

Prova scritta di Elettromagnetismo A.A. 2008/2009

15 Maggio 2009

(Prof. F. Lacava, D. Trevese, M. Virasoro)

Esercizio 1

Si consideri un anello carico di raggio $R=1.5$ cm, e si introduca un sistema di assi cartesiani con origine al centro dell'anello ed in modo tale che l'anello si trovi nel piano xy . Sull'anello la carica sia distribuita con densità uniforme $\lambda=2.3 \cdot 10^{-9}$ C m⁻¹ per $y < 0$ e con densità uniforme $\lambda' = 2\lambda$ per $y \geq 0$.

- Si calcoli il campo elettrico al centro dell'anello;
- si determini il campo prodotto dalla distribuzione di carica sui punti dell'asse z per $z \gg R$, considerando solo i termini di monopolo e di dipolo.

Esercizio 2

Una sferetta conduttrice di raggio $R=1$ cm possiede una carica $q = 1$ nC. Attorno ad essa viene posto un guscio sferico concentrico di materiale dielettrico omogeneo, di raggio interno $a = 10$ cm, raggio esterno $b = 20$ cm e costante dielettrica relativa $\epsilon_r=2.0$. Si porta in seguito la sferetta conduttrice a distanza infinita dal guscio sferico. Calcolare:

- Le cariche di polarizzazione q sulle superfici interna ed esterna del guscio sferico quando la sferetta conduttrice è situata al centro;
- Il campo elettrico in funzione del raggio r , nella stessa configurazione, facendone un grafico;
- Il lavoro compiuto per portare la sferetta carica dal centro del guscio all'infinito, in valore e segno.

Esercizio 3

Un condensatore è costituito da un recipiente con due pareti metalliche quadrate di lato $l=40$ cm, parallele e poste verticalmente, una delle quali è mobile nella direzione x ad essa ortogonale. La distanza fra le due pareti è inizialmente $x_o= 5$ mm. Le restanti pareti del recipiente sono costituite da materiale isolante, cioè le due pareti metalliche sono isolate. Il recipiente è inizialmente riempito sino alla quota $h_o=30$ cm con un liquido di costante dielettrica $\epsilon_r= 2.5$ e sulle armature è depositata una carica $Q= 15$ mC. Si determinino, in funzione di x , dandone i valori per $x=10$ mm:

- la capacità del recipiente;
- l'energia elettrostatica immagazzinata dal condensatore;
- la forza di natura elettrostatica, agente sulle pareti metalliche (cioè non si calcoli il contributo della pressione idrostatica)

**Soluzioni della prova scritta
di Elettromagnetismo A.A. 2008/2009**

15 Maggio 2009

(Prof. F. Lacava, D. Trevese, M. Virasoro)

Esercizio 1

$$\mathbf{a)} \quad \mathbf{E}_o(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \oint \frac{\lambda(x',y')(\mathbf{r}-\mathbf{r}')d\mathbf{l}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3};$$

definendo $\tan\theta = \left(\frac{y}{x}\right)$

$$E_{o_y}(0) = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_o R} \left[\int_0^\pi 2\sin\theta d\theta + \int_\pi^{2\pi} \sin\theta d\theta \right] = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_o R} = -2.75 \cdot 10^{-3} \text{Vm}^{-1};$$

$$E_{o_x}(0) = E_{o_z}(0) = 0$$

b)

La carica totale dell'anello è $Q = \pi R 2\lambda + \pi R \lambda = 3\pi R \lambda = 3.25 \cdot 10^{-10} \text{C}$

Il momento di dipolo $\mathbf{P} = \oint \lambda \mathbf{r}' d\mathbf{l}$ e' allineato con l'asse y e vale

$$p = p_y = 2\lambda \int_0^\pi R \sin\theta R d\theta + \lambda \int_\pi^{2\pi} R \sin\theta R d\theta = 4R^2 \lambda - 2\lambda R^2 = 2\lambda R^2 = 1.03 \cdot 10^{-12} \text{Cm}$$

Il potenziale, approssimato ai soli termini di monopolo e dipolo, risulta:

$$V(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left\{ \frac{Q}{[x^2+y^2+z^2]^{1/2}} + \frac{py}{[x^2+y^2+z^2]^{3/2}} \right\}$$

e per le componenti del campo elettrico $\mathbf{E} = -\nabla V$ si ha:

