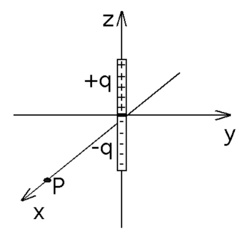
Prima prova d'esonero del corso di Elettromagnetismo - a.a. 2011/12 - 13/4/2012

proff. F. Lacava, F. Ricci, D. Trevese

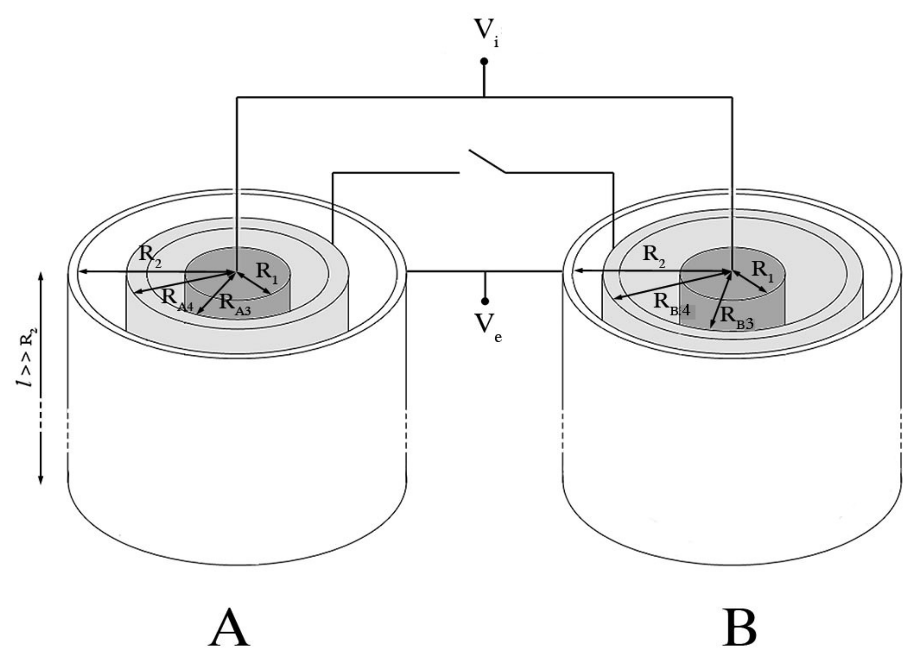
ESERCIZIO 1

Le cariche +q e -q sono uniformemente distribuite su due bacchette di materiale isolante, ciascuna lunga l e di dimensioni trasversali trascurabili. Le due bacchette sono disposte una sopra l'altra lungo l'asse z di un sistema di riferimento cartesiano la cui origine corrisponde al punto di contatto delle bacchette (vedi figura). Si chiede di calcolare:
a) l'espressione del modulo del campo elettrico in un generico punto dell'asse x del sistema e di specificarne la direzione ed il verso.
b) le componenti del momento di dipolo del sistema costituito dalle due bacchette
Si mostri inoltre che
c) per valori di x molto maggiori di l il campo elettrico generato dal dipolo è una buona approssimazione di quello calcolato in a).
Si assuma $|q| = 3.0 \cdot 10^{-7}\ C$, $l = 1.5\ mm$.



ESERCIZIO 2

Due sistemi A e B sono costituiti ciascuno da tre corpi conduttori a sezione circolare tra loro coassiali, come indicato in figura. I cilindri *più interni* dei due sistemi sono uguali, hanno raggio R_1 e sono elettricamente connessi tramite un filo conduttore. I due gusci cilindrici *più esterni* sono uguali, hanno raggio interno R_2 e sono elettricamente connessi tramite un altro filo conduttore. I gusci cilindrici *intermedi* hanno raggi interno ed esterno $R_{A3} < R_{A4}$ nel sistema A e $R_{B3} < R_{B4}$ nel sistema B e possono essere elettricamente connessi tramite un filo conduttore che è inizialmente interrotto. L'altezza dei cilindri è $l >> R_2$, tale da poter trascurare gli effetti al bordo. Inizialmente viene stabilita una condizione di equilibrio corrispondente a una differenza di potenziale $V_i - V_e = V_o$ fra i cilindri più interni e i gusci più esterni, mentre l'interruttore resta aperto. Successivamente, mentre il sistema rimane isolato, viene chiuso l'interruttore e si stabilisce una nuova configurazione di equilibrio.
Si calcoli:
a) il valore della differenza di potenziale fra i capi dell'interruttore nella prima condizione di equilibrio;
b) valore della differenza di potenziale fra i cilindri più interni e quelli più esterni, $V_i{}' - V_e{}'$, nella nuova configurazione di equilibrio;
c) il rapporto (U'/U) fra le energie elettrostatiche complessive della configurazione finale e di quella iniziale.
Si assuma: $R_1 = 9.0$ cm, $R_2 = 10.0$ cm, $R_{A3} = 91$ mm, $R_{A4} = 95$ mm, $R_{B3} = 95$ mm, $R_{B4} = 99$ mm, $V_o = 300$ V.



