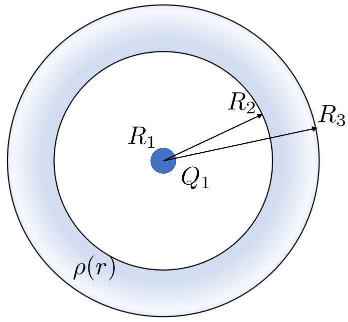
Prova Esonero Elettromagnetismo - 20.04.2018
(a.a. 2017/18, S. Giagu/F. Lacava/F. Piacentini)

Risolvere i due esercizi proposti: tempo massimo 3 ore.

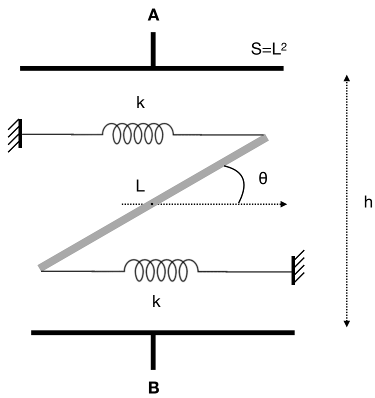
Esercizio 1



Su un conduttore sferico di raggio R_1 è depositata una carica Q_1. Concentrico al conduttore è posto un guscio sferico, di raggio interno R_2 e raggio esterno R_3, sul quale è distribuita una carica localizzata la cui densità di volume $\rho(r)$ dipende solo dalla distanza dal centro del sistema.
Si chiede di:
a) determinare la funzione $\rho(r)$ che permette di avere un campo elettrico in modulo costante su tutto il guscio;
b) calcolare la carica totale Q_2 contenuta nel guscio sferico;
c) verificare che il campo elettrico è continuo per $r > R_1$, e disegnarne l'andamento in funzione di r;
d) ricavare l'espressione dell'energia elettrostatica U del sistema (senza calcolo numerico).

Dati: $R_1 = 5.00$ mm, $R_2 = 7.50$ cm, $R_3 = 10.0$ cm, $Q_1 = 2.50\ n$C

Esercizio 2



Una lastra dielettrica quadrata di spessore d e lato $L \gg d$ è costituita da materiale dielettrico perfetto ed isotropo di costante dielettrica relativa ϵ_r. La lastra è posta al centro (vedi figura) di un condensatore piano con armature quadrate di lato L, inizialmente caricato in modo che il campo elettrico nello spazio interno vuoto abbia valore E_0. I due estremi della lastra sono connessi come in figura a due molle ideali di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla. La lastra si trova in equilibrio e forma un angolo θ rispetto alla direzione parallela alle armature del condensatore.
Trascurando gli effetti di bordo, e assumendo che il campo elettrico in prossimità delle superfici esterne del dielettrico conservi la direzione ortogonale alle superfici del condensatore, determinare, in funzione dell'angolo θ:
a) l'espressione del campo elettrico E all'interno della lastra e l'angolo θ' che esso forma con la normale alla superficie della lastra stessa;
b) le densità di carica di polarizzazione nel dielettrico;
c) l'espressione della energia elettrostatica all'interno del dielettrico (si assuma la densità di energia elettrostatica uniforme all'interno del dielettrico).
Infine si trovi:
d) l'espressione del momento meccanico complessivo agente sul dielettrico e l'espressione di $\cos\theta$ (considerare le molle come orizzontali) .

[*Si suppongano noti:* d, k, h, L, ϵ_r, E_0]

Soluzione 1

a)
All'interno dello strato sferico, indicando con E_r il valore costante del campo radiale, la prima equazione di Maxwell in coordinate sferiche si scrive:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho(r)}{\epsilon_0} \qquad \rightarrow \qquad \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2 E_r) = \frac{\rho(r)}{\epsilon_0}$$

Ne segue:

$$\frac{d}{dr}(r^2 E_r) = \frac{\rho(r)}{\epsilon_0} r^2 \qquad \rightarrow \qquad 2rE_r = \frac{\rho(r)}{\epsilon_0} r^2$$

$$\rho(r) = \frac{2\epsilon_0}{r} E_r$$

Allo stesso risultato si perviene naturalmente dal teorema di Gauss applicato all'interno dello strato ($R_1 < r < R_2$):

$$\Phi_E(r) = \frac{Q_1 + Q_2(r)}{\epsilon_0} \qquad 4\pi r^2 E_r = \frac{Q_1}{\epsilon_0} + \frac{1}{\epsilon_0}\int_{R_2}^{r} \rho(r') 4\pi r'^2 \, dr'$$

essendo $Q_2(r)$ la carica nello strato a distanza radiale dal centro compresa tra R_2 e r.
Differenziado i due membri:

$$8\pi r E_r \, dr = \frac{dQ_2(r)}{\epsilon_0} = \frac{4\pi r^2 \; \rho(r) \; dr}{\epsilon_0} \qquad \text{e quindi:} \qquad \rho(r) = \frac{2\epsilon_0 E_r}{r}$$

