Esame scritto di Elettromagnetismo del 15 Luglio 2011 - a.a. 2010-2011

proff. S. Giagu, F. Lacava, F. Ricci

Elettromagnetismo 10 o 12 crediti: esercizi 1,3,4 tempo 3 h e 30 min;

Elettromagnetismo 5 crediti: esercizio 3,4 tempo 2 h e 20 min;

Elettricitá e Magnetismo 5 crediti: esercizi 1,2, tempo 2 h, 20 min;

Recupero di un esonero: esercizi corrispondenti 1,2,3, tempo 1h e 20 min.

Esercizio 1

Una sfera conduttrice di raggio R=10 cm e carica Q=8 nC, è per metà immersa in acqua (costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 80$), mentre la restante metà si trova in aria (ϵ_r=1). Ricordando le condizioni di raccordo del campo elettrico $\vec{E}$ nell'attraversare la superficie di separazione tra due dielettrici diversi, si calcoli:

a) le densità di cariche libere e di polarizzazione sulla superficie della sfera;

b) la pressione elettrostatica sulla superficie della sfera, indicando esplicitamente su quale delle due superfici (quella immersa in acqua o quella in aria) essa risulta maggiore;

c) il lavoro necessario a portare la sfera dalla posizione iniziale a quella in cui la sfera si trova a distanza infinita nella regione in cui è presente l'aria, trascurando il contributo dovuto alla forza di gravità.

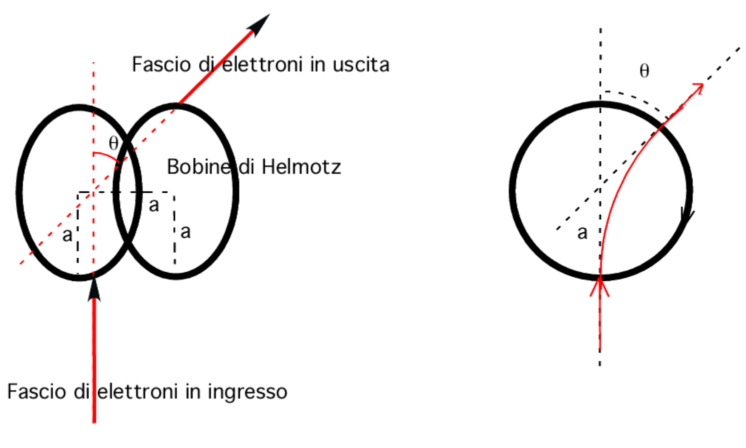
Esercizio 2

In un tubo catodico di un apparecchio televisivo un fascio di elettroni viene accelerato da una differenza di potenziale $\Delta V = 25\ kV$ e fatto passare attraverso un sistema formato dalle due bobine identiche coassiali di raggio $a = 100\ mm$, alimentate da una ugual corrente $i = 2\ A$ che scorre nello stesso verso e separate tra loro da una distanza pari al loro raggio a. Il campo magnetico così prodotto risulta sostanzialmente diverso da zero solo nella zona tra le due spire ed è pressochè uniforme (*bobine di Helmotz*) . Il fascio, attraversando la zona di campo ed incidendo perpendicolarmente all'asse comune delle bobine, subisce una deflessione e la direzione d'uscita dalla zona di spazio delle bobine forma un angolo di $\theta = \frac{\pi}{4}$ rispetto alla direzione iniziale. Ricordando i valori della carica e della massa dell'elettrone, $e = 1.6 \cdot 10^{-19}\ C$ e $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}\ kg$, si calcoli:

a) il valore del campo di induzione magnetica B;

b) il numero di avvolgimenti N da cui le bobine sono composte che producono quel valore di B nel punto centrale dell'asse tra e due bobine;

c) l'impulso trasferito nell'unità di tempo nell'unità di superficie alla porzione di schermo del televisore colpita dal fascio di elettroni di densità di corrente $J = 50\ \mu A\ cm^{-2}$. Si supponga l'urto completamente anelastico.



