

Compito scritto del corso di Elettromagnetismo A.A. 2010/2011

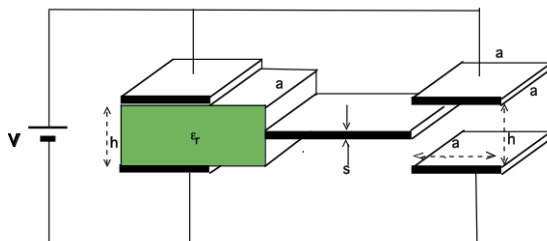
7 Settembre 2011

Proff. S. Giagu, F. Lacava, F. Ricci

ESERCIZIO 1

Due condensatori piani, di identica geometria, hanno armature quadrate di lato $a = 8.8 \text{ cm}$, distanti tra loro di $h = 0.40 \text{ cm}$. Essi sono disposti sul piano orizzontale rappresentato in figura e sono connessi in parallelo allo stesso generatore di tensione $V = 180 \text{ V}$. Un dispositivo mobile, di massa complessiva $m = 16 \text{ g}$, è costituito da una lastra dielettrica di costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 1.20$, con il lato minore pari ad a , ortogonale al piano della figura, e di spessore h , connessa ad una lamina conduttrice anch'essa rettangolare di lato minore a , ortogonale al piano della figura e di spessore $s = 0.20 \text{ cm}$. Il dispositivo può scorrere senza attrito tra le armature dei condensatori variandone le capacità C_1 e C_2 . Inizialmente il dispositivo è fermo nella configurazione indicata in figura, riempiendo completamente con il dielettrico il primo condensatore. La lamina metallica ha l'estremo libero al bordo del secondo condensatore ed è posta centralmente rispetto ad esso.

- 1) Si calcolino le cariche Q_1 e Q_2 iniziali nei due condensatori;
- 2) si calcoli la forza a cui è soggetto il dispositivo e se ne indichi il verso.
- 3) Si lasci ora il dispositivo libero di muoversi. Si calcoli la velocità nell'istante in cui la lastra dielettrica esce completamente fuori dal primo condensatore;
- 4) si calcoli l'energia erogata dal generatore dall'istante iniziale all'istante citato nella terza domanda



ESERCIZIO 2

Una spira circolare di raggio $a = 10 \text{ cm}$ è costruita con un sottile filo conduttore di densità $\rho_m = 2270 \text{ kg/m}^3$, resistività elettrica $\rho_r = 3.50 \cdot 10^{-5} \Omega \text{ m}$ e sezione $s = 7.85 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2$. La spira può ruotare attorno ad un asse coincidente con uno dei suoi diametri, ed è immersa in un campo uniforme di induzione magnetica $|\vec{B}| = 0.02 \text{ T}$, diretto perpendicolarmente all'asse di rotazione della spira. Dando un colpo alla spira, la si ponga in rotazione con una velocità angolare iniziale $\omega_0 = 500 \text{ rad/s}$.

- a) Si deduca l'espressione della potenza media dissipata in un giro per effetto Joule e si confronti il valore dell'energia dissipata nel primo giro con l'energia totale meccanica nell'approssimazione di velocità angolare pari a ω_0 ;
- b) tenendo conto del risultato precedentemente ottenuti, si deduca la legge approssimata secondo cui cambia nel tempo la velocità angolare di rotazione;
- c) si calcoli dopo quanto tempo la velocità si è ridotta di $1/e$ del valore iniziale.

PS. Si ricorda che il valor medio $\langle \sin^2 \omega t \rangle$ in un periodo di rotazione è $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \omega t d(\omega t) = \frac{1}{2}$ e che il momento d'inerzia della spira rispetto ad un suo diametro è $I = \frac{1}{2} m a^2$ dove m è la massa della spira.

ESERCIZIO 3

Un'onda elettromagnetica piana, polarizzata linearmente lungo l'asse z si propaga nel verso positivo dell'asse x di un sistema di coordinate $Oxyz$. L'onda è monocromatica di lunghezza d'onda $\lambda = 1 \text{ m}$ e intensità media $I = 1 \text{ mW/m}^2$. Lungo tutto il piano di equazione $x = 0$ si trova depositato uno strato di materiale dielettrico di spessore trascurabile. Quando questo materiale è attraversato dall'onda, assorbe il 50 % dell'intensità incidente, senza che avvenga alcuna riflessione e senza alterare la fase, la lunghezza d'onda e lo stato di polarizzazione dell'onda incidente.

Si calcoli:

- 1) l'ampiezza, la pulsazione ed il vettore d'onda dell'onda entrante ed uscente dallo strato assorbente;
- 2) si esprima analiticamente l'energia elettromagnetica totale contenuta in un parallelepipedo di base quadrata di lato λ e che si estende da $x = -\lambda$ a $x = \lambda$ e se ne calcoli il valore medio su un periodo d'oscillazione;
- 3) si esprima analiticamente il flusso di energia uscente dal parallelepipedo e se ne calcoli il valor medio su un periodo. Si specifichi il segno di questo flusso.

