Corso di Elettromagnetismo

Prova scritta : a.a. 2014/15, 1 Febbraio 2016

Proff. S. Giagu, F. Lacava, D. Trevese

Esercizio 1

Una carica elettrica $Q = 2\pi/3\,\mu$C è distribuita su un volume sferico di raggio $R = 1.0\,$m con densità $\rho(r) = \beta r^3$ a simmetria radiale.

a) Determinare il valore della costante β ed il campo elettrico all'interno e all'esterno della distribuzione sferica;

b) Determinare la differenza di energia elettrostatica tra la distribuzione data e quella relativa al caso in cui tutta la carica Q sia distribuita uniformemente sulla superficie della sfera di raggio R;

c) Una particella puntiforme di carica $-Q$ e massa $m = 1.0\,$g viene proiettata radialmente con velocità inziale v_0 dal centro della distribuzione di carica verso l'esterno. Determinare il valore minimo v_0 per il quale la particella raggiunge la distanza $d = 5R$ dal centro della sfera.

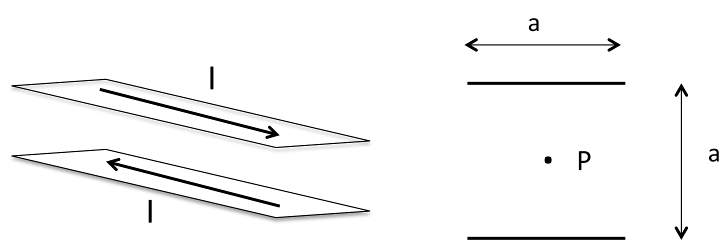
Esercizio 2

Due nastri conduttori paralleli di lunghezza infinita e larghi $a = 4$ cm sono posti a distanza a. I nastri sono percorsi in direzione opposta da una corrente di i =52 A distribuita uniformemente sulla loro sezione. Tra i due nastri si trova una bobina di 100 spire, di raggio r_s, percorsa da una corrente $i_s = 5$ mA.

Si determini:

a) il campo di induzione magnetica nella posizione P centrale tra i nastri indicando modulo, direzione e verso,

b) la posizione di equilibrio della bobina e la frequenza delle piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio approssimando la bobina con un anello di massa $m_s = 5$ g (momento di inerzia $I = m_s r_s^2/2$).



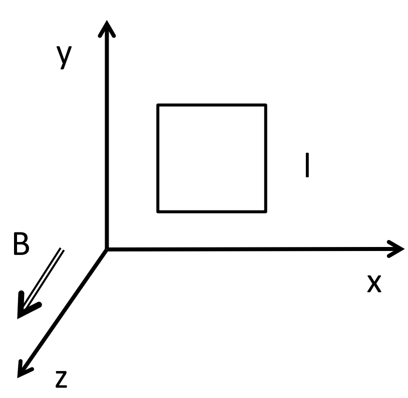
Esercizio 3

Una spira quadrata di lato $l = 10$ cm, resistenza $R = 10\ \Omega$ e massa $m = 10$ g, è posta in un campo magnetico non uniforme, $B = B_0 + by$, diretto lungo l'asse z con $b =\ 1\ Weber/m^3$ (vedi figura). La spira, inizialmente ferma, all'istante $t = 0$ viene lasciata libera e inizia a cadere. Determinare:

a) la corrente nella spira in funzione della velocità,

b) l'equazione del moto;

c) come varia la velocità nel tempo e il suo valore asintotico.



Soluzioni.
Esercizio 1
a)
La carica totale della distribuzione sferica è data da:

$$Q = \int_0^R \rho(r) d\tau = \int_0^R \rho(r) 4\pi r^2 dr = \beta 4\pi \int_0^R r^5 dr = \frac{2\beta\pi R^6}{3}.$$

da cui:

$$\beta = \frac{3Q}{2\pi R^6} = 1.0\,\mu\mathrm{C/m}^6.$$

Il campo elettrico può essere calcolato usando il teorema di Gauss applicato a superfici sferiche di raggio r, per il quale si ottiene:

$$E(r) = \tfrac{Q}{4\pi\epsilon_0}\tfrac{r^4}{R^6} \text{ per } r \le R$$
$$E(r) = \tfrac{Q}{4\pi\epsilon_0}\tfrac{1}{r^2} \text{ per } r > R.$$

b)
Dalla definizione di energia elettrostatica:

$$U = \int u d\tau = \int \frac{\epsilon_0}{2} E^2(r) 4\pi r^2 dr = \int_0^R \frac{\epsilon_0}{2} \frac{Q^2 r^8}{(4\pi)^2 \epsilon_0^2 R^{12}} 4\pi r^2 dr + \int_R^\infty \frac{\epsilon_0}{2} fracQ^2 (4\pi)^2 \epsilon_0^2 r^4 4\pi r^2 dr = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}\left(\frac{1}{11}+1\right).$$

