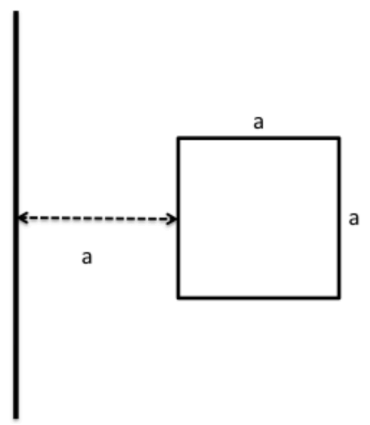
7.5 Sapienza Elettromagnetismo 10/07/2014

Una spira conduttrice rigida ha forma di un quadrato di lato $a = 0.1$ m ed è fissata su di un piano orizzontale. Ciascun lato della spira ha una resistenza elettrica pari a $R = 0.3\ \Omega$. Un lato della spira è parallelo ad un filo conduttore indefinito appoggiato sul piano orizzontale ed è posto a distanza a dal filo stesso. In questo filo scorre una corrente sinusoidale di frequenza pari a $\nu = 50$ Hz ed ampiezza $I_0 = 4.1$ A. Trascurando l'autoinduzione della spira, si calcoli:

a. il coefficiente di mutua induzione tra il filo e la spira;

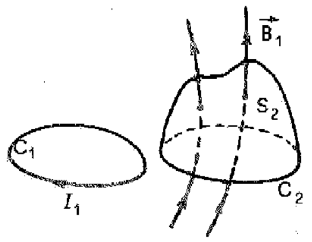
b. l'ampiezza della corrente elettrica sinusoidale $I_i(t)$ indotta nella spira;

c. il valore efficace della risultante delle forze agente sulla spira e la sua direzione.



a) coefficiente mutua induzione

Se consideriamo due circuiti C_1 e C_2 e uno dei due, ad esempio C_1, sia percorso da corrente $I_1(t)$, allora esso genera nello spazio circostante un campo di induzione magnetica $\vec{B_1}(t)$ che per la legge di Biot e Savart è proporzionale a $\vec{I_1}(t)$. Allora anche il flusso di $\vec{B_1}(t)$ concatenato con C_2 è proporzionale a $\vec{I_1}(t)$.



$$\vec{B}_0(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{l'} I \frac{\vec{dl} \times \Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|^3} \qquad \vec{B} \propto I$$
$$\Phi(\vec{B}) = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \qquad \Phi(\vec{B}) \propto I$$

Chiamiamo coefficiente di mutua induzione M_{21} la costante di proporzionalità del flusso di $\vec{B}_1$ concatenato con C_2.

$$\Phi_2(\vec{B}_1) = M_{21} I_1 \leftrightarrow M_{21} = \frac{\Phi_2(\vec{B}_1)}{I_1}$$

Analogamente se C_2 è percorso da corrente I_2. Dunque

$$\Phi_2(\vec{B}_1) = M_{21} I_1 \leftrightarrow M_{21} = \frac{\Phi_2(\vec{B}_1)}{I_1} \qquad M_{21} = M_{12}$$
$$\Phi_1(\vec{B}_2) = M_{12} I_2 \leftrightarrow M_{12} = \frac{\Phi_1(\vec{B}_2)}{I_2} \qquad M_{12} = M_{21}$$

da cui il nome coeffciente di *mutua* induzione, per la simmetria del fenomeno nei due circuiti.

Calcoliamo dunque:

- il campo di induzione magnetica del filo conduttore $\vec{B}_1$;
- il flusso del campo di induzione magnetica $\Phi_2(\vec{B}_1)$ concatenato con la spira;
- il coefficiente di mutua induzione $M_{21} = \frac{\Phi_2(\vec{B}_1)}{I_1}$

Nel caso del nostro problema, scegliamo un sistema di riferimento in cui l'asse y sia coincidente con il filo e l'asse x divida in due segmenti uguali i lati del quadrato paralleli al filo.

