Note su Funzioni di distribuzione:

-1- Bernoulli

-2- Poisson

-3- Gauss

-4- Uniforme

BERNOULLI

Distribuzione binomiale

- ripeto un esperimento, una prova, per N volte
- l'esito di ciascun esperimento è **dicotomico** : successo o fallimento
- probabilità di successo in una singola prova : p
  ..... la probabilità di insuccesso in una singola prova è $q = 1 - p$
- probabilità di n successi in N prove ripetute ($0 \leq n \leq N$) indipendentemente dall'ordine

$$\boxed{P(n, N) = \frac{N!}{n!(N-n)!} \cdot p^n \cdot q^{N-n}}$$

→ $\sum_{n=0}^{N} P(n, N) = 1$

→ $\langle n \rangle \equiv \sum_{n=0}^{N} n \cdot P(n,N) = N \cdot p$

→ $\sigma \equiv \sqrt{\sum_{0}^{N} {}_n (n - \langle n \rangle)^2 \cdot P(n,N)} = \sqrt{Npq}$

→ valore più probabile di $n \overset{?}{=} \langle n \rangle$ solo per $p = \frac{1}{2}$

Probabilità che su N = 10 prove si ottengano 0 < n < 10 successi per diversi valori della probabilità di successo 0 < p < 1 con passo 0.1

$$P(n,N) = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{(N-n)}$$

Page #1 - "Data_Binomiale_17ott2001" Wednesday, October 17 5:30 PM 2001

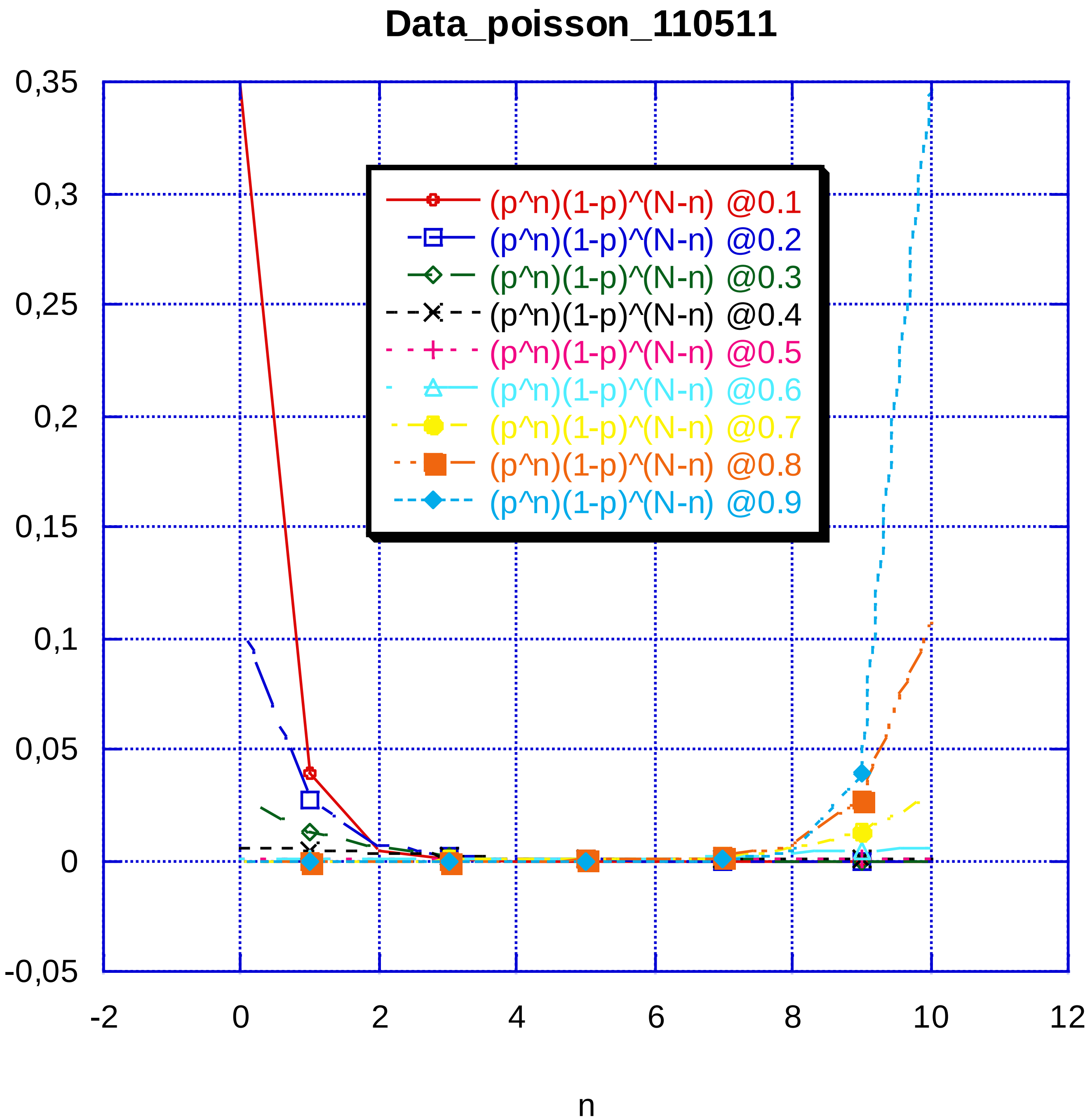
	n	{N!/[n!*(N-n)!]}	P_@p=0.1	P_@p=0.2	P_@p=0.3	P_@p=0.4	P_@p=0.5	P_@p=0.6	P_@p=0.7	P_@p=0.8	P_@p=0.9	P_@p=0	P_@p=1
0	0.0000	1.0000	0.34868	0.10737	0.028248	0.0060466	0.00097656	0.00010486	5.9049e-06	1.0240e-07	1.0000e-10	1.0000	0.0000
1	1.0000	10.000	0.38742	0.26844	0.12106	0.040311	0.0097656	0.0015729	0.00013778	4.0960e-06	9.0000e-09	0.0000	0.0000
2	2.0000	45.000	0.19371	0.30199	0.23347	0.12093	0.043945	0.010617	0.0014467	7.3728e-05	3.6450e-07	0.0000	0.0000
3	3.0000	120.00	0.057396	0.20133	0.26683	0.21499	0.11719	0.042467	0.0090017	0.00078643	8.7480e-06	0.0000	0.0000
4	4.0000	210.00	0.011160	0.088080	0.20012	0.25082	0.20508	0.11148	0.036757	0.0055050	0.00013778	0.0000	0.0000
5	5.0000	252.00	0.0014880	0.026424	0.10292	0.20066	0.24609	0.20066	0.10292	0.026424	0.0014880	0.0000	0.0000
6	6.0000	210.00	0.00013778	0.0055050	0.036757	0.11148	0.20508	0.25082	0.20012	0.088080	0.011160	0.0000	0.0000
7	7.0000	120.00	8.7480e-06	0.00078643	0.0090017	0.042467	0.11719	0.21499	0.26683	0.20133	0.057396	0.0000	0.0000
8	8.0000	45.000	3.6450e-07	7.3728e-05	0.0014467	0.010617	0.043945	0.12093	0.23347	0.30199	0.19371	0.0000	0.0000
9	9.0000	10.000	9.0000e-09	4.0960e-06	0.00013778	0.0015729	0.0097656	0.040311	0.12106	0.26844	0.38742	0.0000	0.0000
10	10.000	1.0000	1.0000e-10	1.0240e-07	5.9049e-06	0.00010486	0.00097656	0.0060466	0.028248	0.10737	0.34868	0.0000	1.0000

$\langle n \rangle = N\,p$:
$\sigma(n) = (N\,p\,q)^{1/2}$:

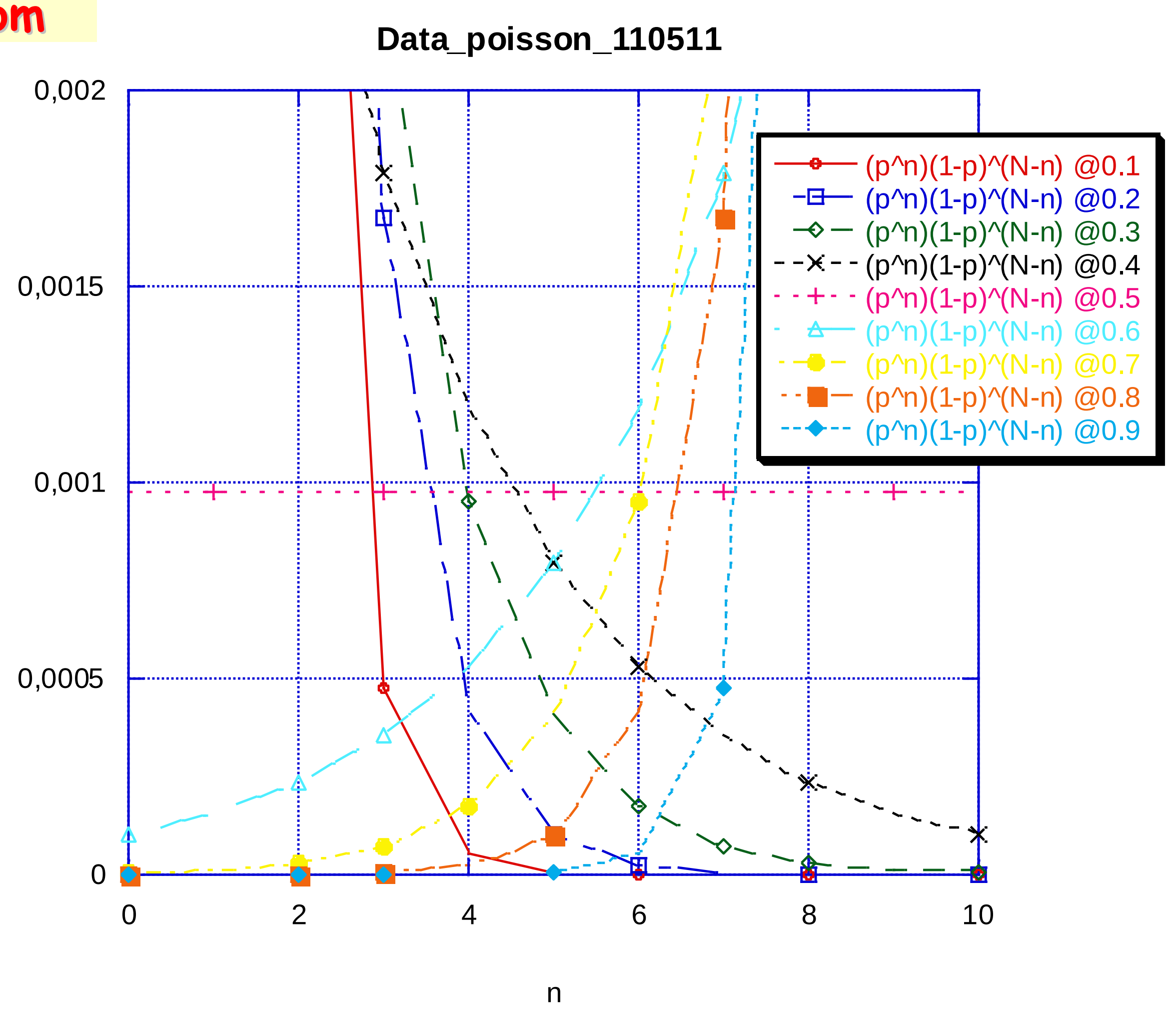
$\langle n \rangle = 1.00$ $\sigma_n = 0.95$

$\langle n \rangle = 5.0$ $\sigma_n = 1.6$

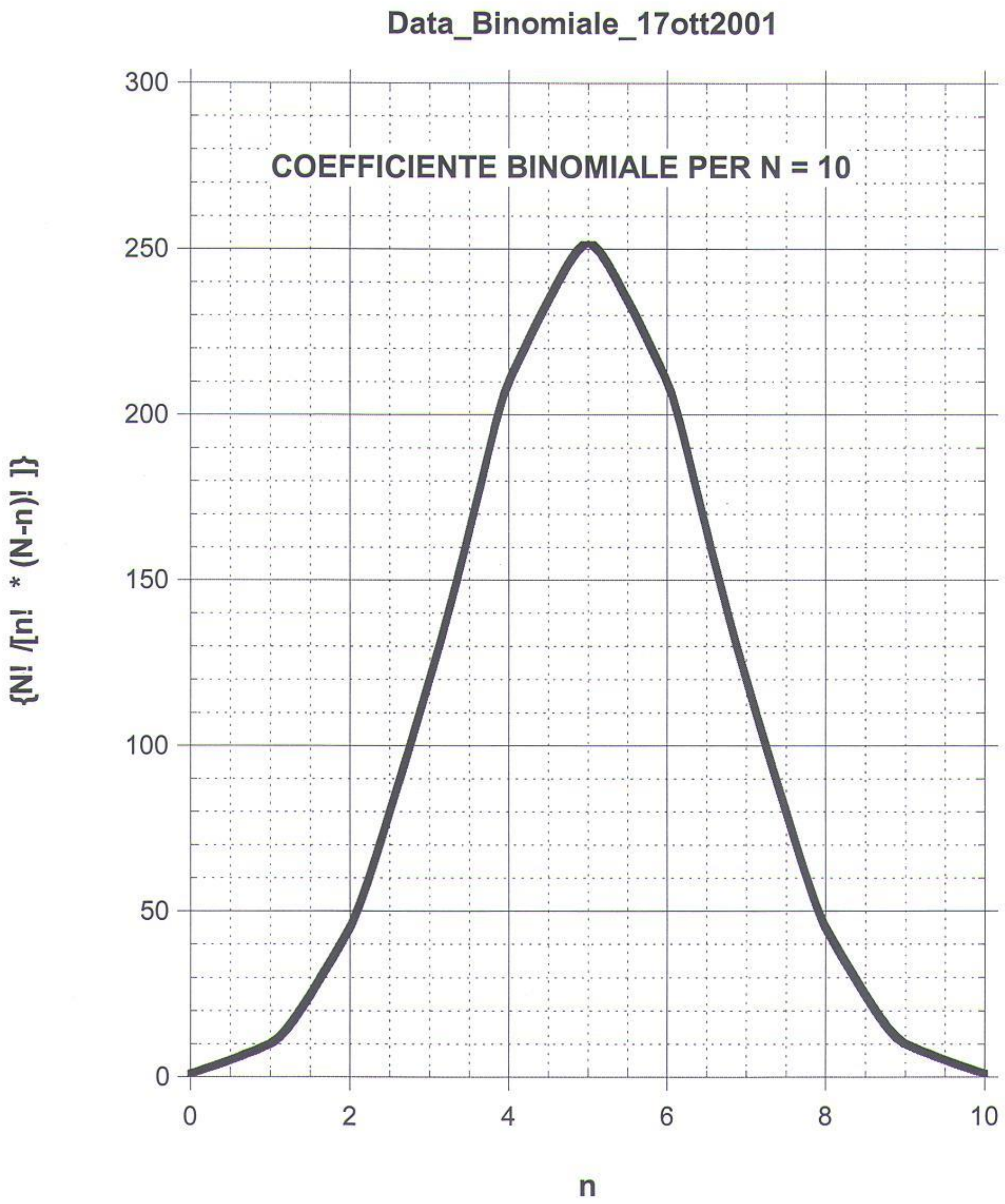
$\langle n \rangle = 9.00$ $\sigma_n = 0.95$

