4 \cdot 10^4 \; \mathrm{V} \; .$$

---

**Soluzione Esercizio 2**

*a*) Per induzione completa si avrà sulla superficie esterna della bolla esterna carica $Q$. Dall'espressione del potenziale della bolla esterna $V_o = Q/[4\pi\epsilon_o(R + \delta)]$ si ha

$$Q = 4\pi\epsilon_o V_o(R + \delta) \simeq \; 8.9 \cdot 10^{-10} \; \mathrm{C} \; .$$

*b*) Il potenziale $V_b$ della bolla interna prima dello scoppio di quest'ultima vale

$$V_b = V_o + \frac{Q}{4\pi\epsilon_o}\left(\frac{1}{r + \delta} - \frac{1}{R}\right) \simeq \; 4.0 \cdot 10^2 \; \mathrm{V} \; .$$

*c*) Calcoliamo prima il raggio della goccia $r'$. Esso si ottiene dall'uguaglianza dei volumi della goccia e della bolla interna, $(4/3)\pi r'^3 = (4/3)\pi[(r + \delta)^3 - r^3]$:

$$r' = [(r + \delta)^3 - r^3]^{1/3} \simeq r\left(\frac{3\delta}{r}\right)^{1/3} \; \simeq \; 6.2 \cdot 10^{-4} \; \mathrm{m} \; .$$

Il potenziale $V_g$ della goccia sferica vale

$$V_g = V_o + \frac{Q}{4\pi\epsilon_o}\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{R}\right) \simeq \; 1.3 \cdot 10^4 \; \mathrm{V} \; .$$

*d*) La differenza di energia elettrostatica $\Delta U$ è data dalla differenza di energia immagazzinata dal condensatore sferico prima $[U_1 = (1/2)Q(V_b - V_o)]$ e dopo $[U_2 = (1/2)Q(V_g - V_o)]$ lo scoppio della bolla interna (l'energia esterna rimane la stessa):

$$\Delta U = \frac{1}{2}Q(V_g - V_b) \simeq \; 5.6 \cdot 10^{-6} \; \mathrm{J} \; .$$