Il campo di induzione magnetica $\vec{B}(t)$, generato dal filo percorso da una corrente $I(t) = I_0 \sin(2\pi\nu t)$ è data dalla formula di Biot e Savart

$$B_0(r) = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi x}\hat{t} = \frac{\mu_0 I_0 \sin(2\pi\nu t)}{2\pi x}\hat{t}$$

dove $\hat{t}$ è il versore perpendicolare alla superficie della spira ed x (altre volte chiamato r) è la variabile che individua la distanza tra il punto in cui si calcola il campo ed il filo.
Per la simmetria cilindrica della configurazione, le linee di forza di $\vec{B}_0$ sono circonferenze disposte su piani π perpendicolari al filo e centrate sul filo stesso. Il verso di $\vec{B}_0$ è antiorario rispetto alla corrente e si può ricavare con la regola della mano destra: se si dispone il pollice concordemente alla corrente, il senso di avvolgimento di $\vec{B}_0$ è concorde a quello delle altre dita piegate.

Il flusso di $\vec{B}$, concatenato con la spira, si ottiene calcolando l'integrale di superficie

$$\begin{aligned}
\Phi(\vec{B}) = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} &= \int\int \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi x} dx dy \\
&= \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi} \int_{a/2}^{a/2} dy \int_a^{2a} \frac{1}{x} dx \\
&= \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi} \underbrace{\int_{a/2}^{a/2} dy}_{a} \underbrace{\int_a^{2a} \frac{1}{x} dx}_{\ln(2a/a)} \\
&= \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi} a \ln(2)
\end{aligned}$$

Il coefficiente di mutua induzione è

$$M = \frac{\Phi(\vec{B})}{I} = \frac{\mu_0}{2\pi} a \ln(2) = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot 0.1\mathrm{m} \cdot \ln(2) = 1.4 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{H}$$

(Henry è l'unità di misura dell'induttanza nel SI , $\mathrm{H} = \Omega \cdot s$)

b) ampiezza corrente indotta nella spira

Se dunque $I_1 = I_1(t)$ varia nel tempo, nel circuito C_2 si genera per conseguenza una forza elettromotrice indotta data da

$$f_{2m} = -\frac{d\Phi_2(\vec{B}_1)}{dt} = -M_{21}\frac{dI_1}{dt}$$

per la legge di Faraday-Neumann:
se un circuito è immerso in un campo di induzione magnetica il cui flusso concatenato col circuito stesso sia variabile nel tempo, allora in esso si genera una forza elettromotrice indotta.

La spira quadrata ha resistenza totale $R_{TOT} = 4R$, per cui la corrente indotta è

$$\begin{aligned} I_i(t) = \frac{f_{em}}{4R} = -\frac{1}{4R}\frac{d\Phi_2(\vec{B}_1)}{dt} &= -\frac{1}{4R}\frac{d}{dt}\Big(\frac{\mu_0 I_0 \sin(2\pi\nu t)}{2\pi} a\ln(2)\Big) \\ &= -\frac{1}{4R}\frac{\mu_0 I_0}{2\pi} a\ln(2) 2\pi\nu\cos(2\pi\nu t) \\ &= -\underbrace{\frac{\mu_0 I_0}{4R} a\ln(2)\nu}_{I_i^0}\cos(2\pi\nu t) \end{aligned}$$

L'ampiezza della corrente indotta è

$$I_i^0 = \frac{\mu_0 I_0}{4R} a\ln(2)\nu = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\frac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}\cdot 4.1\mathrm{A}\cdot 0.1\mathrm{m}\cdot \ln(2)\cdot 50\mathrm{Hz}}{4\cdot 0.3\Omega} = 15\ \mu\mathrm{A}$$

c1) modulo e direzione della risultante forze agenti sulla spira

La risultante delle forze di origine magnetica che agisce sulla spira si ottiene sommando vettorialmente i contributi delle risultanti delle forze agenti su ciascun lato del quadrato.

