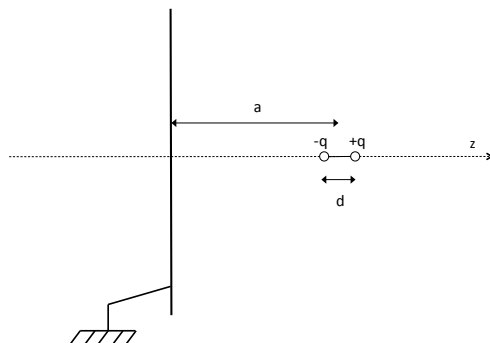


Corso di Elettromagnetismo
 Prova scritta : a.a. 2014/15, 17 Settembre 2015
 Proff. S. Giagu, F. Lacava, D. Trevese

Problema 1

Un dipolo elettrico è formato da due cariche opposte di valore $q = 1,5 \cdot 10^{-6} \text{ C}$, distanti tra loro $d = 1 \text{ cm}$. Il suo centro è posto, come in figura, a distanza $a = 20 \text{ cm}$ da un piano conduttore messo a massa. Si determini:

- la forza con la quale il dipolo è attratto dal piano conduttore;
- l'espressione della densità di carica superficiale indotta sul piano conduttore;

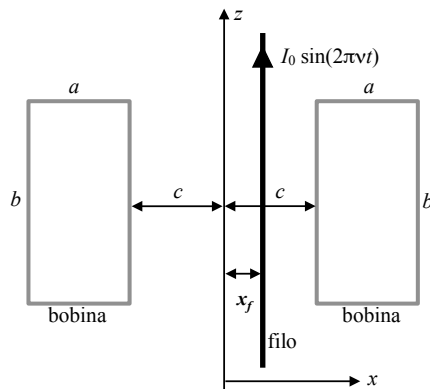


Problema 2

Un filo di sezione trascurabile è disposto parallelamente all'asse z a una distanza x_f da esso. Nel filo scorre una corrente sinusoidale $I(t) = I_0 \sin(2\pi\nu t)$ con frequenza $\nu = 10 \text{ MHz}$ e con ampiezza $I_0 = 1 \text{ mA}$. Per misurare la posizione del filo si possono usare due bobine uguali di forma rettangolare, poste nel piano $x - z$ simmetricamente rispetto all'asse z . Le bobine, di spessore trascurabile, sono composte da 250 spire e hanno le dimensioni e la posizione rispetto all'asse z indicate in figura. Trascurando il flusso autoindotto nelle bobine (e quindi la mutua induzione):

- si determini la d.d.p. f ai capi di ciascuna bobina (a circuito aperto) in funzione della distanza x_f del filo dall'asse z ;
- si trovi la differenza dV tra le d.d.p. nelle due bobine per uno spostamento dx_f piccolo dall'asse z ;
- si calcoli di quanto varia la dV_{eff} quando il filo si sposta di $1 \mu\text{m}$ dall'asse z .

(lati delle bobine: $a = 5 \text{ cm}$, $b = 10 \text{ cm}$; distanza delle bobine dall'asse z : $c = 3 \text{ cm}$).



