Corso di Elettromagnetismo

Prova scritta : a.a. 2014/15, 3 Novembre 2015

Proff. S. Giagu, F. Lacava, D. Trevese

Problema 1

Su due conduttori sferici S_1 e S_2, cavi, molto sottili, concentrici, di raggi rispettivamente $R_1 = 10\ cm$ e $R_2 = 20\ cm$ sono depositate le cariche $q_1 = -2 \cdot 10^{-8}$ C e $q_2 = 5 \cdot 10^{-8}$. Calcolare:

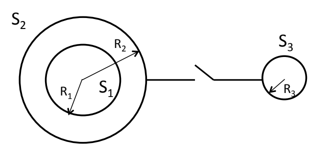
a la differenza di potenziale ΔV tra S_1 e S_2.

Un conduttore sferico S_3, di raggio $R_3 = 5\ cm$, molto lontano dai primi due, viene messo in contatto con S_2 tramite un filo conduttore. Calcolare:

b il potenziale V rispetto a infinito ($V_\infty = 0$) dei conduttori S_2 e S_3;

c il campo elettrostatico E_2 e E_3 rispettivamente in prossimità della superficie di S_2 e di S_3;

d la variazione di energia elettrostatica ΔU in seguito al collegamento.



Problema 2

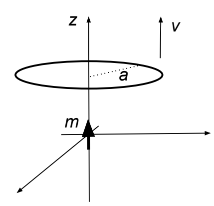
Un dipolo magnetico di momento $m = 25\,\mathrm{A\,cm^2}$ è fissato sull'origine di un sistema di riferimento cartesiano, e orientato lungo l'asse z. Una spira circolare di raggio $a = 10\,\mathrm{cm}$ e resistenza $R = 10\,\Omega$ si muove lungo z con velocità $v = 1\,\mathrm{m/s}$ costante e con asse coincidente al dipolo. Trascurando l'autoinduzione:

a calcolare il flusso del campo magnetico del dipolo attraverso la spira in funzione della posizione z della spira e calcolarlo a $z = z_0 = 200\,\mathrm{cm}$;

b calcolare la corrente indotta sulla spira, discutere la sua dipendenza temporale, e calcolarne il valore a $t = t_0 = 0.1\,\mathrm{s}$;

c calcolare l'espressione analitica della forza necessaria per mantenere la spira in moto con velocità costante v, a partire dall'istante $t = 0$ nel quale la spira si trova a $z = 0$. Calcolare inoltre il valore di tale forza all'istante $t = t_0 = 0.1\,\mathrm{s}$.

[Suggerimento: il campo magnetico di un dipolo $\mathbf{m}$ è: $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}(\frac{3\mathbf{r}(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r})}{r^5} - \frac{\mathbf{m}}{r^3})$]



Problema 3

Un'onda elettromagnetica piana monocromatica di lunghezza d'onda $\lambda = 1\,\mathrm{m}$ e intensità $I = 1\,\mathrm{mW/m^2}$, si propaga lungo la direzione x ed è polarizzata linearmente lungo la direzione y.

a Determinare le espressioni delle componenti del campo elettrico e del campo di induzione magnetica dell'onda, calcolando esplicitamente i valori delle ampiezze e del periodo temporale dell'onda.

A un dato istante l'onda e.m. investe una particella di massa m e carica $q = +e$:

b al fine di analizzare gli effetti della forza sulla particella carica, calcolare le componenti della forza F_x, F_y e F_z in funzione del tempo e della velocità della particella (v_x, v_y e v_z).

c calcolare la componente x dell'impulso trasferito dall'onda e.m. alla particella, mediato su un periodo dell'onda; commentare il risultato ottenuto.

