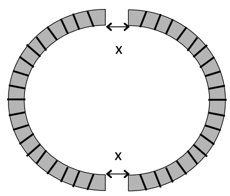
Compito scritto di Elettromagnetismo del 20 - 9 - 2016.
Tempo a disposizione: 4 ore.

Problema 1
Un sistema è composto da quattro cariche puntiformi: q nel punto di coordinate cartesiane $(0, a, 0)$, q nel punto $(a, 0, 0)$, $-q$ nel punto $(0, -a, 0)$, $-q$ nel punto $(-a, 0, 0)$, dove $a = 2$ cm e $q = 1$ nC.
Si calcolino:
a) il momento di dipolo del sistema di cariche (modulo e componenti);
b) il potenziale generato dal sistema delle quattro cariche in un punto generico P(x, y, z) a distanza grande rispetto ad a e si diano i suoi valori in un punto sull'asse z e nel punto P' di coordinate $(10a, 0, 0)$;
c) il campo elettrico in un punto lungo l'asse z a distanza $z = 10a$.

Problema 2
Un toro di ferro di permeabilità magnetica relativa $\mu_r = 1000$, sezione $S = 10$ cm^2 e lunghezza media $2l = 1.5$ m, è diviso in due semitori uguali inizialmente in contatto. Su ogni semitoro sono avvolte 500 spire percorse da una corrente costante $i = 10$ A. I due semitori possono essere allontanati e mantenuti in posizione tale da formare due traferri di spessore x.
Trascurando il flusso disperso, si calcolino:
a) l'intensità del campo B tra le espansioni in funzione di x;
b) la forza che è necessario applicare ai due semitori in funzione della distanza x tra le loro espansioni;
c) il lavoro per allontanare i semitori di una distanza d =10 cm partendo dalla configurazione in cui sono a contatto;
d) la variazione di energia magnetica tra la situazione iniziale ($x = 0$) e quella finale ($x = d$).



Problema 3
Una bobina di sezione trascurabile, composta da $N = 100$ spire di raggio $b =$ 15 cm, è posta nel piano xy e il suo asse coincide con l'asse z. Una piccola spira di raggio $a = 1$ cm e di resistenza $R = 1$ Ω, avente l'asse coincidente con l'asse della bobina, è posta in posizione z. Al tempo $t = 0$ nella bobina viene fatta scorrere una corrente $I = \alpha t$ con $\alpha = 0.5$ A/s.
Si determini:
a) il campo magnetico in funzione del tempo lungo l'asse della bobina nella posizione z;
b) il momento magnetico della piccola spira in funzione del tempo t;
c) la forza (modulo, direzione e verso) che si deve applicare dall'esterno per tenere ferma la spira nella posizione $z = 30$ cm al tempo $t = 10$ s.

Soluzione 1

a) Il momento di dipolo ha componenti:

$$p_x = \sum_1^4 q_i x_i = 2qa \qquad p_y = \sum_1^4 q_i y_i = 2qa \qquad p_z = \sum_1^4 q_i z_i = 0$$

e modulo $p = \sqrt{(p_x^2 + p_y^2)} = 2\sqrt{2}qa = 5.66 \cdot 10^{-11}$ Cm
b) Il potenziale in un punto di coordinate (x,y,z) è:

$$V(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{p_x x + p_y y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad .$$

Sull'asse z il potenziale è nullo mentre nel punto P' vale:

$$V(10a,0,0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2aq\cdot 10a}{(10a)^3} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{q}{100a} = 8.99\ V$$

c) Le componenti del campo elettrico sono:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{2aq}{4\pi\epsilon_0}\frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - 3x(x+y)(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2)^3}$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{2aq}{4\pi\epsilon_0}\frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} - 3y(x+y)(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}{(x^2+y^2+z^2)^3}$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{2aq}{4\pi\epsilon_0}\frac{3z(x+y)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}$$

che nel punto sull'asse z a $z = 10a$ valgono:

$$E_x = -\frac{aq}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{z^3} = -44.9\ V/m \qquad E_y = -\frac{aq}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{z^3} = -44.9\ V/m \qquad E_z = 0$$