Soluzioni della prova scritta

Esercizio 1

a)

Definiamo la densità lineare di carica λ

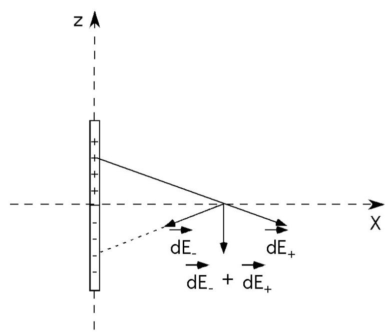
$$\lambda^{+} = q/l = \lambda \ \ , \ \lambda^{-} = -q/l = -\lambda$$

ed esplicitiamo le coordinate del punto P in cui si vuole calcolare il campo elettrico:

$$P = \{x, 0, 0\}$$

Per simmetria il campo in P ha componenti solo lungo z; questo è palese se si fa riferimento alla figura da cui è immediato dedurre .

$$E_x = E_y = 0$$



Ciò si può dimostrare anche analiticamente esplicitando il calcolo di tutte le componenti del campo elettrico totale che si ottengono integrando la somma per componenti dei due campi dovuti alla bacchetta con carica positiva e quella con carica negativa:

$$d\vec{E}_{+} \quad = \quad \frac{\lambda^{+}}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\zeta}{\left(x^2+\zeta^2\right)^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -\zeta \end{pmatrix} \quad , \ d\vec{E}_{-} = \frac{\lambda^{-}}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\zeta'}{\left(x^2+\zeta'^2\right)^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -\zeta' \end{pmatrix} \ ;$$

dove ζ e ζ' sono le coordinate rispettivamente sulla bacchetta con carica positiva e su quella con carica negativa.

Calcoliamo allora la sola componente del campo totale E_z che è diversa da zero.

$$
\begin{aligned}
E_z &= -\frac{\lambda^+}{4\pi\epsilon_0}\int_0^l \frac{\zeta d\zeta}{\left(x^2+\zeta^2\right)^{3/2}} - \frac{\lambda^-}{4\pi\epsilon_0}\int_{-l}^0 \frac{\zeta' d\zeta'}{\left(x^2+\zeta'^2\right)^{3/2}} \\
&= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\int_0^l \frac{\zeta d\zeta}{\left(x^2+\zeta^2\right)^{3/2}} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{l^2} ds\left(x^2+s\right)^{-3/2} \\
&= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+l^2}} - \frac{1}{|x|}\right]
\end{aligned}
$$

Si noti che il termine tra parentesi quadre è sempre negativo quindi il campo è rivolto verso le z negative, risultato coerente con quanto riportato nella figura precedente.

b)

$$
\begin{aligned}
\vec{p} &= \left(0,0,\int_{-l}^0 \lambda^- z dz + \int_0^l \lambda^+ z dz\right) \\
p_x &= p_y = 0\ ;\ p_z = 2\lambda\int_0^l z dz = \lambda l^2 = q\ l = 4.5\cdot 10^{-10}\ Cm
\end{aligned}
$$

$\vec{p}$ lungo l'asse z e nel verso delle z positive.

c)

$$
\begin{aligned}
|\vec{r}| \gg l \quad &\longrightarrow V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda l^2 z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} \\
E_x(x,0,0) &= -\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{y=z=0} = E_y(x,0,0) = -\left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{y=z=0} = 0 \\
E_z(x,0,0) &= -\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{y=z=0} = -\frac{\lambda l^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|x|^3}
\end{aligned}
$$