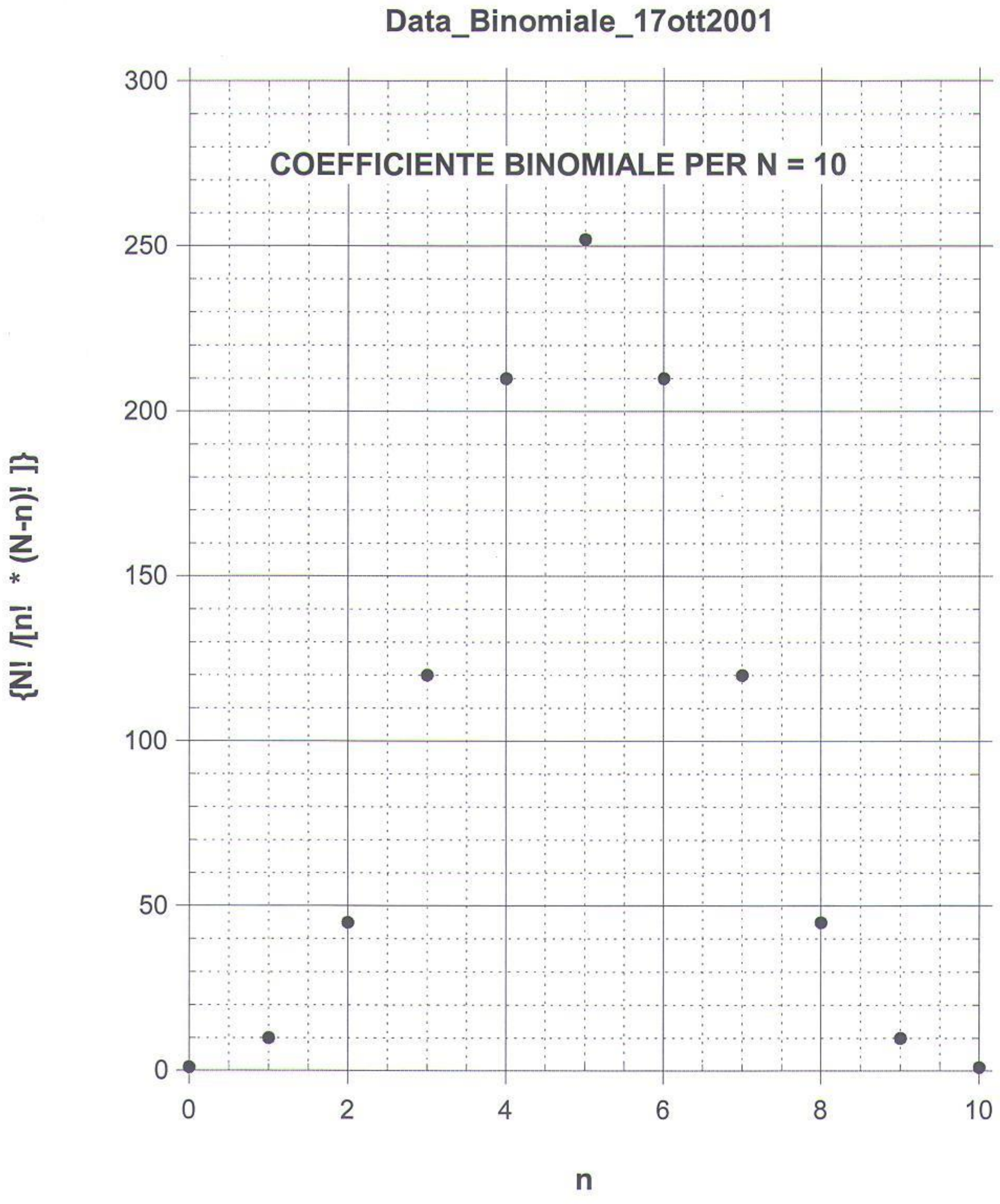

Data_poisson_110511
0,35
0,3
0,25
0,2
0,15
0,1
0,05
0
-0,05
-2
0
2
4
6
8
10
12
n
(p^n)(1-p)^(N-n) @0.1
(p^n)(1-p)^(N-n) @0.2
(p^n)(1-p)^(N-n) @0.3
(p^n)(1-p)^(N-n) @0.4
(p^n)(1-p)^(N-n) @0.5
(p^n)(1-p)^(N-n) @0.6
(p^n)(1-p)^(N-n) @0.7
(p^n)(1-p)^(N-n) @0.8
(p^n)(1-p)^(N-n) @0.9

zoom

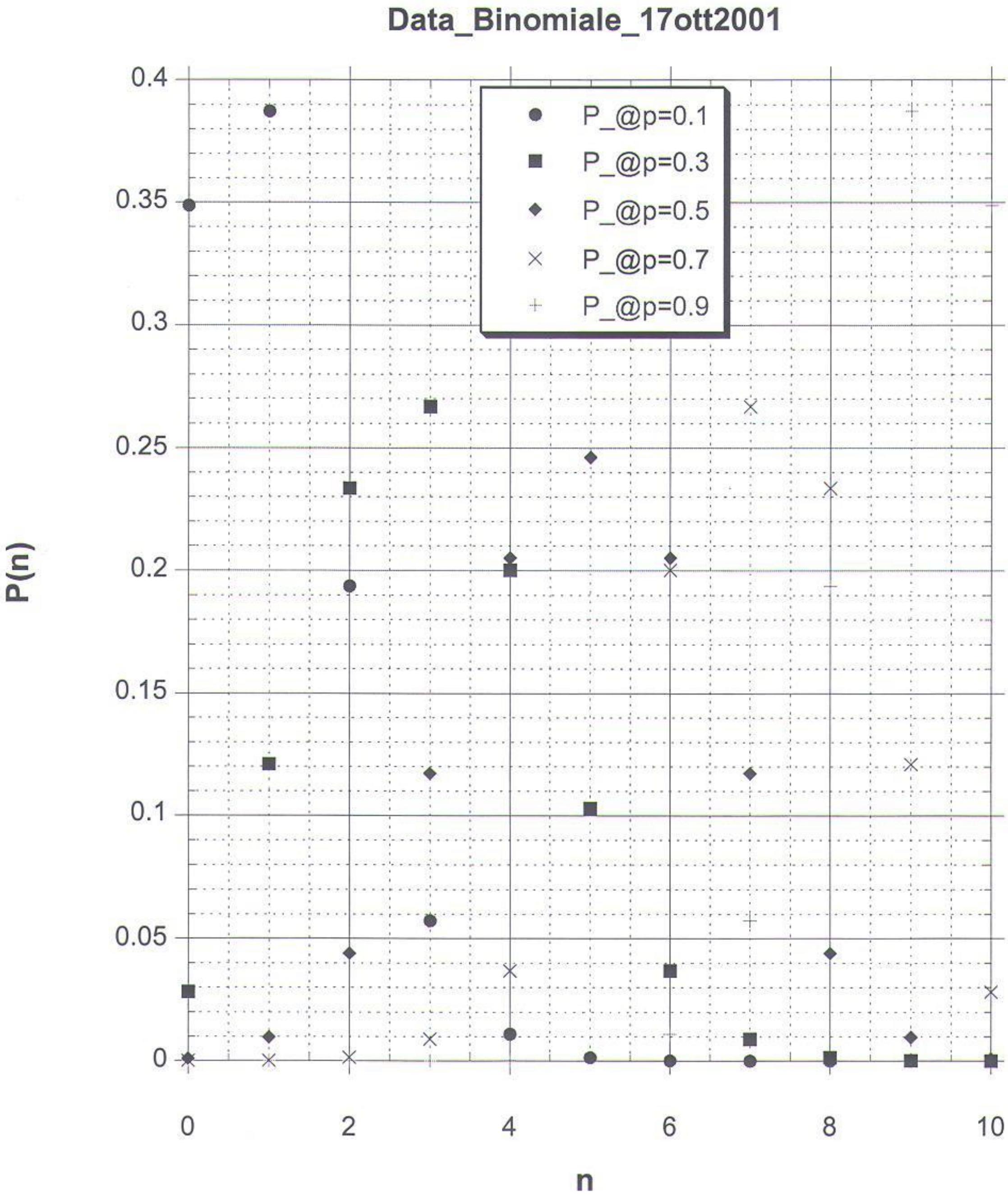

Data_poisson_110511
0,002
0,0015
0,001
0,0005
0
0
2
4
6
8
10
n
(p^n)(1-p)^(N-n) @0.1
(p^n)(1-p)^(N-n) @0.2
(p^n)(1-p)^(N-n) @0.3
(p^n)(1-p)^(N-n) @0.4
(p^n)(1-p)^(N-n) @0.5
(p^n)(1-p)^(N-n) @0.6
(p^n)(1-p)^(N-n) @0.7
(p^n)(1-p)^(N-n) @0.8
(p^n)(1-p)^(N-n) @0.9

$$\binom{N}{m} = \frac{N!}{m! \cdot (N-m)!}$$

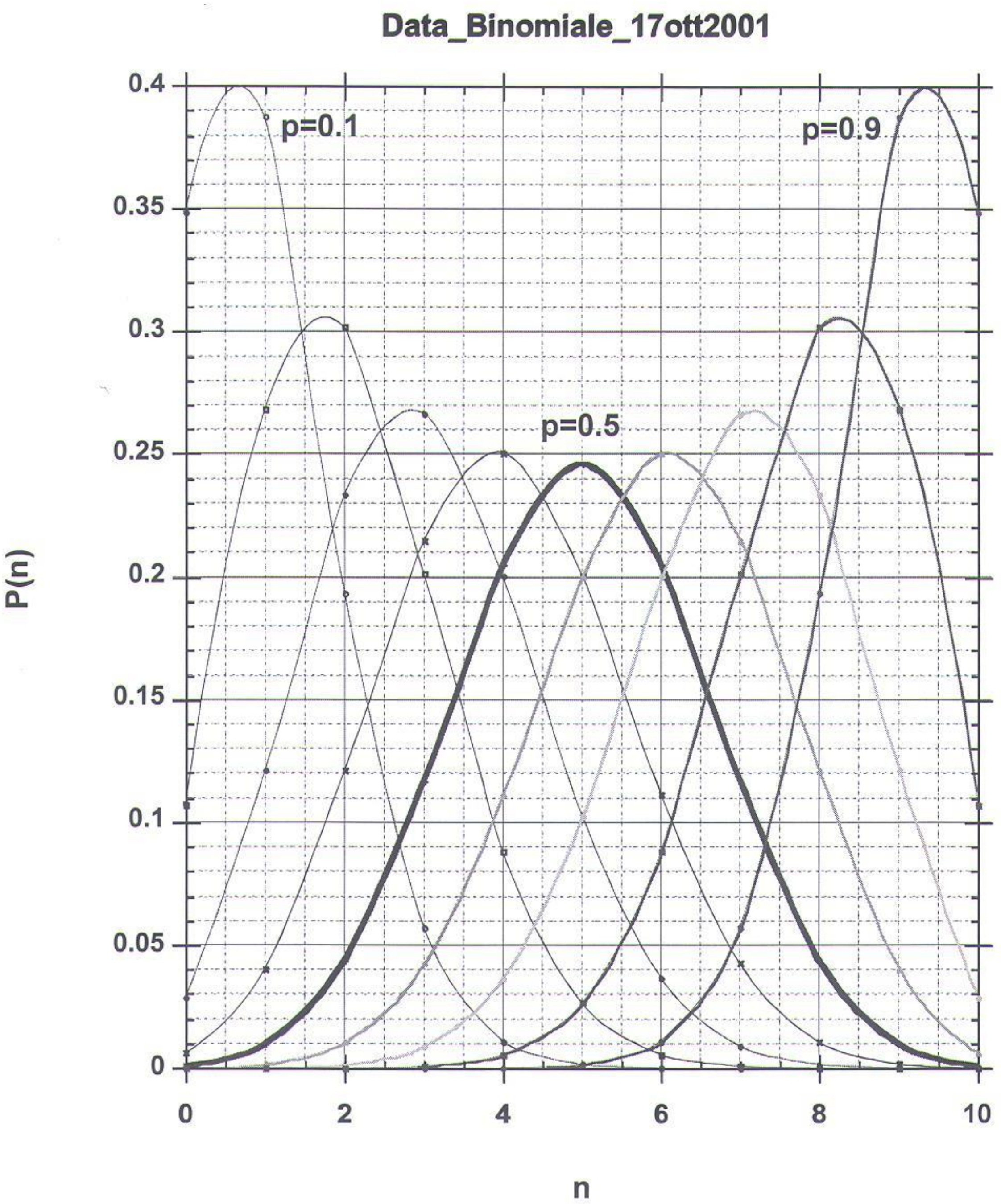




Data_Binomiale_17ott2001
COEFFICIENTE BINOMIALE PER N = 10
{N! /[n! * (N-n)!]}
n
0
50
100
150
200
250
300
0
2
4
6
8
10