Il valore del campo elettrico E_r è determinato dalla richiesta di campo costante su tutto lo strato, quindi anche per $r = R_2$ dove è presente il campo generato dalla sola carica Q_1:

$$E_r = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{R_2^2} = 4.99 \; kV/m$$

E quindi per ρ si trova:

$$\rho(r) = \frac{Q_1}{2\pi}\frac{1}{R_2^2}\frac{1}{r}$$

In alternativa il valore di E_r si può trovare applicando il teorema di Gauss su una superficie sferica di raggio r interna allo strato (con $R_2 < r < R_3$):

$$4\pi r^2 E_r = \frac{Q_1 + Q_2(r)}{\epsilon_0}$$

$$Q_2(r) = \int_{R_2}^{r} \rho(r') 4\pi r'^2 \; dr' = \int_{R_2}^{r} \frac{2\epsilon_0}{r'} E_r 4\pi r'^2 \; dr' = 4\pi\epsilon_0 E_r (r^2 - R_2^2)$$

che inserita nella precedente permette di ricavare per E_r il valore già scritto sopra.

b)
Da quanto trovato in precedenza, la carica totale nello strato $Q_2 = Q_2(R_3)$ risulta:

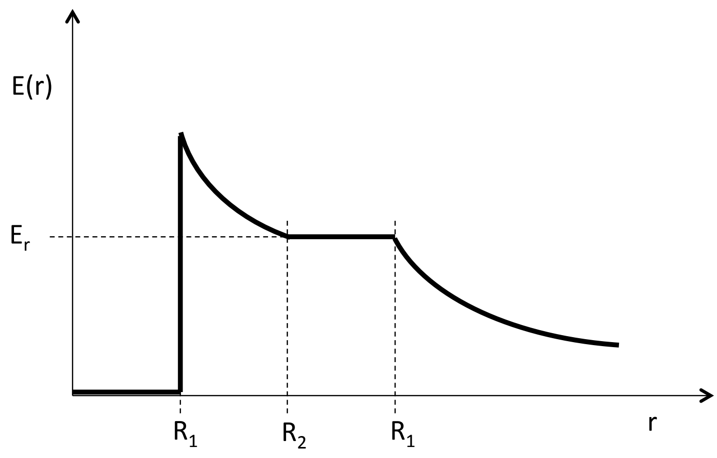
$$Q_2 = 4\pi\epsilon_0 E_r (R_3^2 - R_2^2) = Q_1 \left(\frac{R_3^2}{R_2^2} - 1\right) = 1.94 \; nC$$

c)
All'interno del conduttore ($r < R_1$) il campo elettrico è nullo.
Dal teorema di Gauss per $R_1 < r \leq R_2$ è immediato:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1}{r^2} \qquad E(R_2) = E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1}{R_2^2}$$

Per $R_2 \leq r \leq R_3$ il campo è E_r e per $r \geq R_3$:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1 + Q_2(r)}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_1}{r^2}\frac{R_3^2}{R_2^2} \qquad E(R_3) = E_r$$



d)
Per trovare l'energia elettrostatica si può integrare la densità di energia $u = \epsilon_0 E^2/2$ su tutto lo spazio.

$$U_{12} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r^2} \right)^2 4\pi r^2 \; dr = \frac{Q_1^2}{8\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right]$$

$$U_{23} = \int_{R_2}^{R_3} \frac{\epsilon_0 E_r^2}{2} \; 4\pi r^2 \; dr = \frac{1}{3} \frac{Q_1^2}{8\pi\epsilon_0} \left[\frac{R_3^3 - R_2^3}{R_2^4} \right]$$

$$U_{3\infty} = \int_{R_3}^{\infty} \frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r^2} \frac{R_3^2}{R_2^2} \right)^2 4\pi r^2 \; dr = \frac{Q_1^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_3} \frac{R_3^4}{R_2^4}$$

$$U_{Tot} = U_{12} + U_{23} + U_{3\infty} = \frac{Q_1^2}{8\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{4}{3} \frac{1}{R_2} + \frac{4}{3} \frac{R_3^3}{R_2^4} \right]$$

Soluzione 2

a)

Indicando con E_0 il campo elettrico nel vuoto e con E il campo elettrico nel dielettrico, avremo che essendo la componente del campo elettrico parallela alla superficie del dielettrico continua nel passaggio dal dielettrico al vuoto:

$$E_{\parallel} = E_{0\parallel} = E_0 \sin\theta.$$

La componente dello spostamento elettrico ortogonale alla superficie del dielettrico è anche essa continua, inoltre campo elettrico e spostamento elettrico sono legati dalla relazione $D = \epsilon E$, per cui:

$$\begin{aligned} D_\perp &= D_{0\perp} \\ \epsilon_0\epsilon_r E_\perp &= \epsilon_0 E_{0\perp} \\ E_\perp = \frac{E_{0\perp}}{\epsilon_r} &= \frac{E_0\cos\theta}{\epsilon_r}. \end{aligned}$$

$$E = E_0\left[\frac{\cos^2\theta}{\epsilon_r^2} + \sin^2\theta\right]^{\frac{1}{2}}$$