Soluzione problema 1

a) La carica sul conduttore S_2 genera al suo interno, comprendente S_1, un potenziale pari a quello sulla sua superficie:

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_2}{R_2}$$

la differenza di potenziale tra S_1 e S_2 è quindi determinata solo dalla carica su S_1:

$$\Delta V = V_2 - V_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0}(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}) \approx 899\,\mathrm{V}$$

b) Dopo che S_2 e S_3 sono stati connessi la carica q_2 si ripartisce tra i due in modo che essi siano allo stesso potenziale V'. Dette Q_2 e Q_3 le cariche su di essi, deve essere:

$$Q_2 + Q_3 = q_2$$
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 + Q_2}{R_2}$$
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q_3}{R_3}$$

Risolvendo il sistema si trova:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1+q_2}{R_2+R_3} = 1079\,\mathrm{V} \qquad Q_2 = \frac{R_2q_2 - R_3q_1}{R_2+R_3} \approx 4.4\times 10^{-8}\mathrm{C} \qquad Q_3 = \frac{R_3}{R_2+R_3}(q_2+q_1) \approx 6\times 10^{-9}\mathrm{C}$$

c) I campi elettrici su S_2 e S_3 sono:

$$E_2 = \frac{\sigma_2}{\epsilon_0} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{R_2^2} = \frac{Q_2}{\epsilon_0 4\pi R_2^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1}{R_2^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1+q_2}{R_2(R_2+R_3)} = \frac{V}{R_2} \approx 5395\mathrm{V/m}$$

$$E_3 = \frac{\sigma_3}{\epsilon_0} = \frac{Q_2}{\epsilon_0 4\pi R_2^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1+q_2}{R_3(R_2+R_3)} = \frac{V}{R_3} \approx 21580\mathrm{V/m}$$

d) Conviene vedere in sistema come l'insieme di tre condensatori con armature: $S_1 - S_2$, $S_2 - \infty$, $S_3 - \infty$.
La differenza di potenziale tra S_1 e S_2 dopo il collegamento non varia. La variazione di energia dipende solo dalla variazione di energia elettrostatica esterna:

$$\Delta U = U(S_2-\infty)_{fin} + U(S_3-\infty)_{fin} - U(S_2-\infty)_{in}$$
$$\Delta U = \frac{1}{2}(4\pi\epsilon_0 R_2)V^2 + \frac{1}{2}(4\pi\epsilon_0 R_3)V^2 - \frac{1}{2}(4\pi\epsilon_0 R_2)V_{2in}^2 =$$
$$\Delta U = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(q_1+q_2)^2}{R_2+R_3} - \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{(q_1+q_2)^2}{R_2} = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0}\frac{R_3}{R_2(R_2+R_3)}(q_1+q_2)^2 \approx -4\times 10^{-6}\,\mathrm{J}$$

Soluzione problema 2

a)
Il campo magnetico del un dipolo è $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{3\vec{r}(\vec{m}\cdot\vec{r})}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3}\right)$. Nel nostro caso $\vec{m} = (0,0,m)$. Dal momento che l'asse della spira coincide con z solo la componente

$$B_z = \frac{\mu_0 m}{4\pi}\left(\frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right), \tag{1}$$

contribuisce al flusso. Per calcolare il flusso è conveniente utilizzare coordinate polari (ρ,θ) sulla spira

$$\Phi(z) = \int d\vec{S}\cdot\vec{B} = \int dSB_z = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a d\rho\rho\frac{\mu_0 m}{4\pi}\left(\frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right) \tag{2}$$

dove $r = \sqrt{z^2+\rho^2}$. Calcolando l'integrale risulta

$$\Phi(z) = \frac{\mu_0 m}{2}\frac{a^2}{(a^2+z^2)^{3/2}}\,. \tag{3}$$

Quando la spira si trova a $z_0 = 2\,\mathrm{m}$, $\Phi(z_0) \approx 1.96\times 10^{-12}$ Tesla m^2.
Notiamo che la stessa soluzione la si poteva anche ottenere descrivendo il dipolo come una piccola spira di superficie S percorsa dalla corrente $I_d = m/S$, e sfruttando la simmetria dei coefficienti di mutua induzione tra spira e dipolo.

b)
Detta $f_{em} = -\dot{\Phi}$ la forza elettromotrice indotta, la corrente sarà $I = f_{em}/R$. Dal momento che $z = vt$, otteniamo

$$I = \frac{3\mu_0 m a^2 t v^2}{2R\left(a^2 + t^2 v^2\right)^{5/2}} \,. \tag{4}$$