Esercizio 3

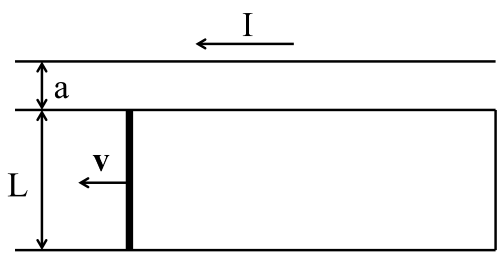
Una bacchetta conduttrice di lunghezza $L = 10\ cm$ si può muovere senza attrito su due lunghi binari orizzontali collegati tra loro da un cavo rigido parallelo alla bacchetta in modo da formare in tutto una spira rettangolare. I binari, il cavo e la bacchetta sono dello stesso materiale e hanno la stessa sezione $\Sigma = 2\ mm^2$. Al tempo $t = 0$ la bacchetta è a contatto del cavo rigido e viene posta in moto a velocità costante $v = 5\ m/s$. Un filo parallelo ai binari , complanare con essi e distante $a = 10\ mm$ dal binario più vicino, è percorso da corrente $I = 110\ A$. Sapendo che al tempo $t_1 = 3\ s$ la potenza dissipata nella spira è pari a $P(t_1) = 2 \times 10^{-6}\ W$, si calcoli:

a) la forza elettromotrice indotta;

b) la resistività del materiale di cui è costituita la spira;

c) l'espressione della forza necessaria per mantenere in moto la bacchetta;

d) l'energia dissipata dopo che la bacchetta ha percorso 1 m.



Esercizio 4

Un condensatore a facce piane parallele circolari di raggio $R = 10\ cm$ è collegato ad un generatore di tensione continua pari a $V_o = 10\ V$. La distanza tra le armature del condensatore varia secondo la legge $d(t) = d_o + d_1 \sin(\omega t)$, essendo $\frac{\omega}{2\pi} = 1.0\ kHz$, $d_o = 10\ mm$ e $d_1 = 1\ mm$.

Si chiede di calcolare

a) l'andamento temporale della corrente di spostamento all'interno del condensatore,

b) la circuitazione di B al tempo $t = 0$, calcolata lungo una circonferenza, coassiale al condensatore, disposta su piano parallelo alle sue armature e passante tra esse, nei due casi in cui il suo raggio assuma i valori $R_1 = 5\ cm$ e $R_2 = 15\ cm$;

d) l'andamento temporale dei contributi elettrico e magnetico all'energia immagazzinata tra le armature del condensatore.

Soluzioni

Esercizio 1

1) Dentro il conduttore E=0. Il campo elettrico è radiale ed ha lo stesso valore in acqua e nel vuoto, in quanto la componente parallela alla superficie di separazione di E è continua nel passaggio tra i due dielettrici. Il vettore $\vec{D}$ vale $\vec{D}_0 = \epsilon_0 \vec{E}$ nel vuoto, e $\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r E$ nell'acqua. Applicando il teorema di Gauss su di una superficie sferica concentrica alla sfera e di raggio $r > R$ si ottiene: $2\pi r^2 (D_0 + D) = Q$ da cui si ottiene: $E = Q/(2\pi\epsilon_0(1+\epsilon_r)r^2)$.

2) Per il teorema di Coulomb la densità di carica è data da: $\sigma + \sigma_p = \epsilon_0 E$, avendo indicato con σ la densità di carica libera e con σ_p quella delle cariche di polarizzazione, ed è distribuita uniformemente. La densità di carica libera vale: $\sigma = D$, ed è maggiore nell'acqua che nell'aria. La densità di carica di polarizzazione vale: $\sigma_p = P = -\epsilon_0(\epsilon_r - 1)E$ ed è nulla sulla superificie a contatto con l'aria.

Numericamente:

$\sigma = D_0 = \epsilon_0 E = \epsilon_0 Q/(2\pi\epsilon_0(1+\epsilon_r)R^2) = 1.57 \cdot 10^{-9}\ C/m^2$ nell'aria. $\sigma = D = \epsilon 0 E = \epsilon_0 Q/(2\pi\epsilon_0(1+\epsilon_r)R^2) = 1.26 \cdot 10^{-7}\ C/m^2$ nell'aria. $\sigma_p = -\epsilon_0(\epsilon_r - 1)Q/(2\pi\epsilon_0(1+\epsilon_r)R^2) = -1.24 \cdot 10^{-7} C/m^2$.

3) La pressione elettrostatica sulla superficie vale: $p = u_E = 1/2D^2/\epsilon = 1/2\sigma E$. Poiché σ nella superficie a contatto con l'acqua è maggiore di quella nella superficie in aria, la pressione è maggiore sulla superficie dentro l'acqua, producendo una forza totale verso il basso.