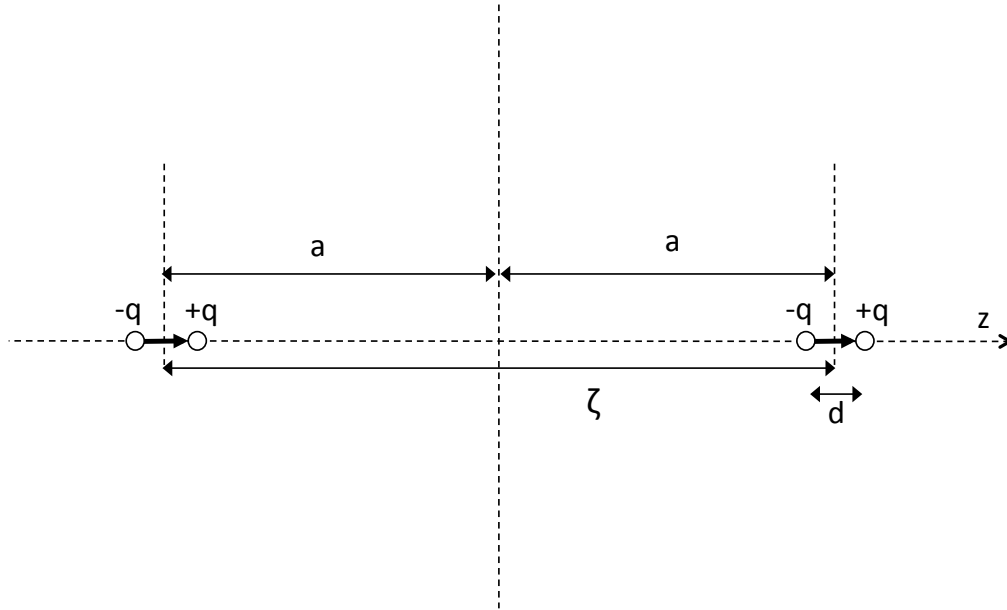
Problema 3

All'interno di una superficie cilindrica di raggio $R = 7.5 \text{ cm}$, con asse coincidente con l'asse z , è inizialmente presente un campo d'induzione magnetica $B_0 = 1 \text{ T}$ uniforme, diretto come l'asse z , mentre all'esterno il campo è nullo. Ad iniziare dal tempo $t = 0$ il campo interno viene diminuito con legge $B_z(t) = B_0 - bt$, con $b = 0.2 \text{ T/s}$, finché non si annulla. Si determini:

- il campo elettromotore (modulo, direzione e verso) presente sulla superficie cilindrica in funzione del tempo;
- il vettore di Poynting sulla superficie cilindrica in funzione del tempo;
- l'integrale nel tempo del flusso del vettore di Poynting, per unità di lunghezza della superficie cilindrica, e lo si confronti con l'energia magnetica inizialmente presente all'interno.

Soluzione 1

a) Il problema si può risolvere col metodo delle cariche immagine ponendo un dipolo immagine come in figura.



La forza sul dipolo reale p è pari a $\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{p} \cdot \vec{E}) = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla})\vec{E}$ dove \vec{E} è il campo generato dal dipolo immagine. In questo caso si deve considerare il campo sulla retta, con direzione $\hat{\zeta}$ coincidente con l'asse \hat{z} , passante per il dipolo immagine a distanza ζ da questo:

$$E_{\zeta} = \frac{p}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{\zeta^3} \quad \text{come è immediato ricavare dalle espressioni del campo del dipolo sui libri di testo.}$$

La forza sul dipolo reale è quindi:

$$F_{\zeta} = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla})E_{\zeta} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{p^2}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{\zeta^3} \right) = -\frac{3p^2}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{\zeta^4} = -\frac{3p^2}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{16a^4} \quad \text{essendo nel nostro caso } \zeta = 2a ; F = 0.47 \cdot 10^{-3} N .$$

Allo stesso risultato si arriva sommando le forze tra le quattro cariche puntiformi del sistema nell'approssimazione $d \ll a$:

$$F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(2a)^2} + \frac{1}{(2a)^2} - \frac{1}{(2a+d)^2} - \frac{1}{(2a-d)^2} \right] = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{2a^2} - \frac{2(4a^2+d^2)}{(4a^2-d^2)^2} \right]$$

$$F \simeq \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{2a^2} - \frac{1}{2a^2} \left(1 + \frac{3d^2}{4a^2} \right) \right] = -\frac{q^2}{2\pi\epsilon_0} \frac{3d^2}{16a^4}$$

b) In coordinate cartesiane il campo da un dipolo elettrico, centrato nell'origine degli assi, ha componenti:

$$E_x = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \quad E_y = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{3yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \quad E_z = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

Nel nostro problema siamo interessati al campo sul piano conduttore somma dei campi del dipolo reale e di quello immagine. Il campo del dipolo reale è il campo sul suo piano $z = -a$ mentre quello del dipolo immagine è il campo sul suo piano $z = a$. Dalle espressioni precedenti risulta:

$$E_x^{tot} = 0 \quad E_y^{tot} = 0 \quad E_z^{tot} = 2 \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{2a^2 - x^2 - y^2}{(x^2 + y^2 + a^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{p}{2\pi\epsilon_0} \frac{2a^2 - r^2}{(r^2 + a^2)^{\frac{5}{2}}} .$$

Il campo, come aspettato, è normale al piano conduttore e dipende solo dalla distanza r dal piede della normale al piano passante per i dipoli. Dal teorema di Coulomb si trova la densità superficiale di carica indotta sul piano:

$$\sigma(r) = \epsilon_0 E_z^{tot} = \frac{p}{2\pi} \frac{2a^2 - r^2}{(r^2 + a^2)^{\frac{5}{2}}} .$$

E' immediato verificare che l'integrale sul piano di questa distribuzione è nulla come aspettato essendo nulla la carica totale del dipolo immagine.

