Prova Esonero Elettromagnetismo - 16.06.2017
(a.a. 2016/17, S. Giagu/F. Lacava/S. Petrarca)

Risolvere i due esercizi proposti: tempo massimo 2.5 ore.

Esercizio 1
Un toroide a sezione quadrata di lato $l = 2\,\mathrm{cm}$, raggio interno $R_1 = 3$ cm costruito con materiale magnetico omogeneo lineare e isotropo, ha avvolte su di sè 1000 spire. Il coefficiente di autoinduzione è $L = 0.06\,\mathrm{H}$.

a) Calcolare il campo di induzione magnetica B in funzione della distanza dal centro del toroide e della corrente I nelle spire.

a1) Calcolare il coefficiente di permeabiltà magnetica relativa μ_r del toroide.

L'avvolgimento del toroide è alimentato con una corrente $I = kt$ di durata $t_M = 3\,\mathrm{s}$ con $k = 2\,\mathrm{A/s}$.

b) Calcolare l'energia magnetica contenuta nel toroide in funzione del tempo nell'intervallo $(0, t_M)$ e

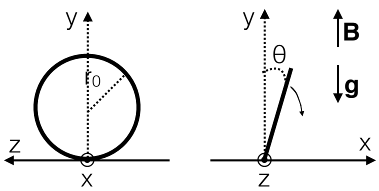
b1) il suo valore massimo.

Il toroide è accoppiato magneticamente con coefficiente di mutua induzione $M = 10^{-6}\,\mathrm{H}$ a un secondo circuito comprendente la serie di una bobina di coefficiente di autoinduzione trascurabile, una resistenza $R = 15\,\Omega$ e un condensatore piano in aria con le piastre circolari di raggio $R_c = 1\,\mathrm{cm}$, distanti tra loro $d = 2\,\mathrm{mm}$. Il condensatore inizialmente è scarico.

c) Calcolare l'energia elettrica e magnetica contenuta nel condensatore al tempo t_M.

Si risolva l'esercizio in condizioni di quasi stazionarietà considerando ideali il toroide e il condensatore e trascurando gli effetti ai bordi.

Esercizio 2
Una spira conduttrice circolare di raggio r_0, resistenza R e massa m_0, è inizialmente posta in verticale su un piano orizzontale. La spira si trova in un campo di induzione magnetica costante $\mathbf{B}$ diretto ortogonalmente al piano (vedi figura). Ad un certo istante la spira viene leggermente inclinata in modo che il piano della spira formi un angolo θ_0 rispetto alla direzione del campo magnetico e quindi lasciata cadere lateralmente (con velocità iniziale nulla).
Trascurando l'autoinduzione nella spira, determinare:



a) la corrente i che circola nella spira in funzione dell'angolo θ e della sua derivata rispetto al tempo $\dot{\theta}$;

b) il momento magnetico della spira, specificando modulo, direzione e verso.

c) Assumendo che istante per istante l'espressione della potenza erogata dalla forza peso eguagli la potenza dissipata per effetto joule nella resistenza della spira, determinare l'espressione di $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ in funzione dell'angolo θ;

Soluzione
Esercizio 1
Nell' esercizio stampato e distribuito alla prova il valore assegnato per la durata della corrente era $t_M = 3$s, durante la prova è stato chiesto di effettuare i calcoli con un diverso valore $t'_M = 3 \cdot 10^{-11}s = 30ps$. Nella soluzione riportiamo i calcoli delle quantità richieste per t'_M e tra parentesi per t_M, entrambe le soluzioni sono considerate corrette.

Prima parte

a) Dalla circuitazione del campo di induzione magnetica B nel toroide risulta: $2\pi r B = \mu_o \mu_r N I$ cioè $B = \frac{\mu_o \mu_r N I}{2\pi r}$.

a1) Il flusso concatenato con le N spire dell'avvolgimento è: $\Phi(B) = \int \frac{\mu_o \mu_r N^2 I}{2\pi r} l dr = \frac{\mu_o \mu_r N^2 I l \ln(1+l/R_1)}{2\pi}$ da cui $L = \frac{\mu_o \mu_r N^2 l \ln(1+l/R_1)}{2\pi}$ e $\mu_r = \frac{2\pi L}{\mu_o N^2 l \ln(1+l/R_1)} = 29$.

b) L'energia magnetica U_{tor} del toroide è data da: $U_{tor}(t) = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} L k^2 t^2$.

b1) Il suo valore massimo è $U_{tor-max} = \frac{1}{2} L k^2 {t'_M}^2 = 1.08 \cdot 10^{-22} J$ (e $U_{tor-max} = 1.08$ J per t_M) .

Seconda parte

Il condensatore di capacità $C = \epsilon_0 \frac{\pi R_c^2}{d} = 1.4pF$ viene caricato da una ddp costante $f = Mk = 2\mu V$ in un circuito R-C con tempo caratteristico $\tau = RC = 21ps$: $V(t) = MK(1 - \exp(-t/\tau))$. Il valore di $V(t'_M) = 1.52\mu V$ (mentre $V(t_M) \approx MK = 2\mu V$)

c) l'energia elettrica contenuta nel condensatore al tempo t'_M è: $U_C = \frac{1}{2} C V(t'_M)^2 = 1.62 \cdot 10^{-24} J$ (mentre al tempo $t_M \quad U_C = 2.8 \cdot 10^{-24} J$).