- sui due lati normali al filo (ovvero paralleli all'asse x), agiscono due forze uguali e contrarie dirette parallelamente al filo che tendono a deformare la spira e hanno risultante nulla (solo componenti y diverse da zero che sono uguali ed opposte);

- sui due lati paralleli al filo (ovvero paralleli all'asse y), sono perpendicolari al filo (ovvero paralleli all'asse x) ed hanno segno opposto (il verso di scorrimento della corrente, quando in un lato della bobina è concorde con il verso di I, sul lato opposto è discorde)

Su un tratto di filo l, percorso dalla corrente I, agisce una forza

$$F = I\vec{l} \times \vec{B}$$

$\vec{l}$ ha direzione parallela al verso della corrente, e modulo uguale alla lunghezza l del filo.

Il lato lungo della spira più vicino al filo è attirato verso questo da una forza:

$$F_{\parallel}^{+} = +aIB(x = a) = aI_{spira}\frac{\mu_0 I_{filo}}{2\pi(a)} = \frac{\mu_0 I_{spira}(t) I_{filo}(t)}{2\pi}$$

mentre il lato della spira distante dal filo è respinto dalla forza:

$$F_{\parallel}^{-} = -aIB(x = 2a) = -aI_{spira}\frac{\mu_0 I_{filo}}{2\pi(2a)} = -\frac{\mu_0 I_{spira}(t) I_{filo}(t)}{4\pi}$$

La risultante delle forze agenti sulla spira è dunque diretta verso il filo parallelamente all'asse x e vale

$$\begin{aligned}
F_{TOT} = F_{\parallel}^{-} + F_{\parallel}^{-} &= aI_{spira}(t)\frac{\mu_0 I_{filo}(t)}{2\pi}\Big(\frac{1}{a} - \frac{1}{2a}\Big) \\
&= \frac{\mu_0 I_{spira}(t) I_{filo}(t)}{4\pi} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\underbrace{\frac{\mu_0 I_0}{4R} a\ln(2)\nu\cos(2\pi\nu t)}_{I_{spira}}\underbrace{I_0\sin(2\pi\nu t)}_{I_{filo}} \\
&= \frac{\mu_0^2\ln(2)a\nu}{16\pi R} I_0^2\cos(2\pi\nu t)\sin(2\pi\nu t) \\
&= \frac{\mu_0^2\ln(2)a\nu}{32\pi R} I_0^2\sin(4\pi\nu t)
\end{aligned}$$

avendo sostituito le espressioni trovate per $I_{spira}(t) = I_i(t)$, corrente indotta nella spira, e $I_{filo}(t) = I(t)$, corrente sinusoidale del filo e la formula di duplicazione del seno $\sin(2\alpha) = 2\cos(\alpha)\sin(\alpha)$.

c2) valore efficace della risultante delle forze agenti sulla spira

In teoria dei segnali il valore efficace di una funzione periodica è il valore che avrebbe un segnale costante di pari potenza media

$$\langle P \rangle = V_{RMS} I_{RMS}$$

Il valore efficace di una funzione continua $x(t)$ è la radice della media del quadrato (valore quadratico medio, root mean square RMS) sul periodo della funzione stessa. Discorso analogo per un segnale discreto x_i

$$x_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T [x(t)^2]dt} \qquad \text{segnale continuo}$$

$$x_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{N} x_i^2} \qquad \text{segnale discereto}$$

Per segnali sinusoidali $v(t) = V_{max}\sin(\omega t)$ il valore efficace è $\frac{1}{\sqrt{2}}V_{max}$.

$$V_{RMS} = \sqrt{\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{\omega}{2\pi}} [V_{max}\sin(\omega t)]^2 dt} = \sqrt{\frac{V_{max}^2}{2}} = \frac{V_{max}}{\sqrt{2}}$$

Esiste un valore efficace della corrente I_{eff} per cui la potenza dissipata in un circuito a corrente alternata è lo stesso che nel caso di corrente continua, $P_{eff} = RI_{eff}^2$. Per la corrente sinusoidale vale $I_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}}I_0$ e analogamente per la f.e.m. vale $V_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}}V_0$.

Dunque il valore efficace della forza vale

$$F_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}}F_{max} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\mu_0^2 \ln(2) a\nu}{32\pi R}I_0^2 = 2.1 \cdot 10 \text{ N}$$