Soluzione 2

a) Dalla legge di Hopkinson: $2Ni = \Re BS$ con $N = 500$, dove la riluttanza $\Re$ del circuito magnetico è:

$$\Re = \frac{2l}{\mu_r\mu_o S} + \frac{2x}{\mu_o S} = \frac{2(l+\mu_r x)}{\mu S}$$

segue:

$$B = \frac{\mu N i}{l + \mu_r x}$$

b) Trascurando il flusso disperso, l'energia magnetica del circuito è:

$$U_m = 2lS\cdot\frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu} + 2xS\cdot\frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} = \frac{SB^2}{\mu}(l+\mu_r x) = \frac{S\mu N^2 i^2}{(l+\mu_r x)}$$

e la forza magnetica attrattiva tra le espansioni polari è:

$$F_m = \frac{dU_m}{dx}|_{i=cost} = -\frac{S\mu N^2 i^2}{(l+\mu_r x)^2}\mu_r$$

Per tenere i due semitori distanziati a distanza x è necessario applicare una forza opposta $F_{ext} = -F_m$.
c) Per allontanare i due semitori la forza esterna compie un lavoro:

$$L_{est} = \int_0^d F_{est} \cdot dx = S\mu N^2 i^2 \left[\frac{1}{l} - \frac{1}{l+\mu_r d}\right] = 38.9\ J$$

d) La variazione di energia magnetica U_m è:

$$\Delta U_m = \frac{S\mu N^2 i^2}{(l)} - \frac{S\mu N^2 i^2}{(l+\mu_r d)} = S\mu N^2 i^2 \left[\frac{1}{l+\mu_r d} - \frac{1}{l}\right] = -L_{est}$$

Si può osservare che il lavoro L_{gen} fatto dal generatore che fornisce la corrente è tale che:

$$L_{gen} + L_{est} = \Delta U_m \qquad L_{gen} = -L_{est} + \Delta U_m \qquad L_{gen} = 2\Delta U_m = -77.9\ J$$

Il generatore assorbe un'energia pari al lavoro esterno più la diminuzione di energia magnetica.

Soluzione 3

a) Il campo magnetico B lungo l'asse z ha non nulla la sola componente B_z che in funzione del tempo è:

$$B_z(z,t) = \frac{\mu_0}{2}\frac{Nb^2\alpha t}{(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

(vedi libri di testo).
b) Il flusso concatenato con la piccola spira centrata sull'asse z è approssimabile con:

$$\Phi(B) = \pi a^2 B_z = \frac{\mu_0}{2}\frac{N\pi a^2 b^2 \alpha t}{(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

e per la legge di Faraday-Neumann la spira è percorsa da una corrente:

$$i = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{R}\frac{\mu_0}{2}\frac{N\pi a^2 b^2 \alpha}{(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

che conferisce alla piccola spira un momento magnetico:

$$m_z = \pi a^2 i = -\frac{1}{R}\frac{\mu_0}{2}\frac{N(\pi a^2)^2 b^2 \alpha}{(b^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

che risulta costante nel tempo.
c) La forza dovuta al campo B agente sulla piccola spira è:

$$\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{m}\cdot\vec{B}) = \vec{\nabla}\left(-\frac{1}{R}\frac{\mu_0^2}{4}\frac{N^2(\pi a^2 b^2)^2 \alpha^2 t}{(b^2+z^2)^3}\right)$$

che per simmetria ha non nulla la sola componente z:

$$F_z = \frac{3\mu_0^2}{2R} \frac{N^2(\pi a^2 b^2)^2 \alpha^2 t}{(b^2 + z^2)^4} z$$

Questa tende ad allontanare la piccola spira dalla bobina (legge di Lenz) e per tenerla ferma è necessario applicare una forza esterna opposta $F_{est} = -F_z$ con modulo $|F_{est}| = 5.5 \cdot 10^{-13}\ N$