Data_Binomiale_17ott2001
P_@p=0.1
P_@p=0.3
P_@p=0.5
P_@p=0.7
P_@p=0.9
P(n)
n
0.4
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0
2
4
6
8
10

$$P(n) = \frac{N!}{n! \cdot (N-n)!} \cdot p^n \cdot (1-p)^{N-n}$$



• condizione di normalizzazione verificata per la distribuzione binomiale : $\sum_{n=0}^{N} P(n,N) = 1$

$$\sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} \cdot p^n \cdot q^{N-n} = (p+q)^N = (1)^N = 1$$

Infatti:

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

$N=1$

$$\sum_{0}^{1} {}_n \binom{1}{n} p^n q^{1-n} = \binom{1}{0} p^0 q^1 + \binom{1}{1} p^1 q^0 = (q+p)^1$$

$N=2$

$$\sum_{0}^{2} {}_n \binom{2}{n} p^n q^{2-n} = \binom{2}{0} p^0 q^2 + \binom{2}{1} p^1 q^1 + \binom{2}{2} p^2 q^0 =$$

$$= q^2 + 2pq + p^2 = (q+p)^2$$

$N=3$

$$\sum_{0}^{3} {}_n \binom{3}{n} p^n q^{3-n} = \binom{3}{0} p^0 q^3 + \binom{3}{1} p^1 q^2 + \binom{3}{2} p^2 q^1 + \binom{3}{3} p^3 q^0 =$$

$$= q^3 + 3pq^2 + 3p^2q + p^3 = (q+p)^3$$

ecc.

$$P(n, N) = \binom{N}{n} \cdot p^{n} \cdot q^{(N-n)}$$

Normalizzazione : $\sum_{0}^{N} {}_n P(n, N) = 1$

$$\Big\downarrow \frac{d}{dp}$$

Valore atteso : $E(n) = N \cdot p$

$$\Big\downarrow \frac{d}{dp}$$

Deviazione standard: $\sigma = \sqrt{N \cdot p \cdot q}$

- valore medio di successi in N prove ripetute: $\langle n \rangle = N \cdot p$

$$1 = \sum_n P(n,N)$$

$\frac{d}{dp}$

$$0 = \sum_n \binom{N}{n} \frac{d}{dp}\left[p^n (\underbrace{1-p}_{q})^{N-n}\right]$$

$$0 = \sum_n \binom{N}{n} \left\{ n\, p^{n-1} (1-p)^{N-n} + p^n (N-n)(1-p)^{N-n-1} (-1) \right\}$$

$$0 = \sum_n \binom{N}{n} \left\{ n \left[p^{n-1} (1-p)^{N-n} + p^n (1-p)^{N-n-1} \right] + \right.$$
$$\left. - N p^n (1-p)^{N-n-1} \right\}$$

$$0 = \sum_n n \binom{N}{n} p^n q^{N-n} \left[p^{-1} + q^{-1} \right] +$$
$$- \sum_n N \binom{N}{n} p^n q^{N-n} \left(q^{-1} \right)$$

$$\underbrace{\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)}_{\frac{q+p}{pq} = \frac{1}{pq}} \langle n \rangle - \frac{N}{q} \cdot 1 = 0$$

$$\boxed{\langle n \rangle = N \cdot p}$$

$$\sigma \equiv \sqrt{\langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle} \equiv \sqrt{\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2} = ?$$

nel caso della Binomiale

$$\frac{d}{dp} Np = \frac{d}{dp} \sum_0^N n \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n}$$

$$N = \sum_0^N n \binom{N}{n} \frac{d}{dp} \left[p^n \cdot (1-p)^{N-n} \right]$$

$$\left[\begin{array}{l} n p^{n-1} q^{N-n} + p^n (N-n) q^{N-n-1} (-1) \\ \dfrac{n p^n q^{N-n}}{p} - \dfrac{N p^n q^{N-n}}{q} + \dfrac{n p^n q^{N-n}}{q} \\ n p^n q^{N-n} \left(\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} \right) - \dfrac{N p^n q^{N-n}}{q} \\ n p^n q^{N-n} \cdot \dfrac{1}{pq} - \dfrac{N p^n q^{N-n}}{q} \end{array} \right]$$

$$N = \frac{1}{pq} \sum_n n^2 \binom{N}{n} p^n q^{N-n} - \frac{N}{q} \sum_n n \binom{N}{n} p^n q^{N-n}$$

$$N = \frac{1}{pq} \langle n^2 \rangle - \frac{N}{q} \langle n \rangle$$

$$Npq = \langle n^2 \rangle - \frac{N}{\cancel{q}} \langle n \rangle p \cancel{q}$$

$$Npq = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2$$

- <u>deviazione standard</u> : $\sigma = \sqrt{Npq}$

$$\sigma \equiv \sqrt{\sum_m (m - \langle m \rangle)^2 P(m,N)} =$$

$$= \sqrt{\sum_m \left(m^2 \cdot P(m,N) + \underbrace{\langle m \rangle^2}_{(Np)^2} \cdot P(m,N) - 2\underbrace{\langle m \rangle}_{Np} m P(m,N) \right)}$$

$$= \sqrt{\sum_m m^2 \cdot P(m,N) + (N \cdot p)^2 \cdot 1 - 2(Np)(Np)} =$$

$$= \sqrt{\underbrace{\sum_m m^2 \cdot P(m,N)}_{\langle m^2 \rangle = Np(1-p)+(Np)^2} - (Np)^2} = \sqrt{Npq}$$

$$\frac{d}{dp} \underbrace{\langle m \rangle}_{N \cdot p} = \frac{d}{dp} \sum_m m \binom{N}{m} p^m (1-p)^{N-m}$$

$$N = \sum_m m \binom{N}{m} \left[m p^{m-1} (1-p)^{N-m} + p^m (N-m)(1-p)^{N-m-1}(-1) \right]$$

$$N = \sum_m m^2 \binom{N}{m} p^m q^{N-m} \left[p^{-1} + q^{-1} \right] +$$

$$- \sum_m N m \binom{N}{m} p^m q^{N-m} \left[q^{-1} \right]$$

$$N = \frac{1}{pq} \langle m^2 \rangle - \frac{N}{q} \underbrace{\langle m \rangle}_{Np}$$

$$\langle m^2 \rangle = p\underbrace{q}_{1-p} \left(N + \frac{N}{q} \cdot Np \right) = Np(1-p) + (Np)^2$$

- La distribuzione binomiale risulta simmetrica <u>se $p = \frac{1}{2}$</u>

$\rightarrow \quad q = 1 - p = \frac{1}{2}$

$\rightarrow \quad \langle m \rangle = N \cdot p = \frac{N}{2}$

$\rightarrow \quad \sigma = \sqrt{N \cdot p \cdot q} = \frac{\sqrt{N}}{2}$

$$P(m, N) = \binom{N}{m} \cdot p^{m} \cdot q^{N-m} = \binom{N}{m} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{N}$$

$$P(m, N) = P((N-m), N)$$

$$\binom{N}{m}\left(\frac{1}{2}\right)^{N} = \binom{N}{N-m}\left(\frac{1}{2}\right)^{N}$$

$$\frac{N!}{m!\,(N-m)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{N} = \frac{N!}{(N-m)!\,(\cancel{N} - (\cancel{N} - m))!}\left(\frac{1}{2}\right)^{N}$$

<u>c.v.d.</u>

Osservazione :

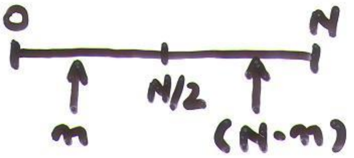
$P(n, N) = \binom{N}{n} p^n q^{N-n}$ sarà simmetrica se entrambi i termini moltiplicati lo saranno separatamente.

$\binom{N}{n}$ è sempre simmetrico rispetto a $n = N/2$

per esempio, per $N = 10$

n	$\binom{N}{n}$
$n=0$	1
1	10
2	45
3	120
4	210
5 ← $n = \frac{N}{2}$	252 ←
6	210
7	120
8	45
9	10
$n=10$	1

$p^n \cdot q^{N-n}$ simmetrico rispetto a $n = N/2$ solo se $p = q = \frac{1}{2}$



$$p^n q^{N-n} \overset{?}{=} p^{N-n} \cdot q^{\overbrace{N-(N-n)}^{n}}$$

$$p^{n-(N-n)} = q^{n-(N-n)}$$

$$p = q$$

& $p + q = 1$

$\hookrightarrow p = q = \frac{1}{2}$

.... utilizzo la distribuzione binomiale

nel caso del lancio di 3 monete

(@ p. 42-43)

$P(0T) = 0.125$

$P(1T) = 0.375$

$P(2T) = 0.375$

$P(3T) = 0.125$

$$P(n,3) = \frac{3!}{n!(3-n)!}\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3-n}$$

$n=0:$ $$\frac{3!}{0!\,3!}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} = 0.125$$

$n=1:$ $$\frac{3!}{1!\,2!}\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 3\cdot\frac{1}{8} = 0.375$$

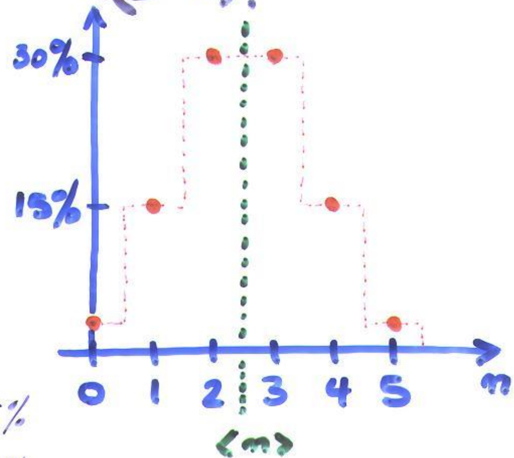
$n=2:$ $$\frac{3!}{2!\,1!}\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1 = 3\cdot\frac{1}{8} = 0.375$$

$n=3:$ $$\frac{3!}{3!\,0!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{8} = 0.125$$

• $p = q = \frac{1}{2}$

↳ $N = 5$: $P(m,5) = \frac{5!}{m!(5-m)!}\left(\frac{1}{2}\right)^5$

m	P
0	3.1 %
1	15.6
2	31.3
3	31.3
4	15.6
5	3.1
	100.0 %



$\langle m \rangle = 2.5$

$\sigma = 1.1$

$\sum_{2}^{3} {}_m P(m,5) = 62{,}6\%$

$\sum_{1}^{4} {}_m P(m,5) = 93.8\%$

↳ $N = 20$: $P(m,20) = \frac{20!}{m!(20-m)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$

$\langle m \rangle = 10$

$\sigma = 2.2$

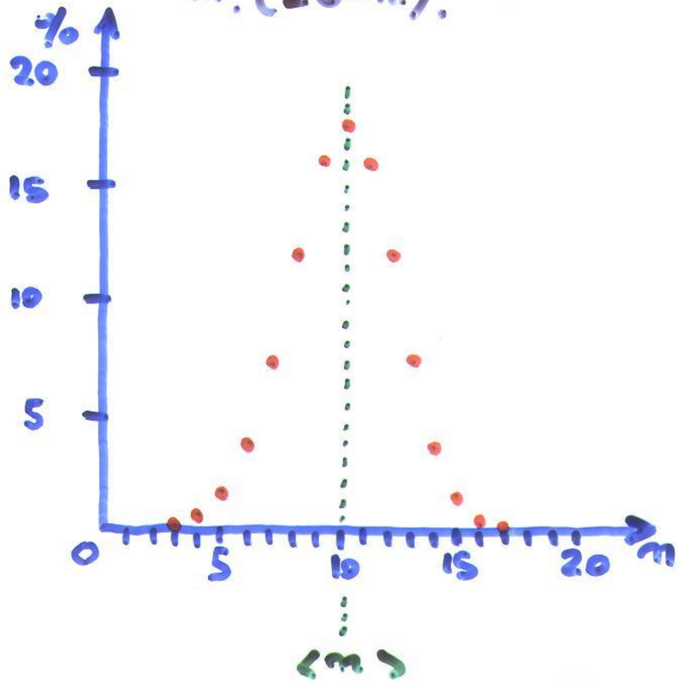
$P(10,20) = \frac{20!}{10!\,10!}\left(\frac{1}{2}\right)^{20} \cong 17{,}6\%$