Soluzione

Esercizio 1

1) Indicando con x lo spostamento verso destra della figura del testo, avremo:

$$C_1(x) = \epsilon_o \epsilon_r \frac{a(a-x)}{h} + \epsilon_o \frac{ax}{h}$$
$$C_2(x) = \epsilon_o \frac{a(a-x)}{h} + \epsilon_o \frac{ax}{h-s}$$
$$Q_1 = VC_1(o) = V\epsilon_o \epsilon_r \frac{a^2}{h} = 3.7 \cdot 10^{-9} C$$
$$Q_2 = VC_1(o) = V\epsilon_o \frac{a^2}{h} = 3.1 \cdot 10^{-9} C$$

2) Poichè i condensatori sono mantenuti a potenziale costante, avremo che la forza F è ricavabile come derivata dell'energia elettrica dei due condensatori $W(x)$:

$$F = \frac{dW}{dx}$$
$$W(x) = W_1(x) + W_2(x) = \frac{1}{2}V^2[C_1(x) + C_2(x)]$$
$$F = \frac{1}{2}V^2\epsilon_o \frac{a}{h} \left(\frac{h}{h-s} - \epsilon_r \right) = 2.5 \cdot 10^{-6} N$$

La forza F positiva e poichè l'asse di riferimento delle x è rivolto verso destra della figura riportata nel testo, la forza risulta diretta nello stesso verso

3) Poichè la risultante delle forze applicate al dispositivo F non dipende da x , possiamo ricavare in modo semplice il lavoro associato allo spostamento complessivo pari ad a ed eguagliarlo alla variazione di energia cinetica del dispositivo:

$$L = \frac{1}{2}V^2\epsilon_o \frac{a^2}{h} \left(\frac{h}{h-s} - \epsilon_r \right) = \frac{1}{2}mv^2$$

da cui si ha

$$v = aV \sqrt{\epsilon_o \frac{1}{mh} \left(\frac{h}{h-s} - \epsilon_r \right)} = 5.3 \text{ mm/s}$$

4) Il lavoro calcolato risulta coincidente con la variazione d'energia associata ai campi elettrici nei condensatori ΔW :

$$\frac{1}{2}V^2[C_1(a) - C_1(0) + C_2(a) - C_2(0)] = \frac{1}{2}V^2\epsilon_o \left(\frac{h}{h-s} - \epsilon_r \right) = 2.2 \cdot 10^{-7} J$$

Dunque l'energia erogata dal generatore W_g risulta essere il doppio di L

$$W_g = 2L = 4.4 \cdot 10^{-7} J$$

Esercizio 2

La spira ruota attorno ad un diametro che é perpendicolare a B_0 , quindi, detto $\theta(t)$ l'angolo di rotazione della spira attorno all'asse,

$$\theta(t) = \int \omega(t) dt + \theta_0$$

avremo che

$$\Phi(B) = B \cdot \pi a^2 \cdot \cos \left\{ \int \omega(t) dt + \theta_0 \right\}$$

Applicando la legge di Faraday-Neumann-Lenz

$$V = -\frac{d\phi}{dt} = B\pi a^2 \left[\sin \int \omega(t) dt + \theta_0 \right] \cdot \omega(t)$$

La potenza istantanea dissipata sar  scritta in modo compatto

$$W = \frac{V^2}{R} = \frac{1}{R} B^2 (\pi a^2)^2 \omega^2 \sin^2 \theta(t)$$

dove $R = \rho_r \cdot \frac{2\pi a}{s}$   la resistenza elettrica della spira e la potenza media, nell'approssimazione $\omega \approx \cos t = \omega_o$ in un giro

$$\langle W \rangle \simeq \left[\frac{B^2 (\pi a^2)^2}{R} \omega^2 \right] \cdot \left(\frac{\omega}{2\pi} \int_t^{t+2\pi/\omega} \sin^2 \theta(t') dt' \right) = \frac{1}{2} \frac{B^2 \pi^2 a^4 \omega^2}{R} = \frac{1}{4} \frac{B^2 \pi a^3 s \omega_o^2}{\rho_r} = 1.8 \text{ mW}$$

Il rapporto tra l'energia dissipata nel primo giro e l'energia meccanica totale  :

$$\frac{\langle W \rangle \frac{2\pi}{\omega_o}}{\frac{1}{2} I \omega_o^2} = \frac{B^2 \pi}{\rho_r \rho_m \omega_o} = 3 \cdot 10^{-5}$$

Tenendo conto del risultato precedente che ci suggerisce che l'energia dissipata in un giro a scapito dell'energia cinetica della spira   piccola, possiamo scrivere:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} I \omega^2 \right] = -\frac{1}{2} \frac{B^2 \pi^2 a^4 \omega^2}{R} \quad \omega I \frac{d\omega}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{B^2 \pi^2 a^4 \omega^2}{R}$$

da cui deduciamo

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{B^2 \pi^2 a^4 \omega}{RI}$$