Come previsto, la corrente decresce all'aumentare del tempo. Inoltre, la corrente è massima a $t = a/(2v) = 0.05\,\mathrm{s}$. Al tempo $t_0 = 0.1\,\mathrm{s}$, $I \approx 8.3 \times 10^{-9}\,\mathrm{A}$.

c)
La forza esercitata sulla spira è uguale ed opposta a quella esercitata sul dipolo dal campo generato della spira. Sapendo che la componente z di quest ultimo vale

$$B_z^{\mathrm{spira}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I\pi a^2}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \tag{5}$$

otteniamo

$$\vec{F} = -\nabla(\vec{m} \cdot \vec{B}^{\mathrm{spira}}) = -m\frac{dB_z^{\mathrm{spira}}}{dz} = \frac{9\mu_0^2 m^2 a^4 t^2 v^3}{4R\left(a^2 + t^2 v^2\right)^5} \,. \tag{6}$$

La stessa soluzione poteva essere ottenuta in modo più semplice osservando che sulla spira deve agire una opportuna forza esterna per mantenerne la velocità costante e compensare la dissipazione di energia per effetto Joule. Eguagliando la potenza meccanica dovuta alla forza che agisce sulla spira con la potenza dissipata per effetto Joule, pari a RI^2, avremo: $Fv = RI^2 \longrightarrow F = \frac{RI^2}{v}$. A $t = t_0 = 0.1\,\mathrm{s}$ tale forza vale $F(t_0) \approx 6.9 \times 10^{-16}\,\mathrm{N}$.

Soluzione problema 3

a)
Note la lunghezza d'onda dell'onda elettromagnetica e la velocità di propagazione (c) avremo:

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{\lambda}{c} = 3.3\,10^{-9}\,\mathrm{s}, \\ k &= \tfrac{2\pi}{\lambda} = 6.28\,\mathrm{m}^{-1}, \\ \omega &= \tfrac{2\pi}{T} = \tfrac{2\pi c}{\lambda} = kc = 1.9\,10^9\,\mathrm{rad/s}. \end{aligned}$$

L'onda e.m. si propaga nella direzione x, mentre il campo elettrico $\mathbf{E}$ è diretto nella direzione y, di conseguenza il campo di induzione magnetica $\mathbf{B}$ sarà diretto nella direzione z in modo tale che $\mathbf{E} = \mathbf{B} \times \mathbf{v}$. Le espressioni delle componenti di $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ saranno:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= E_y\hat{y} = E_0 cos(kx - \omega t)\hat{y}, \\ \mathbf{B} &= B_z\hat{z} = B_0 cos(kx - \omega t)\hat{z}. \end{aligned}$$

Sfruttando la relazione tra l'intensità dell'onda e E_0 e la relazione tra E_0 e B_0 avremo:

$$\begin{aligned} I &= \tfrac{1}{2}\tfrac{E_0^2}{Z} \longrightarrow E_0 = \sqrt{2ZI} = 0.88\,\mathrm{V/m}, \\ B_0 &= \tfrac{E_0}{c} = 2.9\,10^{-9}\,\mathrm{T}. \end{aligned}$$

b)
La particella sotto l'azione del campo elettrico dell'onda subirà un'accelerazione nella direzione del campo elettrico y. Non appena comincerà a muoversi risentirà anche della forza di Lorentz diretta nella direzione positiva dell'asse x, e appena comincerà a muoversi in tale direzione subirà un ulteriore accelerazione sempre dovuta alla forza di Lorentz nella direzione $-y$:

$$\mathbf{F} = qE_y\hat{y} + qv_yB_z\hat{x} - qv_xB_z\hat{y}.$$

c)
Applicando il teorema dell'impulso e calcolando l'impulso trasferito alla particella in un periodo T dell'onda e.m. avremo:

$$p_x = \int_0^T F_x dt = \int_0^T qv_yB_z dt = \int_0^T qv_y\tfrac{E_y}{c}dt = \tfrac{1}{c}\int_0^T qv_yE_y dt = \tfrac{1}{c}\int_0^T q\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}dt = \tfrac{1}{c}\int_0^T \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}dt = \tfrac{<L>}{c}.$$

avendo indicato con $< L >$ il lavoro medio fatto dalla forza elettrica sulla particella in un periodo dell'onda e.m.