$P(9,20) = \quad 16{,}0\%$

$P(8,20) = \quad 12.0\%$

$P(7,20) = \quad 7.4\%$

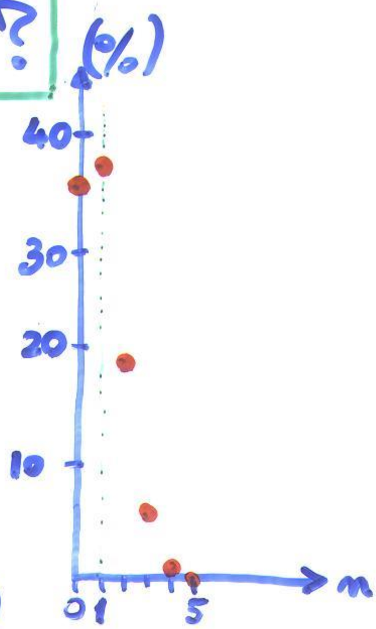
$\sum_{8}^{12} {}_m P(m,20) \doteq 73{,}6\%$



$p = \frac{1}{2}$: Binomiale simmetrica valore medio coincidente con quello più probabile

$p \approx \frac{1}{2}$ & $N \gg 1$: Binomiale oltre che simmetrica è $\approx$ GAUSSIANA

$\boxed{p \neq 0.5 \ \& \ N \gg 1 : \quad ?}$



↳ $N = 20$ & $p = \frac{1}{20} = 5\%$

$\langle m \rangle = 1$

$\sigma = 0.97$

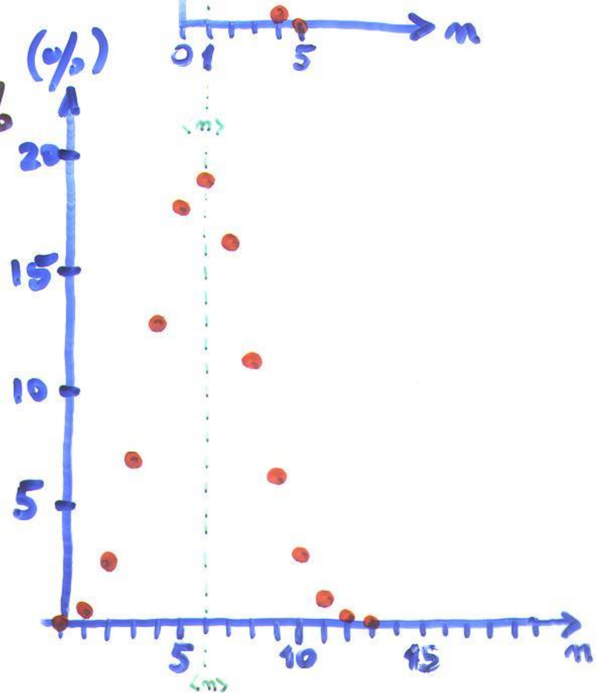
↳ $N = 20$ & $p = \frac{3}{10} = 30\%$

$\langle m \rangle = 6$

$\sigma^2 = 4.20$

$\Downarrow$

$\sigma = 2.0$



→ SACCO con 25 palle bianche e 75 palle nere

singolo esperimento = estrazione di 1 palla che poi rimetto dentro il sacco prima di estrarne un'altra

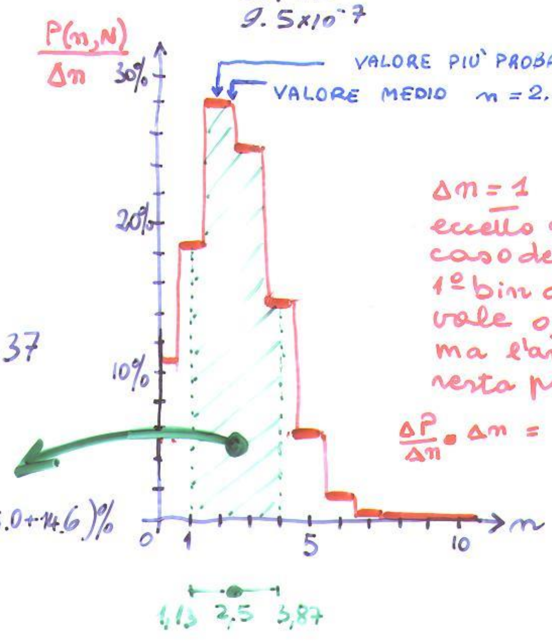
dicotomia: $\begin{cases} \text{successo} = \text{estrazione di una palla bianca} \\ \text{insuccesso} = \text{" " " " nera} \end{cases}$

$\rightarrow \quad p = \frac{25}{100} \qquad q = \frac{75}{100}$

→ calcolo la distribuzione binomiale per $N=10$ prove

$$P(n,N) = \frac{N!}{n!(N-n)!}\, p^n q^{N-n}$$

0	10	= 1	$(0.25)^0 (0.75)^{10}$ =	5.6×10^{-2}
1		10	$(0.25)^1 (0.75)^9$ =	18.8×10^{-2}
$\boxed{2}$		45		28.2×10^{-2}
3		120		25.0×10^{-2}
4		210		14.6×10^{-2}
5		252	$(0.25)^5 (0.75)^5$ =	5.8×10^{-2}
6		210		1.6×10^{-2}
7		120		0.3×10^{-2}
8		45	$(0.25)^8 (0.75)^2$ =	3.9×10^{-4}
9		10		2.9×10^{-5}
10		1		9.5×10^{-7}



$\langle n \rangle = 10 \times \frac{25}{100} = 2.5$

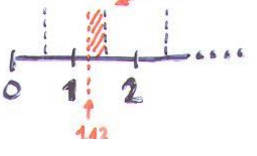
$\sigma = \sqrt{10 \times \frac{25}{100} \times \frac{75}{100}} \cong 1{,}37$

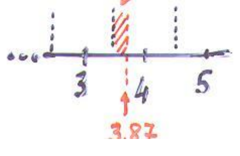
$\Delta n = 1$ eccetto nel caso del 1º bin dove vale 0,5 ma l'area del bin resta pari a:

$\frac{\Delta P}{\Delta n} \cdot \Delta n = 5.6 \times 10^{-2}$

$\sum_{n=1}^{n=4} P(n,10) = (18.8 + 28.2 + 25.0 + 14.6)\%$
$= 86.6\%$

$P(\bar{n} - \sigma < n < \bar{n} + \sigma) = (1{,}5 - 1{,}13) \times 18{,}8\% + 28{,}2\% + 25{,}0\% + (3{,}87 - 3{,}5) \times 14{,}6\% \cong 65{,}6\%$





SACCO con 50 palle bianche e 50 palle nere

singolo esperimento = estrazione di 1 palla che poi rimetto dentro il sacco prima di estrarne la successiva

dicotomia : $\begin{cases} \text{successo} = \text{estrazione di una palla bianca} \\ \text{insuccesso} = \text{" " " " nera} \end{cases}$

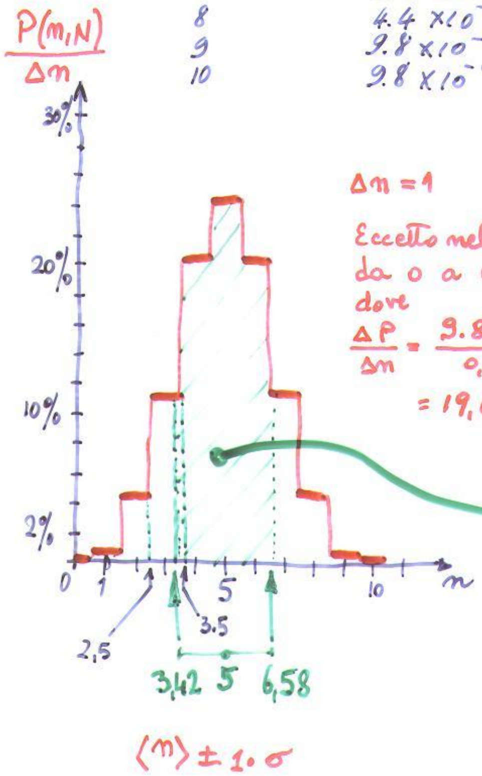
$\rightarrow p = q = \frac{50}{100}$

$\rightarrow$ calcolo la distribuzione binomiale per $N=10$ estrazioni successive

$$P(n,N) = \frac{N!}{n!(N-n)!} \cdot p^n \cdot q^{N-n} = \frac{N!}{n!(N-n)!} (0{,}5)^n$$

0	9.8×10^{-4}
1	9.8×10^{-3}
2	4.4×10^{-2}
3	11.7×10^{-2}
4	20.5×10^{-2}
5	24.6×10^{-2}
6	20.5×10^{-2}
7	11.7×10^{-2}
8	4.4×10^{-2}
9	9.8×10^{-3}
10	9.8×10^{-4}

$\leftarrow$ il valore più probabile ed il valore medio coincidono poiché $p = \frac{1}{2}$



$\Delta n = 1$

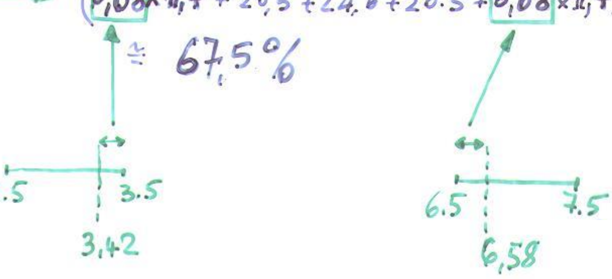
Eccetto nel 1° bin da 0 a 0,5 dove $\frac{\Delta P}{\Delta n} = \frac{9.8 \times 10^{-4}}{0{,}5} = 19{,}6 \times 10^{-4}$

$\langle n \rangle = 10 \times \frac{1}{2} = 5$

$\sigma = \sqrt{10 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} \cong 1{,}58$

$$\sum_{n=3}^{n=7} P(n,10) = (11{,}7 + 20{,}5 + 24{,}6 + 20{,}5 + 11.7)\,\% = 89\,\%$$

$$(\boxed{0{,}08} \times 11{,}7 + 20{,}5 + 24{,}6 + 20{,}5 + \boxed{0{,}08} \times 11{,}7)\,\% = \cong 67{,}5\,\%$$



Distribuzione Binomiale o di Bernoulli

$$P(n, N) = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n}$$

2 parametri indipendenti

$\langle n \rangle = Np$; $\sigma = \sqrt{Np(1-p)}$;

se $N \gg 1$ & $p \ll 1$

$q = 1 - p \approx 1$

$\langle n \rangle = N \cdot p \approx$ "finito"

cioè $\ll N$

allora ho la

Distribuzione di Poisson

$$P(n) = \frac{\langle n \rangle^n \cdot \exp(-\langle n \rangle)}{n!}$$

1 parametro indipendente

$\langle n \rangle = N \cdot p$

infatti: $\sigma = \sqrt{N \cdot p \cdot q} \approx \sqrt{\langle n \rangle}$

conteggi di eventi rari, poiché $\langle n \rangle \ll N$

se $\langle n \rangle$ aumenta ($\gtrsim 20 \div 30$)

se $N \gg 1$ & $p \approx 0{,}5$

ho la Distribuzione di Gauss o Legge normale degli errori di misura

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

$f(x)\,dx = dP(x < x < x+dx)$

$f(x) =$ distribuzione della densità di probabilità di Gauss per la variabile casuale x di tipo continuo anziché discreto come prima

$$\int_0^1 dP = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

$P(\mu - \sigma < x < \mu + \sigma) = 68.3\%$

2 parametri indipendenti

$\mu = E(x)$, σ

Osservazione:

Utilità pratica di approssimare una distribuzione binomiale con una di Gauss per $N \gg 1$:

→ calcolo noioso del coefficiente binomiale per N elevato

$$\binom{N}{m} = \frac{N!}{m!\,(N-m)!} \qquad 0 \le m \le N$$

→ $f(x) \longrightarrow f(t)$, $t = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$

TABELLE UNIVERSALI qualunque siano i valori specifici μ, σ!

$P(\mu - \sigma < x < \mu + \sigma) = 68.3\%$

$\mu - 2\sigma < x < \mu + 2\sigma \qquad 95.4\%$

$\mu - 3\sigma < x < \mu + 3\sigma \qquad 99.7\%$

$\mu - 1.65\sigma < x < \mu + 1{,}65\sigma \qquad 90\%$ → 5 % coda a DX + 5 % coda a SX

$\mu - 1{,}96\sigma < x < \mu + 1{,}96\sigma \qquad 95\%$

$\mu - 2{,}58\sigma < x < \mu + 2{,}58\sigma \qquad 99\%$

$\mu - 3.29\sigma < x < \mu + 3.29\sigma \qquad 99.9\%$

Esempio:

- N persone prese a caso

$\Rightarrow$ probabilita' che n compiano gli anni proprio oggi = ?