Dall'espressione esatta

$$
E_z(x,0,0) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{|x|} - \frac{1}{\sqrt{x^2+l^2}}\right]
$$

sviluppando al primo ordine in $\left(l/x\right)^2$ il secondo termine tra parentesi quadre:

$$
\frac{1}{\sqrt{x^2+l^2}} = \frac{1}{|x|\sqrt{1+l^2/x^2}} \simeq \frac{1}{|x|}\left[1-\frac{1}{2}\frac{l^2}{x^2}\right]
$$

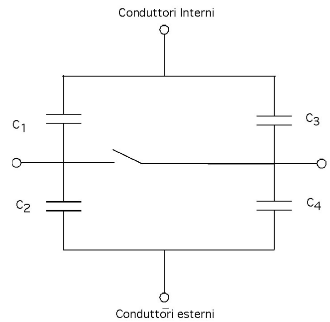
si ottiene

$$
E_z(x,0,0) \simeq -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{|x|} - \frac{1}{|x|} + \frac{1}{2}\frac{l^2}{x^2}\right] = -\frac{\lambda l^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{|x|^3}
$$

che coincide con l'espressione del campo dedotto in approssimazione di dipolo.

Esercizio 2

Il sistema può essere schematizzato come in figura.



in cui il k-esimo condensatore(cilindrico) ha una capacità:

$C_k = 2\pi\epsilon_o l/\ln(r_e/r_i) \equiv 2\pi\epsilon_o l c_k$, dove r_e ed r_i sono i raggi delle armature esterna ed interna rispettivamente ed l l'altezza.

Quindi si ha:

$c_1 = \frac{1}{ln\frac{R_{A3}}{R_1}} = 90.5$, $c_2 = \frac{1}{ln\frac{R_2}{R_{A4}}} = 19.5$, $c_3 = \frac{1}{ln\frac{R_{B3}}{R_1}} = 18.5$, $c_4 = \frac{1}{ln\frac{R_2}{R_{B4}}} = 99.5$.

La capacità totale del sistema C è quella di due coppie di condensatori in serie a loro volta poste in parallelo:

$$C = 2\epsilon_0\pi\ l\left(\frac{c_1c_2}{c_1+c_2} + \frac{c_3c_4}{c_3+c_4}\right) = 2\epsilon_0\pi\ l\ c$$

con $c = 31.6$.

a)

Con l'interruttore aperto, i condensatori 1 e 2 sono in serie ed essendo l'induzione completa hanno la stessa carica Q_A. Deduciamo che $V_1 = Q_A/C_1$, $V_2 = Q_A/C_2$. Poichè $V_o = V_1 + V_2$, possiamo scrivere:

$V_1 = V_oC_2/(C_1+C_2) = V_oc_2/(c_1+c_2)$

Analogamente per i due condensatori in serie 3 e 4 si ha:

$V_3 = V_oc_4/(c_3+c_4)$.

La differenza di potenziale ai capi dell'interruttore aperto è:

$\Delta V \equiv V_3 - V_1 = V_o\{\frac{1}{1+\frac{c_3}{c_4}} - \frac{1}{1+\frac{c_1}{c_2}}\}$,

dove $\frac{C_1}{C_2} = 4.64$ e $\frac{C_3}{C_4} = 0.185$. Concludiamo che

$\Delta V = 200\ V$

b)

Con l'interruttore chiuso il sistema è formato dalla serie dei paralleli di C_1+C_3 e C_2+C_4. Per la conservazione della carica totale Q si ha: $Q = C'V' = CV_o$ dove C' e' la capacità fra le armature più esterne e quelle più interne quando l'interruttore è chiuso mentre C è quella a interruttore aperto (situazione iniziale). Quindi risulta:

$V' = V_o\frac{C}{C'} = V_o\frac{c}{c'} = 167\ V,$

essendo

$$c = \frac{1}{\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}} + \frac{1}{\frac{1}{c_3}+\frac{1}{c_4}} = 31.6$$

e

$$\frac{1}{c'} = \frac{1}{c_1+c_3} + \frac{1}{c_2+c_4} = 17.6 \cdot 10^{-3}$$

c)

L'energia elettrostatica totale del sistema è $U = \frac{1}{2}QV_o = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$ nella configurazione iniziale e $U' = \frac{1}{2}QV' = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C'}$ nella configurazione finale. Quindi il rapporto vale:

$$U'/U = V'/V_0 = c/c' = 0.56$$