L'angolo θ' formato da E con la normale alla superficie del dielettrico risulta quindi dato da:

$$\tan\theta' = \frac{E_\parallel}{E_\perp} = \epsilon_r\tan\theta.$$

E si trova facilmente:

$$\cos\theta' = \frac{\cos\theta}{\epsilon_r}\frac{1}{\left[\frac{\cos^2\theta}{\epsilon_r^2} + \sin^2\theta\right]^{\frac{1}{2}}} \qquad \sin\theta' = \frac{\sin\theta}{\left[\frac{\cos^2\theta}{\epsilon_r^2} + \sin^2\theta\right]^{\frac{1}{2}}}$$

b)

Applicando il teorema di Gauss per E ad una superficie cilindrica con asse perpendicolare alla superficie del dielettrico e basi S una all'interno del dielettrico e una all'esterno, avremo:

$$\begin{aligned} d\Phi = E_{0\perp}S - E_\perp S &= \frac{\sigma_p S}{\epsilon_0} \\ \sigma_p &= \epsilon_0(E_{0\perp} - E_\perp) = \epsilon_0 E_0\cos\theta(1 - \frac{1}{\epsilon_r}). \end{aligned}$$

In alternativa si può calcolare l'intensità di polarizzazione P dentro il dielettrico e poi la carica di polarizzazione σ_P:

$$P = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)E \qquad \sigma_P = \vec{P}\cdot\hat{n}_{ext} = P\cos\theta'$$

che da quanto trovato in precedenza per E e $\cos\theta'$ risulta:

$$\sigma_P = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)E_0\frac{\cos\theta}{\epsilon_r} = \epsilon_0 E_0\cos\theta(1 - \frac{1}{\epsilon_r})$$

come già trovato.

c)
La densità di energia elettrica all'interno del dielettrico è data da:

$$u_E = \frac{1}{2}\mathbf{D}\cdot\mathbf{E} = \frac{1}{2}\epsilon_0\epsilon_r E^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0\epsilon_r(E_\perp^2 + E_\parallel^2) = \frac{1}{2}\epsilon_0\epsilon_r E_0^2(\frac{\cos^2\theta}{\epsilon_r^2} + \sin^2\theta).$$

assumendo uniforme la densità di energia all'interno del dielettrico avremo per l'energia:

$$U_E(\theta) = \int u_E d\tau = dL^2 u_E = \frac{dL^2}{2}\epsilon_0\epsilon_r E_0^2(\frac{\cos^2\theta}{\epsilon_r^2} + \sin^2\theta).$$

d)

Il momento meccanico agente sul dielettrico è dato dalla somma della coppia meccanica dovuta alla forze elastiche applicate dalle due molle e dal momento dovuto al campo elettrostatico che tende a allineare la lastra nella direzione $\theta = 0$ (l'energia elettrostatica all'interno del dielettrico calcolata in (c) è infatti minima per $\theta = 0$. Avremo:

$$\begin{aligned}
M_E &= -\frac{dU_E}{d\theta} = -\frac{dL^2}{2}\epsilon_0\epsilon_r E_0^2(-\frac{2\cos\theta\sin\theta}{\epsilon_r^2} + 2\cos\theta\sin\theta) = -dL^2\frac{\epsilon_0}{\epsilon_r}E_0^2\cos\theta\sin\theta(\epsilon_r^2 - 1); \\
M_k &= \frac{L^2 k}{2}(1 + \cos\theta)\sin\theta.
\end{aligned}$$

Uguagliando a zero a somma dei due momenti e risolvendo rispetto a θ:

$$\begin{aligned}
-dL^2\frac{\epsilon_0}{\epsilon_r}E_0^2\cos\theta\sin\theta(\epsilon_r^2 - 1) + \frac{L^2 k}{2}(1 + \cos\theta)\sin\theta = 0 \\
-d\frac{\epsilon_0}{\epsilon_r}E_0^2\cos\theta(\epsilon_r^2 - 1) + \frac{k}{2}(1 + \cos\theta) = 0 \\
\cos\theta = \frac{\frac{k}{2}}{d\frac{\epsilon_0}{\epsilon_r}E_0^2(\epsilon_r^2 - 1) - \frac{k}{2}} = \frac{\frac{k}{2}}{d\frac{\epsilon_0}{\epsilon_r}(\frac{V_0}{h})^2(\epsilon_r^2 - 1) - \frac{k}{2}}.
\end{aligned}$$