Soluzione del problema 1 in coordinate sferiche e caso di un dipolo parallelo al piano conduttore (non nel testo del compito).

In coordinate sferiche il potenziale di un dipolo è:

$$V(r, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{pcos\theta}{r^2}$$

e il campo elettrico ha componenti:

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{pcos\theta}{r^3} \quad E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{psin\theta}{r^3} \quad E_\phi = -\frac{1}{r sin\theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \quad .$$

Per trovare la forza si deve porre il dipolo di componenti $(p, 0, 0)$ nel campo elettrico, a $\theta = 0$ e $r = 2a$, del dipolo immagine di componenti $(p, 0, 0)$:

$$F_r = \left[\nabla_r (\vec{p} \cdot \vec{E}) \right]_{\theta=0} = \left[\nabla_r \left(\frac{p}{2\pi\epsilon_0} \frac{pcos\theta}{r^3} \right) \right]_{\theta=0} = -\frac{3}{2\pi\epsilon_0} \frac{p^2}{r^4} = -\frac{3}{2\pi\epsilon_0} \frac{p^2}{16a^4}$$

$$F_\theta = \left[\nabla_\theta (\vec{p} \cdot \vec{E}) \right]_{\theta=0} = \left[\nabla_\theta \left(\frac{p}{2\pi\epsilon_0} \frac{pcos\theta}{r^3} \right) \right]_{\theta=0} = 0 \quad F_\phi = \nabla_\phi (\vec{p} \cdot \vec{E}) = 0$$

Per un dipolo con orientazione parallela al piano conduttore, si può porre il dipolo, con componenti sferiche $(0, p, 0)$, nel campo elettrico, nel punto a $\theta = \pi/2$ e $r = 2a$, di un dipolo immagine $(p, 0, 0)$:

$$F_r = \left[\nabla_r (\vec{p} \cdot \vec{E}) \right]_{\theta=\pi/2} = \left[\nabla_r \left(\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{psin\theta}{r^3} \right) \right]_{\theta=\pi/2} = -\frac{3}{4\pi\epsilon_0} \frac{p^2}{r^4} = -\frac{3}{4\pi\epsilon_0} \frac{p^2}{16a^4}$$

$$F_\theta = \left[\nabla_\theta (\vec{p} \cdot \vec{E}) \right]_{\theta=\pi/2} = \left[\nabla_\theta \left(\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{psin\theta}{r^3} \right) \right]_{\theta=\pi/2} = 0 \quad F_\phi = \nabla_\phi (\vec{p} \cdot \vec{E}) = 0$$

Soluzione 2

a) Per la formula di Biot e Savart la corrente genera a distanza r dal filo un campo B con linee di forza circolari centrate sul filo:

$$B = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r}$$

Il flusso di B concatenato con le N spire della bobina a destra è:

$$\Phi_D(B) = N \int_{c-x_f}^{c+a-x_f} B b dr = N \frac{\mu_0 I(t) b}{2\pi} \int_{c-x_f}^{c+a-x_f} \frac{1}{r} dr = N \frac{\mu_0 I(t) b}{2\pi} \ln \left(\frac{c+a-x_f}{c-x_f} \right) \quad \text{con} \quad I(t) = I_0 \sin(2\pi\nu t)$$

La forza e.m. indotta è:

$$f_D = -\frac{d\Phi}{dt} = -N \frac{\mu_0 b}{2\pi} I_0 2\pi\nu \cos(2\pi\nu t) \ln \left(\frac{c+a-x_f}{c-x_f} \right) \quad .$$

