Corso di Elettromagnetismo

a.a. 2014/15, 1^a prova di esonero 17 Aprile 2015

Proff. S. Giagu, F. Lacava, D. Trevese

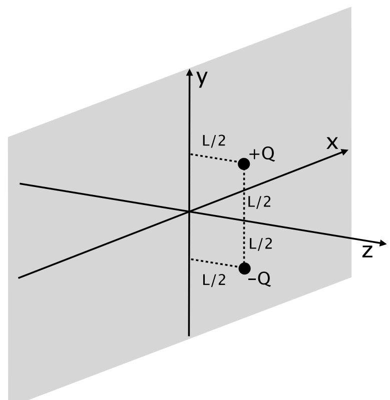
Problema 1

Due cariche puntiformi $Q_1 = Q$ e $Q_2 = -Q$ sono poste di fronte a un piano conduttore infinito e collegato a terra a una distanza $L/2$ dal piano stesso. Le due cariche si trovano a distanza L l'una dall'altra come in figura. Determinare le espressioni di:

a) la forza totale esercitata dalle cariche sul piano;

b) il campo elettrico sull'asse z a grande distanza dal piano stesso ($z \gg L$);

c) la carica totale indotta sul piano conduttore e l'energia potenziale elettrostatica del sistema.



Problema 2

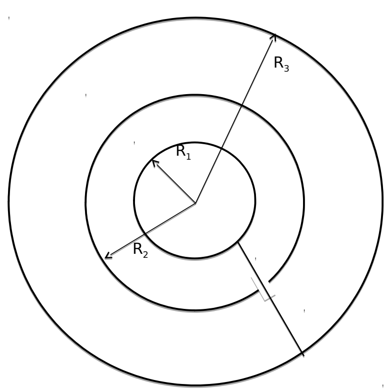
Un sistema è formato da tre conduttori sferici concentrici di raggi $R_1 = 2\ cm$, $R_2 = 4\ cm$ e $R_3 = 6\ cm$, posto nel vuoto, come in figura. Il conduttore più interno e quello più esterno sono collegati elettricamente mentre sul conduttore intermedio è depositata una carica $Q = 5 \cdot 10^{-9}\ C$.

Si determinino:

a) i potenziali delle superfici sferiche;

b) la pressione totale sulla superficie intermedia.

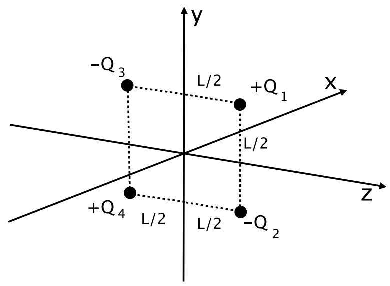
c) successivamente tra le superfici di raggi R_1 e R_2 è immesso un dielettrico di costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 3$. Nella nuova configurazione si determinino i potenziali delle superfici sferiche.



Soluzioni

Problema 1

a)
Con riferimento alla figura e utilizzando il metodo delle cariche immagini, possiamo rappresentare l'effetto del piano



a potenziale nullo tramite due cariche immagine $Q_3 = -Q$ e $Q_4 = Q$ la prima posta simmetricamente a Q_1 rispetto al piano x, y e la seconda posta simmetricamente a Q_2. La forza esercitata dalle due cariche sul piano conduttore è uguale ed opposta alla forza che il piano conduttore esercita sulle cariche, per cui:

$$\mathbf{F}_{piano} = -\mathbf{F}_{cariche} = -(Q\mathbf{E}_1 - Q\mathbf{E}_2);$$

in cui $\mathbf{E}_1$ e $\mathbf{E}_2$ indicano il valore del campo elettrico nella posizione della carica Q_1 e Q_2 rispettivamente, determinati dalle altre cariche presenti nel sistema ad esclusione di Q_1 e Q_2. Si ottiene

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}_1 = (0, \tfrac{kQ}{2L^2\sqrt{2}}, -\tfrac{kQ}{L^2} + \tfrac{kQ}{2L^2\sqrt{2}});\\
&\mathbf{E}_2 = (0, \tfrac{kQ}{2L^2\sqrt{2}}, \tfrac{kQ}{L^2} - \tfrac{kQ}{2L^2\sqrt{2}});\\
&\mathbf{F}_{piano} = -(Q\mathbf{E}_1 - Q\mathbf{E}_2) = -(0, 0, -\tfrac{kQ^2}{L^2}(2 - \tfrac{1}{\sqrt{2}})) = \tfrac{kQ^2}{L^2}(2 - \tfrac{1}{\sqrt{2}})\hat{z}.
\end{aligned}$$

con $k = 1/(4\pi\epsilon_0)$.