Numericamente: $p = 1.39 \cdot 10^{-7}\ Pa$ nell'aria $p = 1.12 \cdot 10^{-5}\ Pa$ nell'aria

4) Il lavoro è uguale alla differenza delle energie elettrostatiche:

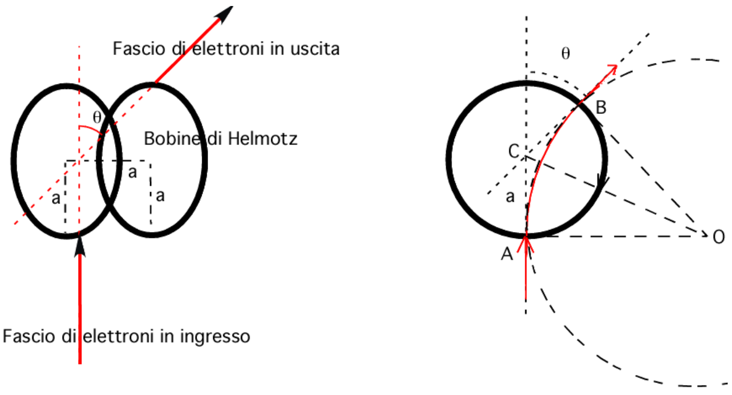
$L = U_(acqua/aria) - U_(aria) = (\int_{aria} \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 d\tau + \int_{acqua} \frac{1}{2}\epsilon_0\epsilon_r E^2 d\tau) - \int \frac{1}{2}\epsilon_0\epsilon_r E_0^2 d\tau = (\int_R^\infty \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 2\pi r^2 dr + \int_0^\infty \frac{1}{2}\epsilon_0\epsilon_r E^2 2\pi r^2 dr) - \int_R^\infty \frac{1}{2}\epsilon_0\epsilon_r E_0^2 4\pi r^2 dr.$

Avendo indicato con E e $E_0 = Q/4\pi\epsilon_o r^2$, rispettivamente il campo elettrico nella configurazione iniziale e finale (sfera carica in aria).

Si ottiene:

$L = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0(\epsilon_r+1)R} - \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R}(\frac{2}{\epsilon_r+1} - 1) = -2.81 \cdot 10^{-6}\ J.$

Esercizio 2



a) Ciascun elettrone ha una velocità

$$v = \sqrt{2\frac{e\Delta V}{m_e}} = 9.4 \cdot 10^7 \ m/s$$

Facendo riferimento alla figura sopra riportata, si deduce con semplici considerazioni geometriche che il triangolo ACO è rettangolo in A e il suo angolo in C è $\alpha = \frac{3\pi}{8}$. Quindi, essendo il raggio di curvatura della traiettoria $R = \frac{m_e v}{eB} = a\tan(\frac{3\pi}{8})$ deduciamo che il campo B è

$$B = \frac{1}{a\tan(\frac{3\pi}{8})}\sqrt{\frac{2m_e}{e}\Delta V} = 2.2 \cdot 10^{-3} \ T$$

b) Il campo B_s a distanza z lungo l'asse di una spira di raggio a è

$$B_s(z) = \frac{\mu_o}{2}\frac{a^2}{(a^2+z^2)^{3/2}}i$$

Quindi nel punto di mezzo delle due bobine ($z = \frac{a}{2}$) di N spire l'una si ha :

$$B(z = \frac{a}{2}) = (\frac{2}{\sqrt{5}})^3 N\frac{\mu_o}{a}i$$

e assumendo per B il valore precedentemente calcolato, abbiamo

$$N = (\frac{\sqrt{5}}{2})^3\frac{B}{\mu_o}\frac{a}{i} = 123$$

c) Nota a densità di corrente J e la velocità degli elettroni possiamo dedurre la densità del fascio di particelle n

$$n = \frac{J}{ev} = J\sqrt{\frac{m_e}{2e^3\Delta V}}$$

Nel caso di urto perfettamente anelastico, l'impulso trasferito sull'unità di superficie nell'unità di tempo dal fascio risulta pari a

$$P = nv(m_e v) = nm_e v^2 = J\sqrt{2\frac{m_e\Delta V}{e}} = 2.7 \cdot 10^{-4} \ Pa$$