Poichè veniva richiesto di risolvere l'esercizio in condizioni quasi stazionarie, si poteva trascurare la corrente di spostamento e di conseguenza porre a zero l'energia magnetica.

Tale risposta se motivata è considerata corretta.

Non volendo trascurare al primo ordine la corrente di spostamento, l' energia magnetica all'interno del condensatore è generata dalla densità di corrente di spostamento che è un vettore spazialmente uniforme diretto parallelamente all'asse del condensatore di modulo : $J_s(t) = \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\epsilon_0}{d} \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\epsilon_0}{d\tau} Mk \exp(-t/\tau))$.

Dalla circuitazione di B lungo una circonferenza con raggio r rispetto all'asse del condensatore $(2\pi r B(r,t) = \mu_0 \pi r^2 J_s(t))$ il valore del campo di induzione magnetica generato dalla corrente di spostamento all'interno del condensatore risulta : $B(r,t) = \frac{\mu_0 \epsilon_0 M k r}{2\tau d} \exp(-t/\tau)$ che riscriviamo $B(r,t) = \mathcal{B}(t) \cdot r$ con $\mathcal{B}(t) = \frac{Mk}{2\tau d c^2} \exp(-t/\tau)$. $\mathcal{B}(t'_M) = 2.6 \cdot 10^{-10} T/m$ (mentre $\mathcal{B}(t_M) \approx \mathcal{B}(\infty) = 0$).

L'energia magnetica contenuta nel condensatore è: $U_M(t) = \int \frac{B(r,t)^2}{2\mu_0} d\tau = \frac{\mathcal{B}(t)^2}{2\mu_0} 2\pi d \int_0^{R_c} r^2 r dr = \frac{\mathcal{B}(t)^2 \pi d R_c^4}{4\mu_0}$. L'energia magnetica al tempo t'_M vale $U_M(t'_M) = 4.82 \cdot 10^{-26} J$ (mentre è praticamente nulla per t_M).

Allo stesso risultato si poteva arrivare considerando il flusso del vettore di Poynting atraverso la superficie laterale del condensatore integrato nel tempo. Questo approssimato al primo ordine (solo campo magnetico generato dalla corrente di spostamento generata dalla variazione del campo elettrico al primo ordine fornisce come energia totale nel condensatore l'energia associata al campo elettrostatico, come atteso. Il calcolo completo richiede di considerare i contributi a campo elettrico e magnetico di ordine superiore generati dalle variazioni nel tempo dei due campi.

Esercizio 2

a)

Il flusso del campo magnetico concatenato con la spira quando la spira è inclinata di un angolo θ rispetto alla verticale è dato da:

$$\phi(B) = \pi r_0^2 B \sin\theta;$$

per la legge di Faraday-Neumann avremo quindi:

$$\begin{aligned} f_i &= -\frac{d\phi}{dt} = -\pi r_0^2 B\dot{\theta}\cos\theta; \\ i &= -\frac{\pi r_0^2 B\dot{\theta}\cos\theta}{R}. \end{aligned}$$

La corrente scorre in verso orario in modo da generare un campo magnetico in verso opposto al campo esterno B.

b)

La spira percorsa dalla corrente i per il teroema di equivalenza di Ampere avrà momento magnetico:

$$\mathbf{m} = \pi r_0^2 i\hat{n} = \frac{\pi^2 r_0^4 B\dot{\theta}\cos\theta}{R}\hat{n};$$

con $\hat{n}$ il versore normale al piano della spira che vede scorrere la corrente nella spira in verso orario.

c)

La potenza dissipata per effetto joule è data da:

$$W_J = Ri^2 = \frac{\pi^2 r_0^4 B^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta}{R};$$

Il momento meccanico dovuto alla forza peso applicata al centro della spira risulta essere:

$$\mathbf{M}_g = -m_0 g r_0 \sin\theta\hat{z}.$$

e quindi la potenza erogata risulta pari a:

$$W_g = M_g\omega = M_g\dot{\theta} = m_0 g r_0\dot{\theta}\sin\theta.$$

Assumendo che istante per istante ($W_J = W_g$):

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2 r_0^4 B^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta}{R} &= m_0 g r_0\dot{\theta}\sin\theta; \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{Rm_0 g}{\pi^2 r_0^3 B^2}\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}; \end{aligned}$$

Notare che l'assunzione $W_J = W_g$ corrisponde fisicamente all'assumere piccole velocità per la spira per cui si possa trascurare nella equazione del moto il termine di accelerazione angolare $\ddot{\theta}$:

$$\vec{M}_m + \vec{M}_g = I_c\ddot{\theta} \simeq 0 \Rightarrow \vec{M}_m + \vec{M}_g = 0;$$

e quindi istante per istante il momento meccanico dovuto alal forza peso equilibra il momento meccanico contrario dovuto alla forza magnetica $\vec{m} \times \vec{B}$:

$$-m_0 g r_0 \sin\theta + \frac{\pi^2 r_0^4 B^2 \dot{\theta} \cos^2\theta}{R} = 0 \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{R m_0 g}{\pi^2 r_0^3 B^2} \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$$