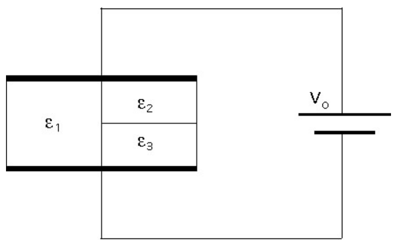
**Prova d'esonero del corso di Elettromagnetismo**
**per i corsi di laurea in Fisica**
16 Maggio 2008
*(Proff. F. Lacava, F. Ricci, D. Trevese)*

**Esercizio 1**

Un condensatore piano ha le armature quadrate di lato L=10 cm distanti tra di loro d=5 mm. Esso è riempito da tre diversi materiali dielettrici di costanti dielettriche relative ($\varepsilon_{1r}$=1.5, $\varepsilon_{2r}$=2.5, $\varepsilon_{3r}$=2.0): il blocco 1 occupa metà del volume del condensatore, i blocchi due 2 e 3 sono identici, hanno le stesse dimensioni ed insieme occupano l'altra metà come mostrato in figura. Tale condensatore viene collegato ad una batteria che fornisce una d.d.p. Vo=200 V. Si chiede di calcolare:

1. La capacità del condensatore;
2. Le cariche di polarizzazione che compaiono sulle superfici di separazione dei vari dielettrici;
3. Supponendo di estrarre il dielettrico $e_{1r}$ di una certa quantità *x* fuori dal condensatore, calcolare la forza con cui esso viene risucchiato;
4. La variazione di energia della batteria se esso viene completamente estratto dal




condensatore.

**Nota bene***: si risolva l'esercizio assumendo il campo uniforme in ciascun dielettrico all'interno del condensatore e nullo all'esterno.*

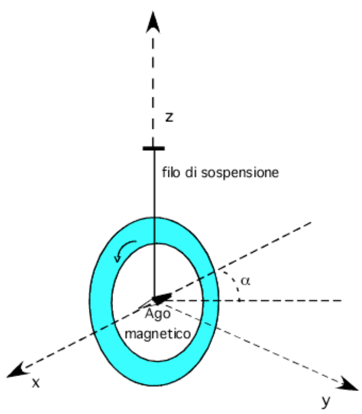
**Esercizio n. 2**

Un ago magnetico di dimensioni trascurabili, di momento m = 2.0 A m$^2$, è appeso ad un filo e può ruotare sul piano orizzontale. Il filo oppone alla rotazione dell'ago un momento torcente M = k $\alpha$ dove $\alpha$ è l'angolo rispetto alla direzione di riposo.

Un anello circolare di spessore trascurabile, di raggi esterno $R_2$ = 20 cm e interno $R_1$ = 10 cm, e uniformemente carico con densità $\sigma$ = 0.1 C m$^{-2}$, giace nel piano identificato dal filo e dalla direzione dell'ago magnetico nella sua posizione di riposo. Il centro dell'anello e quello dell'ago coincidono. Il disco viene poi posto in rotazione attorno al proprio asse con velocità angolare $\omega$ = 600 rad s$^{-1}$, e l'ago ruota di $\alpha_o$= 0.20 rad nel piano orizzontale.

Si calcolino:

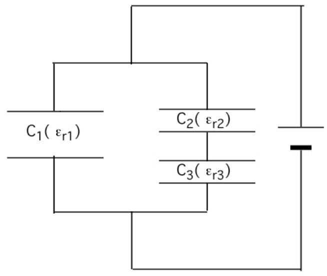
a) il campo magnetico nel centro del disco,
b) il valore della costante k.



## *Soluzione*

*Esercizio 1*

1. Il condensatore riempito dai tre dielettrici è equivalente ad un sistema di tre condensatori: un condensatore con il dielettrico $\varepsilon_1$ in parallelo alla serie di due condensatori riempiti rispettivamente con i dielettrici di costanti $\varepsilon_2$ ed $\varepsilon_3$ .




La capacità è:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_o \varepsilon_{r1} L^2}{2d}; C_2 = \frac{\varepsilon_o \varepsilon_{r2} L^2}{d}; C_3 = \frac{\varepsilon_o \varepsilon_{r3} L^2}{d}$$

$$C_{tot} = \left( C_1 + \frac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} \right) = \frac{\varepsilon_o \varepsilon_{r1} L^2}{2d} + \frac{\varepsilon_o \varepsilon_{r2} \varepsilon_{r3}}{\varepsilon_{r2} + \varepsilon_{r3}} \frac{L^2}{d} = \frac{\varepsilon_o L^2}{d} \left( \frac{\varepsilon_{r1}}{2} + \frac{\varepsilon_{r2} \varepsilon_{r3}}{\varepsilon_{r2} + \varepsilon_{r3}} \right) = 33 \ pF$$

In ciascun dielettrico il campo è uniforme e ortogonale alle armature.

Nel dielettrico 1 il campo elettrico è dato da $E_1 = V/d$ e sulle sue facce compaiono delle cariche di polarizzazione superficiali la cui densità è data da:

$$\sigma_{p1} = P_{1n} = \varepsilon_o(\varepsilon_{r1} - 1)E_1 = \varepsilon_o(\varepsilon_{r1} - 1)\frac{V}{d} = 1.8 \cdot 10^{-7} \, C/m^2$$

$$Q_{p1} = \sigma_{p1} \frac{L^2}{2} = 8.9 \cdot 10^{-10} C$$

e $Q_1 = C_1 V = 2.7 \cdot 10^{-9} C$ è la carica della capacità $C_1$.