b)
Il calcolo del campo elettrico a distanza $z \gg L$ risulta immediato una volta schematizzate le due cariche e le rispettive immagini come una coppia di dipoli con momento di dipolo $\mathbf{p} = QL\hat{y}$ (posto a distanza $L/2$ sull'asse $z > 0$) e $\mathbf{p'} = -QL\hat{y}$ (posto a distanza $-L/2$ sull'asse $z < 0$). In approssimazione di dipolo il campo generato dai due dipoli lungo l'asse z è diretto lungo l'asse y e ha valore:

$$\mathbf{E}(0,0,z) = \hat{y}E(0,0,z) = \hat{y}(E_p + E_{p'}) = \hat{y}\left(\frac{-kp}{(z-\frac{L}{2})^3} + \frac{kp}{(z+\frac{L}{2})^3}\right) = \hat{y}\frac{kp}{z^3}\left(\frac{-1}{(1-\frac{L}{2z})^3} + \frac{1}{(1+\frac{L}{2z})^3}\right);$$

per $z \gg L$, possiamo espandere in serie $\frac{1}{(1\pm\frac{L}{2z})^3}$ ottenendo:

$$\frac{1}{(1\pm\frac{L}{2z})^3} \simeq (1 \mp \frac{3}{2}\frac{L}{z});$$

per cui:

$$\mathbf{E}(0,0,z) = -\frac{3Lkp}{z^4}\hat{y};$$

c)
Poichè siamo in condizioni di induzione totale, la carica totale indotta sul piano conduttore sarà nulla: $Q_{tot} = Q - Q = 0$.

L'energia potenziale elettrostatica delle quattro cariche nella configurazione data è:

$$U_E = \frac{1}{2}\sum_{i=1,4} q_i V_i = \frac{1}{2}4\frac{kQ^2}{L}(\frac{1}{\sqrt{2}} - 2) = 2\frac{kQ^2}{L}(\frac{1}{\sqrt{2}} - 2);$$

Poichè il campo elettrico è non nullo solo nel semispazio $z > 0$, l'energia potenziale elettrostatica del sistema piano conduttore + cariche reali risulterà essere la metà dell'energia elettrostatica delle quattro cariche:

$$U = \frac{1}{2}U_E = \frac{kQ^2}{L}(\frac{1}{\sqrt{2}} - 2);$$

Problema 2

a)
Per determinare i potenziali delle superfici possiamo calcolare esplicitamente i campi e integrando, tenendo conto delle distribizioni di cariche, oppure possiamo schematizzare il problema con un sistema equivalente di condensatori.

Metodo 1
Procediamo con il calcolo esplicito. Utilizziamo il teorema di Gauss, per dire che il campo elettrico (radiale) ha modulo

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sum Q_{\text{int}}}{r^2}$$

dove Q_{int} è la carica contenuta nel volume interno al raggio r. La differenza di potenziale tra due punti R_A e R_B vale

$$V_A - V_B = \frac{\sum Q_{\text{int}}}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B}\right)$$

Per $r > R_3$, $Q_{\text{int}} = Q$, ovvero la carica totale data al sistema. Segue, avendo posto $V = 0$ all'infinito ($R_B = \infty$):

$$V_3 = V(R_3) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_3} = 750 \text{ V}$$

In virtù della connessione, la superficie a R_1 si deve trovare allo stesso potenziale della superficie a R_3:

$$V_1 = 750 \text{ V}$$

Per calcolare il campo nell'intercapedine tra R_2 e R_3, dobbiamo considerare che, per induzione, si va a disporre una carica Q_1 sul conduttore 1. Essendo la carica complessiva sui conduttori 1 e 3 nulla, si dispone una carica $Q_3 = -Q_1$ sul conduttore esterno. Quindi, per $R_2 < r < R_3$

$$V_2 - V_3 = \frac{Q_1 + Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right) \tag{1}$$

e

$$V_1 - V_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

Possiamo scrivere $V_1 - V_3 = (V_1 - V_2) + (V_2 - V_3)$. Per la connessione, si ha $V_1 - V_3 = 0$. Quindi

$$V_1 - V_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[Q_1\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + (Q_1 + Q)\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right)\right] = 0$$

da cui

$$Q_1\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_3}\right) + Q\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right) = 0 \tag{2}$$

Ricaviamo quindi

$$Q_1 = -Q\frac{R_3 - R_2}{R_2} \cdot \frac{R_1}{R_3 - R_1} = -1.25 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$

Inserendo questo valore nella formula (1) si ricava

$$V_2 = V_3 + \frac{Q_1 + Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right) = 1030 \text{ V}$$

Metodo 2

In alternativa possiamo disegnare il sistema equivalente di condensatori, come in figura, dove $C_{1,2}$ è la capacità tra R_1 e R_2, $C_{2,3}$ tra R_2 e R_3, e C_3 tra R_3 e l'infinito. Si ha