Essendo $I = \frac{1}{2} m a^2 = \rho_m \pi a^3 s$ allora

$$\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{1}{4} \frac{B^2}{\rho_r \rho_m} dt = -\frac{dt}{\tau}$$

essendo

$$\tau = \frac{4\rho_r \rho_m}{B^2} = 794 \text{ s}$$

In alternativa questa seconda parte dell'esercizio può essere risolta considerando il momento della coppia frenante M applicato alla spira. Questo si esprime tramite il teorema d'equivalenza d'Ampère:

$$\vec{M} = \vec{m} \wedge \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{m} \wedge \vec{B}$$

dove

$$m = \mu_0 i(t) (\pi a^2)$$

dove

$$i(t) = \frac{V(t)}{R} = \frac{B\pi a^2}{R} \omega \sin \theta$$

$$M = (\pi a^2) B \cdot \left\{ \frac{B\pi a^2 \omega}{R} \sin \theta(t) \right\} \cdot \sin \theta(t)$$

$$M = \frac{B^2 (\pi a^2)^2}{R} \omega \sin^2 \theta(t)$$

e considerando ancora il momento medio in un giro avremo

$$\langle |M| \rangle = \frac{B^2 (\pi a^2)^2 \omega}{2R}$$

Quindi poiché è una coppia frenante, avremo

$$I \frac{d\omega}{dt} = - \frac{B^2 (\pi a^2)^2 \omega}{2R}$$

che porta alla stessa soluzione

$$\omega = \omega_0 e^{-t/\tau}$$

dove

$$\tau = \frac{4\rho_r \rho_m}{B^2} = 794 \text{ s}$$

Esercizio 3

1) Poichè l'onda si propaga nel vuoto si ha

$$k = 2\pi/\lambda = 6.28 \text{ m}^{-1} \quad \omega = ck = 1.9 \cdot 10^9 \text{ rad/s}$$

L'intensità dell'onda piana è

$$I = c\epsilon_o \frac{E_o^2}{2}$$

da cui ricaviamo l'ampiezza dell'onda incidente e di quella trasmessa

$$E_o = \left(2 \frac{I}{c\epsilon_o}\right)^{1/2} = 0.88 \text{ V/m} \quad E_1 = E_o(0.5)^{1/2} = 0.62 \text{ V/m}$$

2) La densità di energia prima e dopo aver attraversato lo strato è data da

$$W_o = \epsilon_o E_o^2 \cos^2(\omega t - kx) \quad W_1 = \epsilon_o E_1^2 \cos^2(\omega t - kx)$$

L'energia contenuta nel parallelepipedo è:

$$E_{tot} = \int_{-\lambda}^0 W_o dx + \int_0^{\lambda} W_1 dx$$

Calcoliamo in modo esplicito il primo integrale:

$$\int_{-\lambda}^0 W_o dx = \lambda^2 \int_{-\lambda}^0 \epsilon_o E_o^2 \cos^2(\omega t - kx) dx = \frac{\lambda^2}{k} \int_{\omega t + 2\pi}^{\omega t} \epsilon_o E_o^2 \cos^2 \alpha d\alpha = \frac{1}{2} \lambda^3 \epsilon_o E_o^2$$

Calcolando in modo analogo il secondo termine, otteniamo un risultato indipendente dal tempo per cui anche l'energia totale sarà indipendente dal tempo e pari a

$$E_{tot} = \frac{1}{2} \lambda^3 \epsilon_o (E_o^2 + E_1^2) = 0.5 \cdot 10^{-11} \text{ J}$$

3) Poichè l'onda si propaga lungo l'asse x non avremo flusso attraverso la parete laterale del parallelepipedo mentre ci sarà solo lungo le basi. In $x = \lambda$ la normale alla base è diretta come il versore dell'asse x mentre in $x = -\lambda$ sarà opposta. Inoltre il vettore di Poynting è pari

$$S(\lambda) = \epsilon_o c E_1^2 \cos^2(\omega t - k\lambda) = I \cos^2 \omega t \quad S(-\lambda) = \epsilon_o c E_o^2 \cos^2(\omega t + k\lambda) = 2I \cos^2 \omega t$$

e i corrispondenti flussi sono allora

$$\Phi(\lambda) = \lambda^2 I \cos^2 \omega t \quad \Phi(-\lambda) = -2\lambda^2 I \cos^2 \omega t$$

così che il flusso totale e il suo valor medio in un periodo risultano essere:

$$\Phi_{tot} = -\lambda^2 I \cos^2 \omega t \quad \langle \Phi_{tot} \rangle = -\lambda^2 \frac{I}{2} = -0.5 \text{ mW}$$