Hp.: $p = \frac{1}{365}$ $\longleftrightarrow$ probabilita' costante su $\{1, 2, \ldots, 365\}$

$$P(n, N) = \frac{N!}{n!\,(N-n)!}\, p^n (1-p)^{N-n}$$

$$\langle n \rangle = N \cdot p$$

$$\sigma = \sqrt{N \cdot p \cdot (1-p)}$$

$\boxed{N = 10}$ $\langle n \rangle = 10 \cdot \frac{1}{365} \cong 0.027$

$$\sigma = \sqrt{10 \cdot \frac{1}{365} \cdot \left(\frac{364}{365}\right)} \cong 0.165$$

$$P(1, 10) = \frac{10!}{1!\,9!} \left(\frac{1}{365}\right)^1 \left(\frac{364}{365}\right)^9 \cong 2.7\,\%$$

$$P(0, 10) = \frac{10!}{0!\,10!} \cdot \left(\frac{1}{365}\right)^0 \left(\frac{364}{365}\right)^{10} \cong 97.3\%$$

$$P(\geq 1, 10) = 1 - P(0, 10) \cong 2.7\,\%$$

$$P(\geq 2, 10) = P(\geq 1, 10) - P(1, 10) \cong 0.0\%$$

$\boxed{N = 100}$

$$\langle n \rangle = 100 \cdot \frac{1}{365} \simeq 0.274$$

$$\sigma = \sqrt{100 \cdot \frac{1}{365} \cdot \frac{364}{365}} \simeq 0{,}523$$

$$P(1,100) = \frac{100\,!}{1!\ 99!} \left(\frac{1}{365}\right)^{1} \left(\frac{364}{365}\right)^{99} \simeq 20.9\%$$

$$P(0,100) = \frac{100!}{0!\ 100!} \left(\frac{1}{365}\right)^{0} \left(\frac{364}{365}\right)^{100} \simeq 76.0\%$$

$$P(\geq 1, 100) = 1 - P(0,100) \simeq 24.0\%$$

$$P(\geq 2, 100) = P(\geq 1, 100) - P(1,100) \simeq 3.1\%$$

$\boxed{N = 3}$

$$\langle n \rangle = 3 \cdot \frac{1}{365} \simeq 0.0082$$

$$\sigma = \sqrt{3 \cdot \frac{1}{365} \cdot \frac{364}{365}} \simeq 0.091$$

$$P(1,3) = \frac{3!}{1!\ 2!} \left(\frac{1}{365}\right)^{1} \left(\frac{364}{365}\right)^{2} \simeq 0.8\%$$

$$P(0,3) = \frac{3!}{0!\ 3!} \left(\frac{1}{365}\right)^{0} \left(\frac{364}{365}\right)^{3} \simeq 99.2\%$$

SE APPROSSIMASSI LA BINOMIALE CON LA POISSONIANA:

$$P(n) = \frac{\langle m\rangle^{m} \cdot e^{-\langle m\rangle}}{m!}$$

$\langle m\rangle = N \cdot p$

$\sigma = \sqrt{\langle m\rangle}$

$N = 10$: $\langle m\rangle \simeq 0.027$

$$P(0) \simeq \frac{(0.027)^{0} \cdot e^{-0.027}}{0!} \simeq 97.3\%$$

$$P(1) \simeq \frac{(0.027)^{1} \cdot e^{-0.027}}{1!} \simeq 2.6\%$$

$N = 100$: $\langle m\rangle \simeq 0.274$

$$P(0) \simeq \frac{(0.274)^{0} \cdot e^{-0.274}}{0!} \simeq 76.0\%$$

$$P(1) \simeq \frac{(0.274)^{1} \cdot e^{-0.274}}{1!} \simeq 20.8\%$$

$N = 3$: $\langle m\rangle \simeq 0.0082$

$P(0) \simeq 99.2\%$

$P(1) \simeq 0.8\%$

Sommario del confronto numerico

$$p = \frac{1}{365} \quad , \quad N = 3, 10, 100$$

	$N=3$		$N=10$		$N=100$	
	P.	B.	P.	B.	P.	B.
$\langle n \rangle$	0.0082	0.0082	0.027	0.027	0.274	0.274
σ	0.091	0.091	0.164	0.165	0.523	0.523
$P(0)$	99.2%	99.2%	97.3%	97.3%	76.0%	76.0%
$P(1)$	0.8%	0.8%	2.6%	2.7%	20.8%	20.9%

Poisson

"Bernoulli" $\longrightarrow$ "Poisson"

$$P(n,N) = \frac{N!}{n!\,(N-n)!}\,p^{n}(1-p)^{N-n}$$

$N \gg 1$ & $0 < p \ll 1$

$\rightarrow$ $n \ll N$ poiché p^n diminuisce

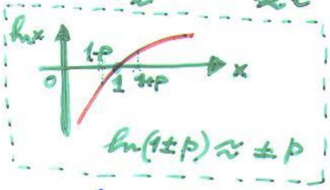
$$\rightarrow \frac{N!}{n!\,(N-n)!} = \frac{\overbrace{N\cdot(N-1)\cdot\ldots\cdot(N-n+1)}^{\approx N^n}\cdot(N-n)!}{n!\,(N-n)!}$$

$$\approx \frac{N^n}{n!}$$

$(Np)^n = (\langle n\rangle)^n$

$$\rightarrow P(n,N) \approx \frac{N^n}{n!}\,p^{n}\,\underbrace{(1-p)^{\overbrace{N-n}^{\approx N}}}_{\approx e^{\ln(1-p)^N} = e^{N\ln(1-p)} \approx e^{-Np}} =$$

$$= \frac{(\langle n\rangle)^n}{n!}\,e^{-\langle n\rangle}$$



Si ha perciò la dipendenza da un solo parametro $\langle n\rangle$ dal quale ho $\sigma = \sqrt{\langle n\rangle}$

infatti:

$$\sigma = \sqrt{N\cdot p\cdot\underbrace{(1-p)}_{\approx 1}} \approx \sqrt{N\cdot p} = \sqrt{\langle n\rangle}$$

- $N = 10^{20}$ atomi radiattivi

  $p \approx 2\times10^{-20}$: prob. decadimento di 1 nucleo nella unita' di tempo

  → probabilta' che ne decadano n nella stessa unita' di tempo?

$$? \; P(n, N=10^{20}) = \frac{(10^{20})!}{n!\,(10^{20}-n)!}\,(2\times10^{-20})^{n}\,(1-2\times10^{-20})^{10^{20}-n} \; ?$$

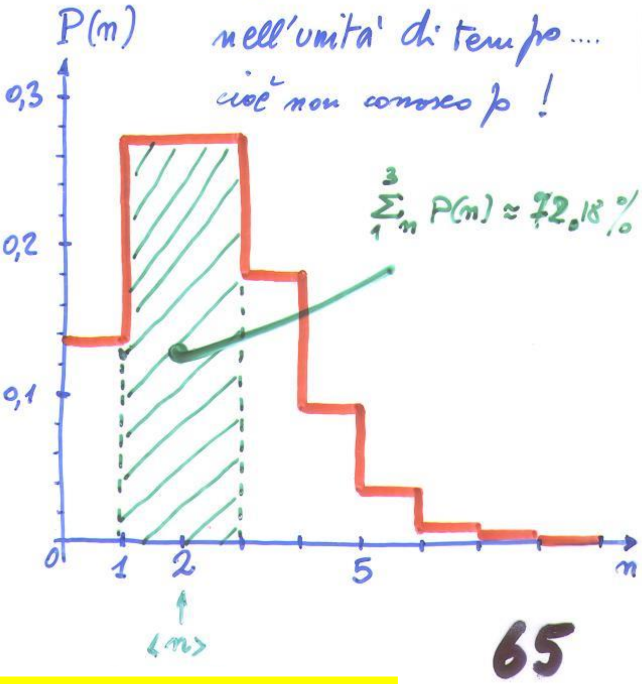
$$\langle n\rangle = N\cdot p = 10^{20}\cdot 2\times10^{-20} = 2 \quad \text{decadimenti nella unita' di tempo}$$

$$\sigma = \sqrt{N\cdot p\cdot(1-p)} = \sqrt{10^{20}\cdot 2\times10^{-20}\cdot(1-2\times10^{-20})} \simeq \sqrt{2} \approx$$
$$\approx 1.41$$

$$P(n) = \frac{(\langle n\rangle)^{n}\cdot e^{-\langle n\rangle}}{n!}$$

osservazione: sperimentalmente misuro $\langle n\rangle$ nell'unita' di tempo.... cioe' non conosco p !

$n = 0$	$P(n) = 13.53\times10^{-2}$
1	27.07 "
2	27.07 "
3	18.04 "
4	9.02 "
5	3.61 "
6	1.20 "
7	0.34 "
8	0.09 "
9	0.02 "
10	0.004 "



65

P(<n> - σ < n < <n> + σ) = P(0.59 < n < 3.41) = 67.1%

• $P(n) = \dfrac{\langle n\rangle^n}{n!}\, e^{-\langle n\rangle}$

è una distribuzione normalizzata ad 1 : $\sum_{0}^{\infty}{}_n\, P(n) = 1$

$$\rightarrow \sum_n P(n) = \sum_n \frac{\langle n\rangle^n}{n!}\, e^{-\langle n\rangle} =$$

$$= e^{-\langle n\rangle} \cdot \sum_n \frac{\langle n\rangle^n}{n!} = e^{-\langle n\rangle} \cdot e^{\langle n\rangle} = 1$$

$$\sum_n \frac{\langle n\rangle^n}{n!} = \frac{\langle n\rangle^0}{0!} + \frac{\langle n\rangle^1}{1!} + \frac{\langle n\rangle^2}{2!} + \frac{\langle n\rangle^3}{3!} + \dots =$$

$$= 1 + \langle n\rangle + \frac{\langle n\rangle^2}{2} + \frac{\langle n\rangle^3}{6} + \dots$$

$= e^{\langle n\rangle}$ "sviluppo in serie di Mac Laurin"

• Il parametro nella distribuzione di Poisson è proprio il valore atteso

$P(n) = \dfrac{a^n}{n!}\, e^{-a}$

$\sum_{1}^{\infty}{}_n$ perchè il 1° termine nella somma è $\equiv 0$

$\dfrac{n}{n\,(n-1)!} = \dfrac{1}{(n-1)!}$

$$\langle n\rangle = \sum_{0}^{\infty}{}_n\, n \cdot P(n) = \sum_{0}^{\infty}{}_n \frac{n\, a^n}{n!}\, e^{-a} =$$

$$= e^{-a} \cdot a \cdot \boxed{\sum_{1}^{\infty}{}_n \frac{a^{n-1}}{(n-1)!}} = e^{-a} \cdot a \cdot e^{a} = a$$

- La distribuzione di **Poisson** è rappresentata con **istogrammi** che diventano **sempre più simmetrici** rispetto al valore medio, cioè sempre più simili a **Gauss**, **al crescere di $\langle n \rangle$**

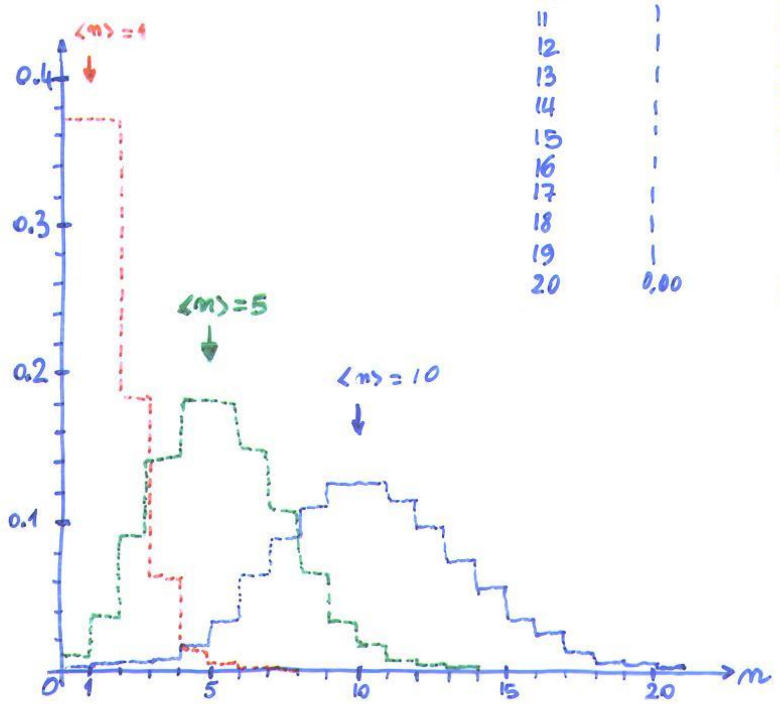
$$P(n) = \frac{\langle n \rangle^n}{n!} e^{-\langle n \rangle}$$

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(n-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$\mu = \langle n \rangle$, $\sigma = \sqrt{\langle n \rangle}$

$$P(n < n' < n+1) = f(n') \cdot \Delta n \quad \text{con } \Delta n = 1$$

	$P(n)$		
n	$\langle n \rangle = 1$	$\langle n \rangle = 5$	$\langle n \rangle = 10$
0	$\boxed{36.79}$ %	0.67 %	0.00 %
1	$\boxed{36.79}$	3.37	0.05
2	18.39	8.42	0.23
3	6.13	14.04	0.76
4	1.53	$\boxed{17.55}$	1.89
5	0.31	$\boxed{17.55}$	3.78
6	0.05	14.62	6.31
7	0.01	10.44	9.01
8	0.00	6.53	11.26
9	¦	3.63	$\boxed{12.51}$
10	¦	1.81	$\boxed{12.51}$
11	¦	0.82	11.37
12	¦	0.34	9.48
13	¦	0.13	7.29
14	¦	0.05	5.21
15	¦	0.02	3.47
16	¦	0.00	2.17
17	¦	¦	1.28
18	¦	¦	0.71
19	¦	¦	0.37
20	0.00	0.00	0.19



Binomiale (Bernoulli) ➔ Gauss

$$P(n,N) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{N-n}$$

N >> 1 & < n > = N p "grande"