Esercizio 3

a) Sia $B = \dfrac{\mu_o I}{2\pi\ r}$ campo magnetico generato dal filo con direzione ortogonalmente al piano della spira e verso uscente. Su tutti i punti della bacchetta in movimento a velocità v agisce un campo elettrico:

$$\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B}$$

per cui la forza elettromotrice indotta si scrive:

$$\mathcal{E} = \int_a^{a+L} \vec{v} \times \vec{B} \cdot\ d\vec{r} = \int_a^{a+L} \frac{\mu_o I v}{2\pi\ r} dr = \frac{\mu_o I v}{2\pi} ln\left(\frac{a+L}{a}\right) = 2.64 \cdot 10^{-4}\ V$$

b) La potenza dissipata nella spira è data da:

$$P = \mathcal{E}^2\ /\ R(t)$$

dove $R(t) = 2\ \rho(a + v\ t)/\Sigma$ per cui a $t_1 = 3$ si ha:

$$P(t_1) = \mathcal{E}^2\ /\ R(t_1)$$

da cui troviamo ρ:

$$\rho = \Sigma\mathcal{E}^2\ /\ 2\ P(t_1)(L + v\ t_1) = 2.3 \cdot 10^{-9}\ \Omega\ m$$

c) Un elemento dr di bacchetta risente di una forza:

$$d\vec{F} = i_b d\vec{r} \times \vec{B}$$

dove $i_b = \mathcal{E}/R(t)$ che si oppone al suo moto. Integrando su tutta la bacchetta troviamo che la forza totale è:

$$F = \int_a^{a+L} i_b B(r) dr = \int_a^{a+L} i_b \frac{\mu_o I}{2\pi\ r} dr = \frac{i_b I \mu_o}{2\pi} ln\left(\frac{a+L}{a}\right) = \frac{v}{R(t)}\left(\frac{\mu_o I}{2\pi} ln\left(\frac{a+L}{a}\right)\right)^2$$

d) L'energia dissipata dopo che la bacchetta ha percorso $d = 1\ m$ è:

$$E_{diss} = \int_0^{d/v} \frac{\mathcal{E}^2}{R(t)}\ dt = \int_0^{d/v} \frac{\Sigma\ \mathcal{E}^2}{2\ \rho\ (L + v\ t)}\ dt = \frac{\Sigma\ \mathcal{E}^2}{2\ \rho\ v}\ ln\left(\frac{L+d}{L}\right) = 1.45 \cdot 10^{-5}\ J$$

Esercizio 4

a) Il condensatore è mantenuto ad una differenza di potenziale costante pari a Vo ed il campo di induzione elettrica (o vettore spostamento) cambia nel tempo secondo la legge

$$D = \epsilon_o \frac{V_o}{d_o + d_1 \sin \omega t}$$

Ne segue che la corrente di spostamento è un vettore uniforme diretto perpendicolarmente alle armature del condensatore piano e cambia nel tempo secondo la legge

$$J = \frac{\partial D}{\partial t} = -\epsilon_o V_o \frac{\omega d_1 \cos \omega t}{(d_o + d_1 \sin \omega t)^2}$$

b) Per ragioni di simmetria le line di forza di $\vec{B}$ sono circonferenze coassiali al condensatore e quindi a circuitazione del vettore $\vec{B}$ lungo una tale circonferenza di raggio $R_1 < R$ é pari a

$$C_{R_1} = \oint_{L_1} \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_o \pi {R_1}^2 J(t = 0)$$

e per $R_2 > R$

$$C_{R_2} = \oint_{L_2} \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_o \pi R^2 J(t = 0)$$

Essendo

$$J(t = 0) = -\epsilon_o V_o \omega \frac{d_1}{{d_o}^2} = 5.56 \cdot 10^{-6}\ A\ m^{-2}$$

segue che

$$C_{R_1} = 5.49 \cdot 10^{-14}\ T\ m \qquad\qquad C_{R_2} = 2.19 \cdot 10^{-13}\ T\ m$$

c) Gli andamenti temporali dell'energia elettrica W_e è:

$$W_e = \frac{1}{2} \pi R^2 \epsilon_o \frac{{V_o}^2}{(d_o + d_1 \sin \omega t)}$$

Nel caso dell'energia magnetica occorre esplicitare la dipendenza del campo magnetico dalla distanza r dall'asse del condensatore Applicando il teorema della circuitazione di Ampère si ottiene $H 2\pi r = J(t)\pi r^2$ e quindi $H = J(t)\frac{r}{2}$

$$W_m = \mu_o \int_o^R H^2 (d_o + d_1 \sin \omega t) \pi r dr = \frac{\mu_o \pi}{4} (d_o + d_1 \sin \omega t) \int_0^R J^2 r^3 dr$$

$$W_m = \frac{\mu_o \pi}{16} R^4 \frac{(\epsilon_o V_o \omega d_1 \cos \omega t)^2}{(d_o + d_1 \sin \omega t)^3}$$