Nella bobina di sinistra, sostituendo semplicemente $-x_f$ a x_f nelle espressioni precedenti, si trova:

$$f_S = -\frac{d\Phi}{dt} = -N \frac{\mu_0 b}{2\pi} I_0 2\pi\nu \cos(2\pi\nu t) \ln \left(\frac{c+a+x_f}{c+x_f} \right)$$

b) La differenza tra le f.e.m nelle due bobine è:

$$V = f_D - f_S = -N\mu_0 b I_0 \nu \cos(2\pi\nu t) \ln \left[\left(\frac{c+a-x_f}{c-x_f} \right) \left(\frac{c+x_f}{c+a+x_f} \right) \right]$$

$$V = N\mu_0 b I_0 \nu \cos(2\pi\nu t) \ln \left[\left(\frac{c+a+x_f}{c+x_f} \right) \left(\frac{c-x_f}{c+a-x_f} \right) \right] \quad .$$

e riscrivendo, per semplificare la derivata, la precedente nella forma:

$$V = N\mu_0 b I_0 \nu \cos(2\pi\nu t) \cdot [\ln(c+a+x_f) - \ln(c+x_f) + \ln(c-x_f) - \ln(c+a-x_f)]$$

per uno spostamento piccolo dx_f , si trova:

$$dV = -N\mu_0 b I_0 \nu \cos(2\pi\nu t) \frac{2a}{c(c+a)} dx_f$$

c) la dV_{eff} è:

$$dV_{eff} = \sqrt{2}N\mu_0 b I_0 \nu \frac{a}{c(c+a)} dx_f \quad \text{che risulta} \quad dV_{eff} = 9.3 \mu V \quad \text{per} \quad dx_f = 1 \mu m .$$

Soluzione 3

a) Il flusso di $\vec{B}(t) = B(t)\hat{z}$ concatenato con una qualsiasi direttrice del cilindro è: $\Phi(B) = \pi R^2 B(t)$. Per la legge di Faraday-Neumann-Lenz, la variazione di Φ produce una f.e.m. indotta lungo la direttrice, che è l'integrale di linea di un campo elettromotore E_i tangente alla direttrice e con direzione antioraria nel piano $x - y$. Dalla relazione:

$$\int_{2\pi R} \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = 2\pi R E_i = -\frac{d\Phi}{dt} = \pi R^2 \dot{b}$$

segue:

$$E_i = \frac{b}{2} R = 7.5 \cdot 10^{-3} V/m \quad \text{o in forma vettoriale} \quad \vec{E}_i = \frac{b}{2} R \hat{\phi}$$

Allo stesso risultato si arriva dalla III equazione di Maxwell. Per la simmetria del problema, in coordinate cilindriche, l'unica componente non nulla dell'equazione è:

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right)_z = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rE_\phi)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \phi} \right) = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rE_\phi)}{\partial r} \right) = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

che integrata dà:

$$E_\phi = -\frac{1}{2} r \frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{b}{2} r \quad \text{che per} \quad r = R \quad \text{diventa} \quad E_\phi = \frac{b}{2} R \quad \text{già trovata sopra.}$$

b) Nell'intervallo di tempo $0 < t < B_0/b$, è presente un vettore di Poynting \vec{I} con direzione radiale:

$$\vec{I} = \frac{\vec{E}_i \times \vec{B}}{\mu_0} = \frac{bRB}{2\mu_0} \hat{r} = \frac{bR}{2\mu_0} (B_0 - bt) \hat{r}$$

c) Il suo flusso per unità di lunghezza della superficie cilindrica è:

$$\Phi(t)/l = 2\pi R I = \frac{\pi b R^2}{\mu_0} (B_0 - bt)$$

e l'integrale del flusso di energia uscente è:

$$U/l = \int_0^{B_0/b} \Phi(t)/l dt = \frac{\pi b R^2}{\mu_0} \left[B_0 t - \frac{1}{2} b t^2 \right]_0^{B_0/b} = \frac{\pi R^2}{\mu_0} \frac{B_0^2}{2} = 7.03 kJ/m$$

uguale all'energia inizialmente contenuta nel cilindro di altezza unitaria:

$$U_0/l = \pi R^2 \cdot u_m = \pi R^2 \frac{1}{2} \frac{B_0^2}{\mu_0}$$