... la variabile casuale da "discreta" diviene "continua"

$$\ln(P(n)) = (\ln(N!) - \ln(n!) - \ln((N-n)!) + n\ln(p) + (N-n)\ln(1-p)$$

Ricerchiamo il massino di **ln(P(n)) ←→ (d ln(P(n)) / d n) = 0**

... valore piu' probabile...

$$\frac{d(\ln(n!))}{dn} \approx \frac{\ln((n+1)!) - \ln(n!)}{1} = \ln(\frac{(n+1)(n!)}{n!}) = \ln(n+1) \approx \ln(n)$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{d(\ln(P(n))}{dn} = 0 - \ln(n) + \ln(N-n) + \ln(p) - \ln(1-p) = \ln(\frac{(N-n)}{n}\frac{p}{(1-p)})$$

$$\Rightarrow \frac{(N-n)}{n}\frac{p}{(1-p)} = 1 \Rightarrow Np - np = n - np \Rightarrow Np = n$$

... quando il valore medio coincide con il valore più probabile, allora la distribuzione risulterà simmetrica ... "GAUSSIANA"

- facciamo ora uno sviluppo in serie limitato al 2° ordine di $\ln P$ intorno al valore di picco, cioè al più probabile $n = N\cdot p$ coincidente con $\langle n\rangle$

$$\ln P(n) \approx \ln P(\langle n\rangle) +$$

$$+ \left[\frac{d}{dn} \ln P(n)\right]_{n=\langle n\rangle} (n - \langle n\rangle) +$$

perché $P\langle n\rangle = \max$

$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{d^2}{dn^2} \ln P(n)\right]_{n=\langle n\rangle} (n - \langle n\rangle)^2$$

si è già visto che:

$$\frac{d}{dn}\left(\frac{d}{dn}\ln P\right) = \frac{d}{dn}\left(\ln\left(\frac{N-n}{n}\cdot\frac{p}{1-p}\right)\right) =$$

$$= \frac{d}{dn}\left\{\ln(N-n) - \ln n + \ln\frac{p}{1+p}\right\} =$$

$$= \frac{(-1)}{N-n} - \frac{1}{n} + 0 = \frac{-\cancel{n} - (N-\cancel{n})}{n(N-n)} = \frac{-N}{n(N-n)}$$

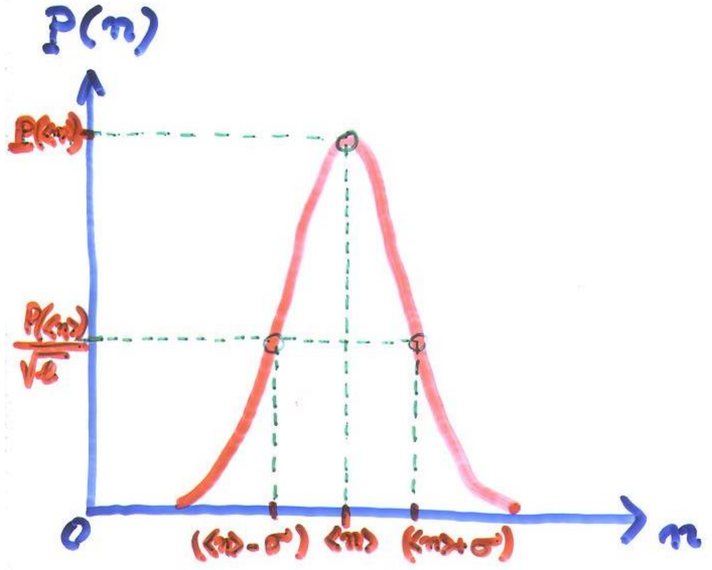
$$\hookrightarrow \left[\frac{d^2}{dn^2}\ln P(n)\right]_{n=\langle n\rangle} = \left[-\frac{N}{n(N-n)}\right]_{n=\langle n\rangle = N\cdot p} =$$

$$= \frac{-\cancel{N}}{\cancel{N}\cdot p\cdot(N - N\cdot p)} = \frac{-1}{p\cdot N\cdot \underbrace{(1-p)}_{q}} = \frac{-1}{\underbrace{Npq}_{\sigma^2}} = -\frac{1}{\sigma^2}$$

$$\ln P(n) \approx \ln P(\langle n \rangle) - \frac{(n-\langle n \rangle)^2}{2\sigma^2}$$

$$\ln \frac{P(n)}{P(\langle n \rangle)} \approx - \frac{(n-\langle n \rangle)^2}{2\sigma^2}$$

$$\boxed{P(n) \approx P(\langle n \rangle) \cdot \exp\left[-\frac{(n-\langle n \rangle)^2}{2\sigma^2}\right]}$$



per $n = \langle n \rangle \pm \sigma$:

$$\frac{P(n)}{P(\langle n \rangle)} \approx \exp\left[-\frac{(\pm\sigma)^2}{2\sigma^2}\right] = \exp\left[-\frac{1}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{e}} \simeq \frac{1}{\sqrt{2.71828}} \simeq 0,6065$$

- utilizziamo la condizione di normalizzazione: $\sum_{0}^{N}{}_m P(n) = 1$ per calcolare $P(\langle n\rangle)$ in
$P(n) = P(\langle n\rangle) \exp[-(n-\langle n\rangle)^2/2\sigma^2]$

→ assimiliamo la variabile discreta n con una continua:

$$\sum_{0}^{N}{}_m P(n) = 1 \longrightarrow \int_0^N P(n)\,dn = 1$$

.... possiamo estendere gli estremi di integrazione

$$\int_0^N \ldots = 1 \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots = 1$$

poiché $P(n) = 0$ per $n<0$ & $n>N$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(\langle n\rangle)\cdot \exp\left[-\frac{(n-\langle n\rangle)^2}{2\sigma^2}\right] dn = 1$$

$u \equiv \frac{n-\langle n\rangle}{\sqrt{2}\,\sigma} \rightarrow du = \frac{dn}{\sqrt{2}\,\sigma}$

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\langle n\rangle)\cdot e^{-u^2}\sqrt{2}\,\sigma\,du = P(\langle n\rangle)\sqrt{2}\,\sigma \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du}_{\sqrt{\pi}}$$

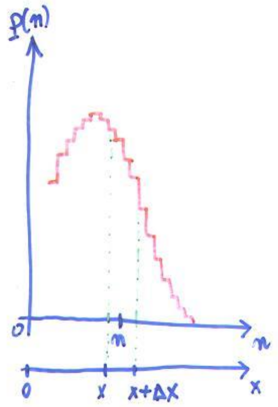
dalle tavole degli integrali

$$P(\langle n\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \rightarrow \boxed{P(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(n-\langle n\rangle)^2}{2\sigma^2}}}$$

Densità di Probabilità

GAUSS

- **Osservazioni sul passaggio dalla variabile discreta n alla variabile continua x**



per n molto grande

↓

si può scegliere un intervallo $x - x+\Delta x$ tale che sia:

$$1 \ll \Delta x \ll n$$

↓ $x < n < x + \Delta x$

→ probabilità di avere n nell'intervallo $x - x+\Delta x$ è

$$P(n) \cdot \Delta x = \underbrace{\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\langle x\rangle)^2}{2\sigma^2}}}_{\text{densità di probabilità} = f(x)} \cdot \Delta x$$

densità di probabilità = f(x)

- x = variabile casuale continua → $x = n$ per x intero
- $f(x)$ = densità di probabilità → $f(x) = P(n)$ per x intero
- $f(x)\Delta x$ = probabilità di trovare x nell'intervallo $x - x+\Delta x$

→ la probabilità che $x = \tilde{x}$ è nulla!

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]} \rightarrow \boxed{E(x) = \mu}$$

$$\underset{n \in \mathbb{N}}{E(n)} = \sum_0^N n \cdot P(n) \longrightarrow \underset{x \in \mathbb{R}}{E(x)} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\, dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] dx \qquad \begin{pmatrix} t = \frac{x-\mu}{\sigma} \\ dt = dx/\sigma \end{pmatrix}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t\sigma + \mu)}{\sqrt{2\pi}\,\cancel{\sigma}} \exp\left[-\frac{t^2}{2}\right] \cancel{\sigma}\, dt =$$

$$= \cancel{\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t\, e^{-\frac{t^2}{2}} dt} + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt}_{\sqrt{2\pi}} = \mu$$

L'integrando è una funzione antisimmetrica cioè di tipo dispari

$$\boxed{E\left[(x - E(x))^2\right] = \sigma^2}$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \langle x \rangle)^2 f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x - \langle x \rangle)^2}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left[-\frac{(x - \langle x \rangle)^2}{2\sigma^2}\right] dx$$

$$t = \frac{x - \langle x \rangle}{\sigma} \rightarrow dt = dx/\sigma$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(t\sigma)^2}{\sqrt{2\pi}\,\cancel{\sigma}} \exp\left[-t^2/2\right] \cancel{\sigma}\, dt = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2/2}\, dt} =$$

se provo: $d\left(t^2 e^{-t^2/2}\right) = e^{-t^2/2}\, 2t\, dt + t^2 e^{-t^2/2}\left(-\frac{1}{2} 2t\right) dt$

mentre: $d\left(t e^{-t^2/2}\right) = e^{-t^2/2}\, dt + t e^{-t^2/2}\left(-\frac{1}{2} 2t\right) dt$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left[\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2}\, dt}_{\sqrt{2\pi}} - \cancel{\int_{-\infty}^{+\infty} d\left(t e^{-t^2/2}\right) dt}\right] = \sigma^2$$

essendo funzione antisimmetrica, ovvero dispari

... FWHM ≈ 2.35 σ

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\langle x\rangle)^2}{2\sigma^2}\right] = \\ &= A \exp\left[-h^2 (x-\langle x\rangle)^2\right] \end{aligned}}$$

→ $f(x)$ = densità di probabilità secondo Gauss

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

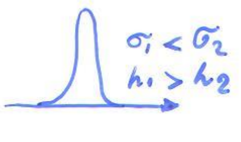
→ $f(x=\langle x\rangle) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \equiv A$ = valore max della $f(x)$

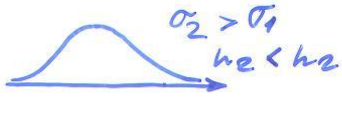
→ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\,dx = \langle x\rangle$ = valore medio di x

→ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\langle x\rangle)^2 f(x)\,dx = \sigma^2$ = varianza di x

→ $\sqrt{h^2} = \sqrt{\dfrac{1}{2\sigma^2}}$ = modulo di precisione della distribuzione h

$$h = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} ;$$





→ $t = \dfrac{x-\langle x\rangle}{\sigma} \;\rightarrow\; dt = \dfrac{dx}{\sigma}$

$$\int_{x_A}^{x_B} f(x)\,dx = \int_{t_A}^{t_B} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}\,\cancel{\sigma}}\,\cancel{\sigma}\,dt = \boxed{\int_{t_A}^{t_B} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dt}$$

: INTEGRALE TABULATO

UNIVERSALE!

APPENDICE A
Integrale Normale degli Errori, I

Se la misura di una variabile continua x è soggetta a molti piccoli errori, tutti casuali, allora la distribuzione attesa dei risultati è data dalla distribuzione normale, o di Gauss,

$$f_{X,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-X)^2/2\sigma^2},$$

dove X è il valore vero di x, e σ la deviazione standard.

L'integrale della funzione normale di distribuzione, $\int_a^b f_{X,\sigma}(x)dx$, è chiamato "l'integrale normale degli errori", ed è la probabilità che una misura cada tra $x = a$ ed $x = b$,

$$P(a \leqslant x \leqslant b) = \int_a^b f_{X,\sigma}(x)\,dx.$$

La Tabella A riporta questo integrale per $a = X - t\sigma$ e $b = X + t\sigma$. Ciò fornisce la probabilità di una misura entro t deviazioni standard da entrambi i lati di X,

$$\boxed{\begin{aligned} P(\text{entro } t\sigma) &= P(X - t\sigma \leqslant x \leqslant X + t\sigma) \\ &= \int_{X-t\sigma}^{X+t\sigma} f_{X,\sigma}(x)\,dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^{t} e^{-z^2/2}\,dz. \end{aligned}}$$

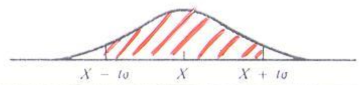
Questa funzione è talvolta denominata $erf(t)$, ma questa notazione è anche usata per una funzione un po' diversa.

La probabilità di una misura "al di fuori" dello stesso intervallo può essere trovata per sottrazione;

$$P(\text{al di fuori di } t\sigma) = 100\% - P(\text{entro } t\sigma).$$

Per ulteriori discussioni, vedi Sezione 5.4 ed Appendice B.

Tabella A. La probabilità percentuale, $P(\text{entro } t\sigma) = \int_{X-t\sigma}^{X+t\sigma} f_{X,\sigma}(x)dx$, come una funzione di t.