Nel caso in cui la carica Q fosse distribuita solo sulla superficie sferica di raggio R il primo termine dell'integrale precedente risulterebbe nullo, in quanto nullo il campo elettrico all'interno della sfera, mentre il campo all'esterno rimarrebbe invariato, per cui:

$$\Delta U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 11 R} = 1.8\,\mathrm{mJ}.$$

c)
Dalla conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 \ge -Q(V(5R) - V(0)) = -Q\int_{5R}^0 E(r)dr = -Q\left(\int_{5R}^R E(r)dr + \int_R^0 E(r)dr\right) = -\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{1}{R} + \frac{1}{5R} - \frac{1}{5R}\right) = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

per cui:

$$v_0 \ge \sqrt{\frac{Q^2}{2\pi\epsilon_0 R m}} = 8.9\,\mathrm{m/s}.$$

Esercizio 2
Consideriamo il contributo al campo B_1 in P da un tratto dl_1 dove scorre una corrente $di = i dl_1/a$ come in figura:

$$dB_1 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{di}{r}$$

A questo contributo si associa quello del tratto dl_2 del nastro inferiore. Le componenti verticali sono opposte e quelle orizzontali si sommano. Per trovare il campo totale interessa sommare le sole componenti orizzontali:

$$dB_{1or} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{di}{r} cos\alpha = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{a}\frac{dl}{r} cos\alpha$$

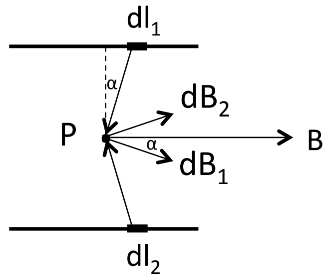
Da

$$l = \frac{a}{2} tg\alpha \qquad dl = \frac{a}{2}\frac{d\alpha}{cos^2\alpha} \qquad r = \frac{a}{2}\frac{1}{cos\alpha}$$

$$B_{1or} = \int_{-\alpha/4}^{\alpha/4} dB_{1or} = \int_{-\alpha/4}^{\alpha/4} \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{a} d\alpha = \frac{\mu_0 i}{4a}$$

Sommando i contributi dei due nastri si ottiene:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2a} = 8.2\ 10^{-4}\ Tesla$$



parallelo ai nastri e orientato come in figura.

La spira ha momento magnetico $m = \pi r_s^2 N i_s$ e momento d'inerzia $I = m_s r_s^2/2$ ed è in equilibrio quando è orientata lungo B. L'equazione del moto è determinata dal momento agente su di essa $\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$:

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mBsen\theta \simeq -mB\theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\mu_0\frac{\pi N i_s}{m_s} i\ \theta$$

La frequenza delle piccole oscillazioni è:

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\mu_0\frac{\pi N i_s}{m_s}\frac{i}{a}} = 11.4 \cdot 10^{-2}\ Hz$$

Esercizio 3

Detta y la coordinata del lato inferiore, il flusso concatenato con la spira è:

$$\Phi(y) = \int_y^{y+l}(B_0 + by)l dy = \left[B_0 l y + \frac{1}{2}b l y^2\right]_y^{y+l} = B_0 l^2 + \frac{1}{2}b l^3 + b l^2 y$$

la corrente nella spira è:

$$i = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{bl^2}{R}\dot{y} = -\frac{bl^2}{R}v_y$$

Le forze sui lati verticali sono uguali ed opposte. Sul lato orizzontale più alto agisce la forza $F_y = il[B_0 + b(y+l)]$ e su quello in basso $F_y = -il[B_0 + by]$ con i generica orientata secondo il disegno (positiva se oraria per $\hat{z}$). La forza totale è quindi:

$$F_y = ibl^2 = -\frac{l^4 b^2}{R}v_y$$

L'equazione del moto è:

$$m\frac{dv_y}{dt} = -mg - \frac{l^4 b^2}{R}v_y$$

che si integra per separazione di variabili:

$$\frac{dv_y}{g + Av_y} = -dt \qquad A = \frac{l^4 b^2}{mR}$$

$$v_y = \frac{gmR}{l^4 b^2}\left(e^{-At} - 1\right)$$

La velocità asintotica è:

$$v_{ylim} = -\frac{gmR}{l^4 b^2} = -9.8 \cdot 10^3\ m/s$$

come si trova anche dall'equazione del moto prima di integrare.