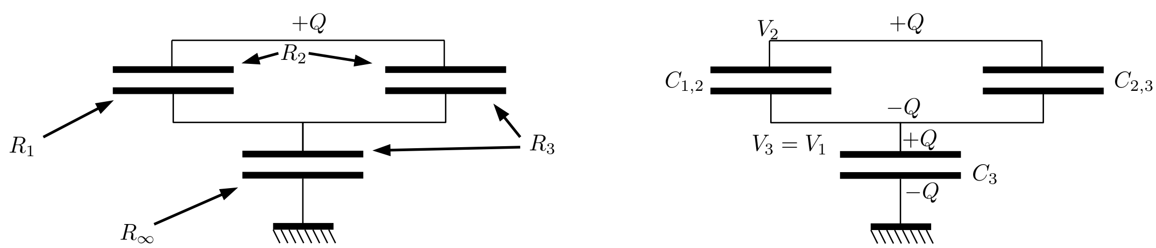


Figure 1: A sinistra costruiamo il circuito equivalente, identificando le tre superfici, e la carica Q inserita. A destra indichiamo le capacità, le cariche indotte, e i potenziali nei vari punti del circuito.

$$C_3 = 4\pi\varepsilon_0 R_3 \qquad C_{1,2} = 4\pi\varepsilon_0\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \qquad C_{2,3} = 4\pi\varepsilon_0\frac{R_2 R_3}{R_3 - R_2}$$

Ricaviamo subito che

$$V_3 = \frac{Q}{C_3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R_3} = 750 \text{ V}$$

e che

$$V_2 - V_3 = \frac{Q}{C_{1,2} + C_{2,3}} \tag{3}$$

Essendo

$$C_{1,2} + C_{2,3} = 4\pi\varepsilon_0\left(\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} + \frac{R_2 R_3}{R_3 - R_2}\right) = 4\pi\varepsilon_0\frac{R_2^2(R_3 - R_1)}{(R_2 - R_1)(R_3 - R_2)}$$

si ha:

$$V_2 = V_3 + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\ \frac{(R_2 - R_1)(R_3 - R_2)}{R_2^2(R_3 - R_1)} = 1030 \text{ V}$$

Sulla superficie di raggio R_1:

$$V_1 = V_3 = 750 \text{ V}$$

La carica indotta sulla superficie R_1 vale:

$$Q_1 = (V_1 - V_2)C_{1,2} = -1.25 \cdot 10^{-9} \text{ C}$$

b)

la pressione è pari alla densità di energia elettrostatica

$$p = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$$

Esternamente alla superficie 2 si ha

$$E_{\text{ext}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(Q + Q_1)}{R_2^2}$$

internamente

$$E_{\text{int}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(Q_1)}{R_2^2}$$

da cui

$$P_{\text{ext}} = \frac{1}{32\pi^2\varepsilon_0} \frac{(Q+Q_1)^2}{R_2^4} = 1.96 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}$$

$$P_{\text{int}} = \frac{1}{32\pi^2\varepsilon_0} \frac{Q_1^2}{R_2^4} = 0.22 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}$$

La pressione totale vale:

$$P_{\text{ext}} - P_{\text{int}} = 1.74 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}$$

e agisce dall'interno verso l'esterno.

c)
La carica totale contenuta nel sistema non varia, quindi il potenziale sulle superfici di raggi R_3 e R_1 non camabia:

$$V_3' = V_1' = 750 \text{ V}$$

Metodo 1
Nel caso sia sia seguito il metodo 1 alla domanda (a), si può calcolare la carica Q_1' che si dispone sulla superficie interna. L'equazione (2) diventa

$$Q_1' \left(\frac{1}{\varepsilon_r R_1} - \frac{1}{\varepsilon_r R_2} + \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right) + Q \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right) = 0$$

da cui

$$Q_1' = -Q \frac{R_3 - R_2}{R_2 R_3} \; \frac{\varepsilon_r R_1 R_2 R_3}{R_2 R_3 - R_1 R_3 + \varepsilon(R_1 R_3 - R_1 R_2)}$$

$$= -Q \frac{\varepsilon_r R_1 (R_3 - R_2)}{R_2 R_3 - R_1 R_3 + \varepsilon(R_1 R_3 - R_1 R_2)} = -2.5 \cdot 10^{-9} \text{C}$$

Il potenziale della superficie a raggio R_2 vale quindi

$$V_2' = V_3 + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} (Q_1' + Q) \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right) = 936 \text{ V}$$

Metodo 2
Utilizzando l'equazione (3), tenendo conto che adesso

$$C_{1,2}' = \varepsilon_r C_{1,2}$$

troviamo:

$$V_2' = V_3 + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \; \frac{(R_2 - R_1)(R_3 - R_2)}{R_2^2 (R_3 - \varepsilon_r R_1) + R_1 R_2 R_3 (\varepsilon_r - 1)} = 936 \text{ V}$$