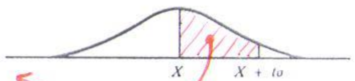
t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.00	0.80	1.60	2.39	3.19	3.99	4.78	5.58	6.38	7.17
0.1	7.97	8.76	9.55	10.34	11.13	11.92	12.71	13.50	14.28	15.07
0.2	15.85	16.63	17.41	18.19	18.97	19.74	20.51	21.28	22.05	22.82
0.3	23.58	24.34	25.10	25.86	26.61	27.37	28.12	28.86	29.61	30.35
0.4	31.08	31.82	32.55	33.28	34.01	34.73	35.45	36.16	36.88	37.59
0.5	38.29	38.99	39.69	40.39	41.08	41.77	42.45	43.13	43.81	44.48
0.6	45.15	45.81	46.47	47.13	47.78	48.43	49.07	49.71	50.35	50.98
0.7	51.61	52.23	52.85	53.46	54.07	54.67	55.27	55.87	56.46	57.05
0.8	57.63	58.21	58.78	59.35	59.91	60.47	61.02	61.57	62.11	62.65
0.9	63.19	63.72	64.24	64.76	65.28	65.79	66.29	66.80	67.29	67.78
1.0	68.27	68.75	69.23	69.70	70.17	70.63	71.09	71.54	71.99	72.43
1.1	72.87	73.30	73.73	74.15	74.57	74.99	75.40	75.80	76.20	76.60
1.2	76.99	77.37	77.75	78.13	78.50	78.87	79.23	79.59	79.95	80.29
1.3	80.64	80.98	81.32	81.65	81.98	82.30	82.62	82.93	83.24	83.55
1.4	83.85	84.15	84.44	84.73	85.01	85.29	85.57	85.84	86.11	86.38
1.5	86.64	86.90	87.15	87.40	87.64	87.89	88.12	88.36	88.59	88.82
1.6	89.04	89.26	89.48	89.69	89.90	90.11	90.31	90.51	90.70	90.90
1.7	91.09	91.27	91.46	91.64	91.81	91.99	92.16	92.33	92.49	92.65
1.8	92.81	92.97	93.12	93.28	93.42	93.57	93.71	93.85	93.99	94.12
1.9	94.26	94.39	94.51	94.64	94.76	94.88	95.00	95.12	95.23	95.34
2.0	95.45	95.56	95.66	95.76	95.86	95.96	96.06	96.15	96.25	96.34
2.1	96.43	96.51	96.60	96.68	96.76	96.84	96.92	97.00	97.07	97.15
2.2	97.22	97.29	97.36	97.43	97.49	97.56	97.62	97.68	97.74	97.80
2.3	97.86	97.91	97.97	98.02	98.07	98.12	98.17	98.22	98.27	98.32
2.4	98.36	98.40	98.45	98.49	98.53	98.57	98.61	98.65	98.69	98.72
2.5	98.76	98.79	98.83	98.86	98.89	98.92	98.95	98.98	99.01	99.04
2.6	99.07	99.09	99.12	99.15	99.17	99.20	99.22	99.24	99.26	99.29
2.7	99.31	99.33	99.35	99.37	99.39	99.40	99.42	99.44	99.46	99.47
2.8	99.49	99.50	99.52	99.53	99.55	99.56	99.58	99.59	99.60	99.61
2.9	99.63	99.64	99.65	99.66	99.67	99.68	99.69	99.70	99.71	99.72
3.0	99.73									
3.5	99.95									
4.0	99.994									
4.5	99.9993									
5.0	99.99994									

APPENDICE B

Integrale Normale degli Errori, II

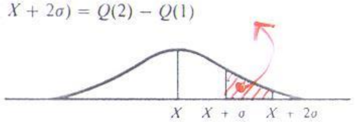
In certi calcoli, una forma conveniente dell'integrale normale degli errori è

$$\boxed{Q(t)} = \int_X^{X+t\sigma} f_{X,\sigma}(x)\,dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-z^2/2}\,dz.$$



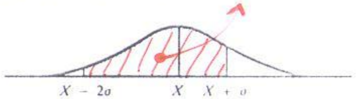
(Questo integrale è, naturalmente, proprio la metà dell'integrale tabulato in Appendice A). La probabilità $P(a \leqslant x \leqslant b)$ di una misura in un intervallo $a \leqslant x \leqslant b$ può essere trovata da $Q(t)$ con una singola sottrazione o addizione. Per esempio,

$$P(X + \sigma \leqslant x \leqslant X + 2\sigma) = Q(2) - Q(1)$$



Analogamente

$$P(X - 2\sigma \leqslant x \leqslant X + \sigma) = Q(2) + Q(1)$$



La probabilità di una misura maggiore di un certo $X + t\sigma$ è proprio $0.5 - Q(t)$. Per esempio,

$$P(x \geqslant X + \sigma) = 50\% - Q(1).$$

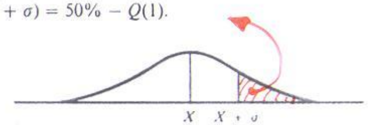
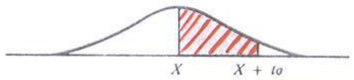


Tabella B. La probabilità percentuale, $Q(t) = \int_X^{X+t\sigma} f_{X,\sigma}(x)dx$, come una funzione di t.



t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.00	0.40	0.80	1.20	1.60	1.99	2.39	2.79	3.19	3.59
0.1	3.98	4.38	4.78	5.17	5.57	5.96	6.36	6.75	7.14	7.53
0.2	7.93	8.32	8.71	9.10	9.48	9.87	10.26	10.64	11.03	11.41
0.3	11.79	12.17	12.55	12.93	13.31	13.68	14.06	14.43	14.80	15.17
0.4	15.54	15.91	16.28	16.64	17.00	17.36	17.72	18.08	18.44	18.79
0.5	19.15	19.50	19.85	20.19	20.54	20.88	21.23	21.57	21.90	22.24
0.6	22.57	22.91	23.24	23.57	23.89	24.22	24.54	24.86	25.17	25.49
0.7	25.80	26.11	26.42	26.73	27.04	27.34	27.64	27.94	28.23	28.52
0.8	28.81	29.10	29.39	29.67	29.95	30.23	30.51	30.78	31.06	31.33
0.9	31.59	31.86	32.12	32.38	32.64	32.89	33.15	33.40	33.65	33.89
1.0	34.13	34.38	34.61	34.85	35.08	35.31	35.54	35.77	35.99	36.21
1.1	36.43	36.65	36.86	37.08	37.29	37.49	37.70	37.90	38.10	38.30
1.2	38.49	38.69	38.88	39.07	39.25	39.44	39.62	39.80	39.97	40.15
1.3	40.32	40.49	40.66	40.82	40.99	41.15	41.31	41.47	41.62	41.77
1.4	41.92	42.07	42.22	42.36	42.51	42.65	42.79	42.92	43.06	43.19
1.5	43.32	43.45	43.57	43.70	43.82	43.94	44.06	44.18	44.29	44.41
1.6	44.52	44.63	44.74	44.84	44.95	45.05	45.15	45.25	45.35	45.45
1.7	45.54	45.64	45.73	45.82	45.91	45.99	46.08	46.16	46.25	46.33
1.8	46.41	46.49	46.56	46.64	46.71	46.78	46.86	46.93	46.99	47.06
1.9	47.13	47.19	47.26	47.32	47.38	47.44	47.50	47.56	47.61	47.67
2.0	47.72	47.78	47.83	47.88	47.93	47.98	48.03	48.08	48.12	48.17
2.1	48.21	48.26	48.30	48.34	48.38	48.42	48.46	48.50	48.54	48.57
2.2	48.61	48.64	48.68	48.71	48.75	48.78	48.81	48.84	48.87	48.90
2.3	48.93	48.96	48.98	49.01	49.04	49.06	49.09	49.11	49.13	49.16
2.4	49.18	49.20	49.22	49.25	49.27	49.29	49.31	49.32	49.34	49.36
2.5	49.38	49.40	49.41	49.43	49.45	49.46	49.48	49.49	49.51	49.52
2.6	49.53	49.55	49.56	49.57	49.59	49.60	49.61	49.62	49.63	49.64
2.7	49.65	49.66	49.67	49.68	49.69	49.70	49.71	49.72	49.73	49.74
2.8	49.74	49.75	49.76	49.77	49.77	49.78	49.79	49.79	49.80	49.81
2.9	49.81	49.82	49.82	49.83	49.84	49.84	49.85	49.85	49.86	49.86
3.0	49.87	—	—	—	—	—	—	—	—	—
3.5	49.98	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4.0	49.997	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4.5	49.9997	—	—	—	—	—	—	—	—	—
5.0	49.99997	—	—	—	—	—	—	—	—	—

- Una misura soggetta a molti piccoli errori casuali è distribuita secondo Gauss

→ X : valore vero

→ assenza di qualunque errore sistematico

→ si hanno N sorgenti indipendenti di errori casuali di entità ε finita che potrà essere al più $+\varepsilon$ o $-\varepsilon$ con la stessa probabilità $p = 0.5$

→ x : misura della G.F.

per $N = 1$:
$$x = \begin{cases} X + \varepsilon & : P_+ = 0.5 \\ X - \varepsilon & : P_- = 0.5 \end{cases}$$

$$X - \varepsilon < x < X + \varepsilon$$

$$P_- = \binom{1}{0}\frac{1}{2} = 0.5 \; ; \; P_+ = \binom{1}{1}\frac{1}{2} = 0.5$$

per $N = 2$:
$$x = \begin{cases} X + \varepsilon + \varepsilon = X + 2\varepsilon & : 25\% \\ X + \varepsilon - \varepsilon = X & : 50\% \\ X - \varepsilon - \varepsilon = X - 2\varepsilon & : 25\% \end{cases}$$

$$X - 2\varepsilon < x < X + 2\varepsilon$$

$$\underset{\substack{n=0 \\ di + \varepsilon}}{P} = \binom{2}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \; ; \; \underset{\substack{n=1 \\ di + \varepsilon}}{P} = \binom{2}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \; ; \; \underset{\substack{n=2 \\ di + \varepsilon}}{P} = \binom{2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$\underline{N = 10}$: $\bar{X} - 10\,\varepsilon < x < \bar{X} + 10\,\varepsilon$

$$P(n, N) = \binom{N}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^N \quad \text{für } p = q = 50\%$$

$$\binom{10}{0} = \frac{10!}{0!\,10!} = 1 \;, \; \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cong 9{,}8 \times 10^{-4} \rightarrow P = 9.8 \times 10^{-4}$$

$$\binom{10}{1} = \frac{10!}{1!\,9!} = 10 \qquad 9.8 \times 10^{-3}$$

$$\binom{10}{2} = \frac{10!}{2!\,8!} = 45 \qquad 4{,}4 \times 10^{-2}$$

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!\,7!} = 120 \qquad 0{,}118$$

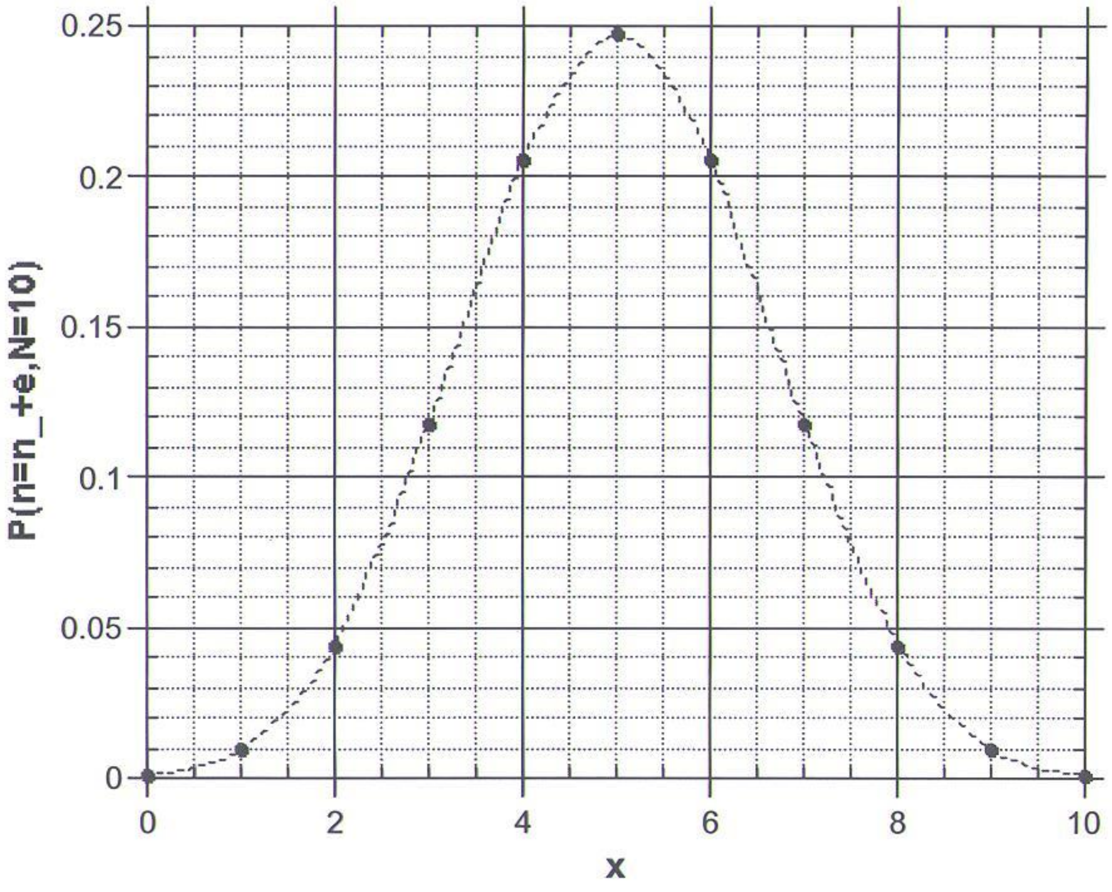
$$\binom{10}{4} = \frac{10!}{4!\,6!} = 210 \qquad 0.206$$

$$\binom{10}{5} = \frac{10!}{5!\,5!} = 252 \qquad 0{,}247$$

$$\sum_{0}^{10}{}'_{n} P(n, 10) \simeq 1.0046$$

$$P(n,N) = \binom{N}{n} * (1/2)^N$$

0.0000	0.00098000
1.0000	0.0098000
2.0000	0.044000
3.0000	0.11800
4.0000	0.20600
5.0000	0.24700
6.0000	0.20600
7.0000	0.11800
8.0000	0.044000
9.0000	0.0098000
10.000	0.00098000



per $N \gg 1$, in generale:

$$X - N\varepsilon < x < X + N\varepsilon$$

$$N = n_{+\varepsilon} + n_{-\varepsilon}$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} x = X + n_{+\varepsilon}\cdot(+\varepsilon) + n_{-\varepsilon}\cdot(-\varepsilon) = \\ \quad = X + n_{+\varepsilon}\cdot(+\varepsilon) + (N - n_{+\varepsilon})\cdot(-\varepsilon) = \\ \quad = X + (2n_{+\varepsilon} - N)\cdot(+\varepsilon) \\ n_{+\varepsilon}\ \min = 0 \rightarrow x = X + (0 - N)\cdot(+\varepsilon) = \\ \qquad\qquad = X - N\cdot\varepsilon \\ n_{+\varepsilon}\ \max = N \rightarrow x = X + (2N - N)\cdot(+\varepsilon) = \\ \qquad\qquad = X + N\cdot\varepsilon \end{cases}$$

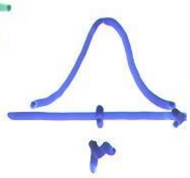
$$P(n_{+\varepsilon}, N) = \binom{N}{n_{+\varepsilon}}\left(\frac{1}{2}\right)^N$$

$$\langle n_{+\varepsilon}\rangle = N\cdot\frac{1}{2} \quad ; \quad \sigma = \frac{\sqrt{N}}{2} \ ;$$

simmetrica ..... anzi, gaussiana!