2. Alla superficie di separazione dei dielettrici 2 e 3 compaiono delle cariche di polarizzazione superficiali, per cui le densità di carica di polarizzazione sulle facce dei dielettrici sono:

$$\sigma_{p2} = P_{2n} = \varepsilon_o(\varepsilon_{r2} - 1)E_2 = \varepsilon_o \frac{\varepsilon_{r3}(\varepsilon_{r2} - 1)}{\varepsilon_{r2} + \varepsilon_{r3}} \frac{2V}{d} = 4.7 \cdot 10^{-7} \, C/m^2$$

$$Q_{p2} = \sigma_{p2} \frac{L^2}{2} = 2.4 \cdot 10^{-9} C$$

$$\sigma_{p3} = P_{3n} = \varepsilon_o(\varepsilon_{r3}-1)E_3 = \varepsilon_o \frac{\varepsilon_{r2}(\varepsilon_{r3}-1)}{\varepsilon_{r2}+\varepsilon_{r3}} \frac{2V}{d} = 3.9 \cdot 10^{-7}\, C/m^2$$

$$Q_{p3} = \sigma_{p3} \frac{L^2}{2} = 2.0 \cdot 10^{-9} C$$

e sulla superficie di separazione

$$\sigma_p = \sigma_{p2} - \sigma_{p3} = \varepsilon_o \frac{(\varepsilon_{r2}-\varepsilon_{r3})}{\varepsilon_{r2}+\varepsilon_{r3}} \frac{2V}{d} = 7.8 \cdot 10^{-8}\, C/m^2$$

$$Q_p = \sigma_p \frac{L^2}{2} = 3.9 \cdot 10^{-10} C$$

I campi nei dielettrici 2 e 3 sono i seguenti $E_2 = \dfrac{\sigma_{2,3}}{\varepsilon_o \varepsilon_{r2}}; E_3 = \dfrac{\sigma_{2,3}}{\varepsilon_o \varepsilon_{r3}}$ con $\sigma_{2,3} = \dfrac{Q_{2,3}}{L^2/2}$ e $Q_{2,3} = \dfrac{C_2 C_3}{C_2 + C_3} V = \varepsilon_o L^2 \dfrac{\varepsilon_{r2}\varepsilon_{r3}}{\varepsilon_{r2}+\varepsilon_{r3}} \dfrac{V}{d} = 3.9 \cdot 10^{-9} C$ è la carica del condensatore serie di $C_2$ e $C_3$.

3. Se estraiamo di una quantità $x$ il dielettrico 1, il condensatore 1 è equivalente al parallelo di due condensatori, uno largo $x$ e l'altro largo $L$-$x$, per cui la capacità totale del sistema è data da:

$$C(x) = \varepsilon_{r1}\varepsilon_o \frac{L}{d}\left(\frac{L}{2} - x\right) + \varepsilon_o \frac{L}{d} x + \varepsilon_o \frac{L^2}{d} \frac{\varepsilon_{r2}\varepsilon_3}{\varepsilon_{r2}+\varepsilon_{r3}}$$

Essendo a potenziale costante, la forza con cui è attratto il dielettrico si scrive:

$$F(x) = \frac{dU_{el}(x)}{dx} \text{ dove } U_{el}(x) = \frac{1}{2} C(x) V^2$$

si trova quindi:

$$F(x) = \varepsilon_o \frac{L}{2d}(1-\varepsilon_{r1})V^2 = -1.8 \cdot 10^{-6} N$$

4. Se il dielettrico 1 viene completamente estratto, la variazione di energia della batteria è pari a:

$$\Delta U_{gen} = -V\Delta Q = -V^2 \Delta C = -V^2 (C(L/2) - C_{tot}) = -\varepsilon_o \frac{L^2}{2d}(1-\varepsilon_{r1})V^2 = 1.8 \cdot 10^{-7}\ J = -2\Delta U_{el}$$

*Esercizio 2*

a) La carica su una coroncina circolare di larghezza dr è $dq = 2\pi r \sigma dr$ e quindi la corrente relativa è: $dI = \frac{dq}{T} = dq \cdot \left(\frac{\omega}{2\pi}\right) = \omega r \sigma dr$.

Riferendoci al disegno del testo, essendo il disco posto sul piano *xz*, il campo al centro del disco della coroncina circolare è diretto come l'asse *y* ed il suo modulo è:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^l \frac{dI\left|d\vec{l}\times\vec{r}\right|}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\omega r \sigma dr\, r\, d\varphi}{r^2} = \frac{\mu_0}{2}\omega \ \sigma dr$$

Integrando su tutta la corona circolare, otteniamo:

$$B = \int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu_0}{2}\omega \ \sigma dr = \frac{\mu_0}{2}\omega \ \sigma \cdot (R_2 - R_1) = 3.8 \ 10^{-6} \ T$$

b) Il momento meccanico che il campo applica sull'ago magnetico è $\vec{M} = \vec{m}\times\vec{B}$ e all'equilibrio deve essere $\vec{\mathcal{M}} + \vec{M} = 0$. Quindi si ha:

$$m B \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_0\right) = k\,\alpha_0 \qquad \Rightarrow \Rightarrow \qquad k = \frac{m B \cos\alpha_0}{\alpha_0} = \quad 3.7 \ 10^{-5} \ N\,m.$$