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left\{ \frac{Qx}{[x^2+y^2+z^2]^{3/2}} + \frac{3pyx}{[x^2+y^2+z^2]^{5/2}} \right\}$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left\{ \frac{Qy}{[x^2+y^2+z^2]^{3/2}} + \frac{-p}{[x^2+y^2+z^2]^{3/2}} + \frac{3py^2}{[x^2+y^2+z^2]^{5/2}} \right\}$$

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \left\{ \frac{Qz}{[x^2+y^2+z^2]^{3/2}} + \frac{3pyz}{[x^2+y^2+z^2]^{5/2}} \right\}$$

Lungo l'asse z ($x = y = 0$) si ha: $E_x = 0$; $E_y = -\frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{p}{z^3}$; $E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{3\pi\lambda R}{z^2}$

Esercizio 2

-10cm

a)

Il vettore induzione elettrica $\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi r^2}$ sia nel vuoto che nel guscio dielettrico, mentre $\mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_o \epsilon_r} \mathbf{D}$. Nel dielettrico di ha:

$$\mathbf{P} = \epsilon_o \chi \mathbf{E} = \frac{q(\epsilon_r - 1)}{4\pi \epsilon_r r^2},$$

E poichè $\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \hat{n}$ risulta:

$$Q_a = -Q \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} = -0.5 \text{ nC}; \quad Q_b = -Q_a = +0.5 \text{ nC}$$

b)

$$\mathbf{E}(r) = 0, \quad r < R; \quad \mathbf{E}(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_o r^2}, \quad R < r < a; \quad \mathbf{E}(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_o \epsilon_r r^2}, \quad a < r < b; \quad \mathbf{E}(r) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_o r^2}, \quad r > b$$

c)

$$U = \int_{\tau} u d\tau',$$

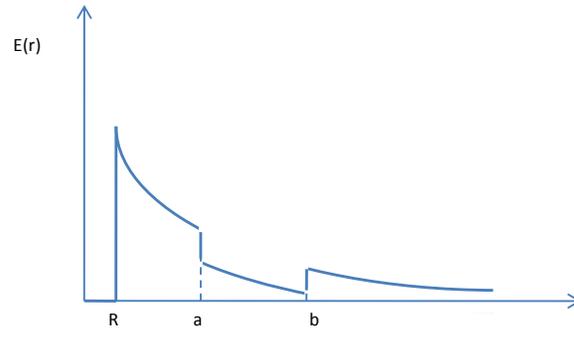
$$\text{dove } u = \frac{1}{2} \epsilon_o \epsilon_r E^2, \quad E \equiv |\mathbf{E}|$$

$$U_{fin} = \frac{1}{2} \int_R^{\infty} \epsilon_o \left(\frac{Q}{4\pi \epsilon_o} \right)^2 \frac{1}{r^2} d\tau' = \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_o R} \quad \text{è l'energia elettrostatica della sfera una volta allontanata}$$

dal guscio dielettrico ad una distanza infinita

$$U_{ini} = \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_o} \left\{ \int_R^a \frac{1}{r^2} dr' + \int_a^b \frac{1}{\epsilon_r} \frac{1}{r^2} dr' + \int_b^{\infty} \frac{1}{r^2} dr' \right\} = \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_o} \left\{ \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{a} \right) + \frac{1}{\epsilon_r} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \frac{1}{b} \right\}$$

$$L = U_{fin} - U_{ini} = \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_o} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right) = 1.1 \cdot 10^{-8} J > 0$$



Esercizio 3

a)

$$h_o x_o l = h_o x l \quad \Rightarrow \quad h = \frac{h_o x_o}{x} \quad (\text{conservazione del volume del liquido})$$

La capacita' totale è:

$$C = C_{liquido} + C_{vuoto} = \frac{lh_o x_o \epsilon}{x^2} + \frac{l(l-h)\epsilon_o}{x} = \frac{lh_o x_o (\epsilon - \epsilon_o) + l^2 x \epsilon_o}{x^2} = 2.21 \cdot 10^{-10} F$$

b)

L'energia elettrostatica del sistema di due condensatori è:

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{Q^2 x^2}{lh_o x_o (\epsilon - \epsilon_o) + l^2 x \epsilon_o} = 5.08 \cdot 10^5 J$$

c)

$$F = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{2} Q^2 \frac{2lxh_o x_o (\epsilon - \epsilon_o) + l^2 \epsilon_o x^2}{[lh_o x_o (\epsilon - \epsilon_o) + l^2 x \epsilon_o]^2} = -4.08 \cdot 10^{-2} N$$