Le misure ripetute di una G.F. fatte con uno strumento di elevata sensibilità si disperderanno su di un intervallo secondo GAUSS per via di molti piccoli effetti ciascuno con $p \sim 50\%$ di avvenire o meno e ciascuno alterando in modo minimo le misure

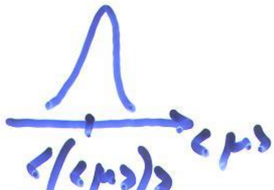
→ fluttuazioni ≈ continue attorno al valore medio in entrambi i versi



Anche se le fluttuazioni non seguono la distribuzione di Gauss, aiuta il

→ TEOREMA DEL LIMITE CENTRALE :

Compiendo più serie di misure, ciascuna formata da tante misure, calcolo per ciascuna serie sia "< >" che "σ"; se "σ" è finita allora la distribuzione dei valori medi "< >" sarà di tipo gaussiano attorno alla media delle medie.



Tanto più quanto le popolazioni dei campioni sono "numerose"

x = variabile casuale
di cui non conosciamo la funzione di distribuzione

N = dimensione del campione formato dalle N
misure ripetute di x : $x_1, x_2, \ldots, x_N$

$$\rightarrow \begin{cases} \langle x \rangle_{campione} = \dfrac{\sum_1^N j \, x_j}{N} \\ \sigma_{campione} = \sqrt{\dfrac{\sum_1^N j \left(x_j - \langle x \rangle_{campione} \right)^2}{N-1}} \end{cases}$$

$$\sigma_{\langle x \rangle} = \frac{\sigma_{camp}}{\sqrt{N}}$$

$\rightarrow$ se N non è troppo piccolo, cioè $N \gtrsim 10$

allora ripetendo la serie di N misure più volte
i vari $\langle x \rangle_{campione}$ ricavabili
saranno distribuiti in maniera
"gaussiana" attorno alla media delle medie
con una deviazione standard
data da $\sigma_{campione} / \sqrt{N}$:

$$P\left(\langle(\langle x \rangle_{camp})\rangle - \frac{\sigma_{campione}}{\sqrt{N}} < \langle x \rangle_{camp} < \langle(\langle x \rangle_{camp})\rangle + \frac{\sigma_{camp}}{\sqrt{N}} \right)$$

$\approx 68{,}3\%$ o equivalentemente:

$$P\left(\langle x \rangle_{camp} - \frac{\sigma_{camp}}{\sqrt{N}} < \langle(\langle x \rangle_{camp})\rangle < \langle x \rangle_{camp} + \frac{\sigma_{camp}}{\sqrt{N}} \right)$$

Infatti:

$$\bar{\bar{x}} - \frac{\sigma_{camp}}{\sqrt{N}} < \bar{x}_{camp} < \bar{\bar{x}} + \frac{\sigma_{camp}}{\sqrt{N}}$$

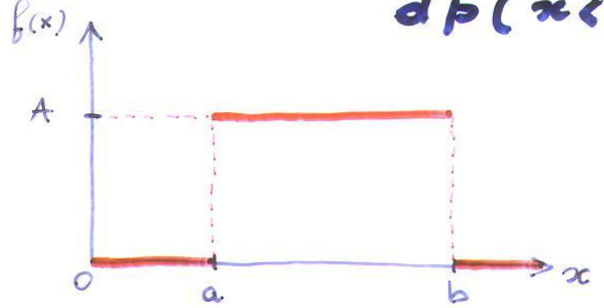
$$\bar{\bar{x}} < \bar{x}_{camp} + \frac{\sigma_{camp}}{\sqrt{N}} \qquad \bar{\bar{x}} > \bar{x}_{camp} - \frac{\sigma_{camp}}{\sqrt{N}}$$

$$\boxed{\bar{x}_{camp} - \frac{\sigma_{camp.}}{\sqrt{N}} < \bar{\bar{x}} < \bar{x}_{camp.} + \frac{\sigma_{camp.}}{\sqrt{N}}}$$

UNIFORME

- **Distribuzione** di probabilità **continua** di tipo **uniforme o rettangolare**

$$dp(x < x < x+dx) = f(x)\,dx$$



$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) = A = \text{costante} \\ \text{in } a \leq x \leq b \\ f(x) = 0 \quad \text{altrove} \end{array}}$$

→ condizione di **normalizzazione**:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

$$A(b-a) = 1 \longrightarrow \boxed{A = \frac{1}{b-a}}$$

→ **valore aspettato di x**:

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}\,dx =$$

$$= \frac{1}{(b-a)} \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{(b-a)} \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$$

$$\boxed{\langle x \rangle = \frac{b+a}{2}}$$

→ **varianza:**

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \langle x \rangle)^2 f(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b \frac{1}{b-a} (x - \langle x \rangle)^2 \, d(x - \langle x \rangle) =$$

$$= \frac{1}{(b-a)} \left[\frac{(x - \langle x \rangle)^3}{3} \right]_a^b = \frac{(b - \langle x \rangle)^3 - (a - \langle x \rangle)^3}{3(b-a)}$$

$$\begin{cases} b - \langle x \rangle = b - \dfrac{b+a}{2} = \dfrac{2b-b-a}{2} = \dfrac{b-a}{2} \rightarrow (b-\langle x \rangle)^3 = \dfrac{(b-a)^3}{8} \\ a - \langle x \rangle = a - \dfrac{b+a}{2} = \dfrac{2a-b-a}{2} = -\dfrac{b-a}{2} \rightarrow (a-\langle x \rangle)^3 = -\dfrac{(b-a)^3}{8} \end{cases}$$

$$= \frac{(b-a)^3 + (b-a)^3}{3 \cdot 8 \, \cancel{(b-a)}} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

→ **deviazione standard:**

$$\boxed{\sigma = \frac{b-a}{\sqrt{12}}}$$

Se: b-a = 2Δ ➔ σ = Δ / (3)$^{1/2}$

$$\boxed{\int_{\langle x\rangle-\sigma}^{\langle x\rangle+\sigma} f(x)\,dx = ?} \qquad \begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{b-a} \\ a\le x\le b \end{cases}$$

$$\langle x\rangle \pm \sigma = \frac{b+a}{2} \pm \frac{b-a}{\sqrt{12}}$$

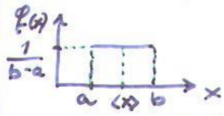
$$\int_{\langle x\rangle-\sigma}^{\langle x\rangle+\sigma} \frac{dx}{b-a} = \frac{(\langle x\rangle+\sigma)-(\langle x\rangle-\sigma)}{b-a} =$$

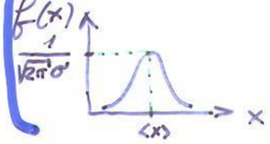
$$= \frac{2\sigma}{b-a} = \frac{2}{b-a}\cdot\frac{b-a}{\sqrt{12}} = \frac{2}{\sqrt{12}} \approx 57.7\%$$

Il significato di σ è diverso nel caso di una distribuzione di Gauss o di una "piatta"

Infatti

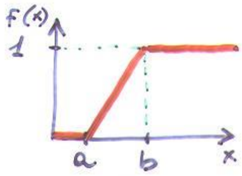
$$P\left(\langle x\rangle-\sigma < x < \langle x\rangle+\sigma\right) = \begin{cases} 57.7\% \\ 68.3\% \end{cases}$$

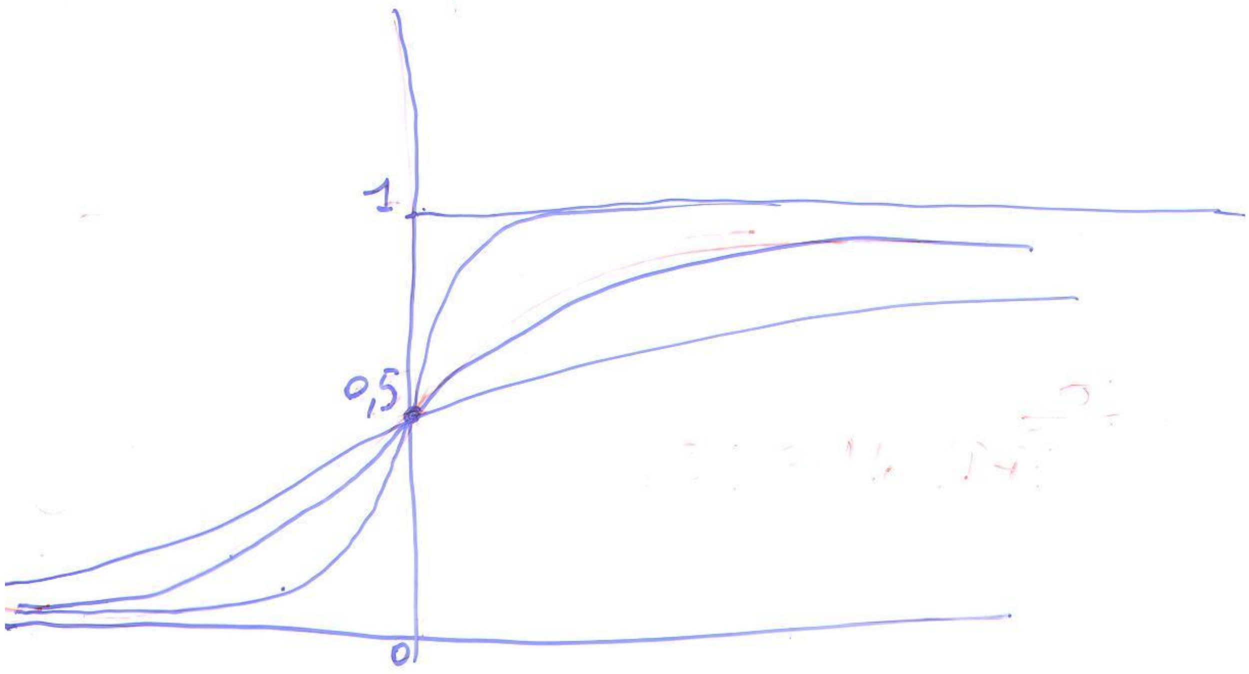




→ funzione cumulativa

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x')\,dx' = \int_{a}^{x} \frac{dx}{b-a} = \frac{x-a}{b-a}$$




1
0,5
0

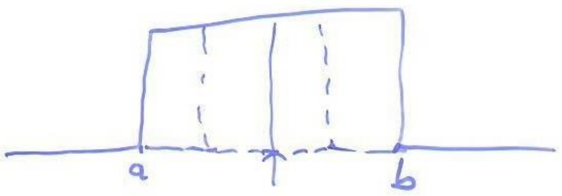
In generale: $\displaystyle\int_{\langle x\rangle - k\sigma}^{\langle x\rangle + k\sigma} \frac{dx}{b-a} = \frac{1}{b-a}\left[(\cancel{\langle x\rangle} + k\sigma) - (\cancel{\langle x\rangle} - k\sigma)\right] =$

$$= \frac{1}{b-a}\left(2k\sigma\right) = \frac{2k}{\cancel{(b-a)}} \cdot \frac{\cancel{(b-a)}}{\sqrt{12}}$$

$$\hookrightarrow \quad \int_{\langle x\rangle - k\sigma}^{\langle x\rangle + k\sigma} \frac{dx}{b-a} = 1 \;\rightarrow\; \frac{2k\sigma}{b-a} = 1 \;\rightarrow\; k \cong 1{,}73$$

$$\hookrightarrow \quad \int_{\langle x\rangle - k\sigma}^{\langle x\rangle + k\sigma} \frac{dx}{b-a} = 68.3\% \;\rightarrow\; \frac{2k\sigma}{b-a} = 0.683$$

$$k = \frac{(b-a)\cdot 0{,}683}{2} \cdot \frac{\sqrt{12}}{(b-a)} \;\rightarrow\; k \cong 1{,}18$$

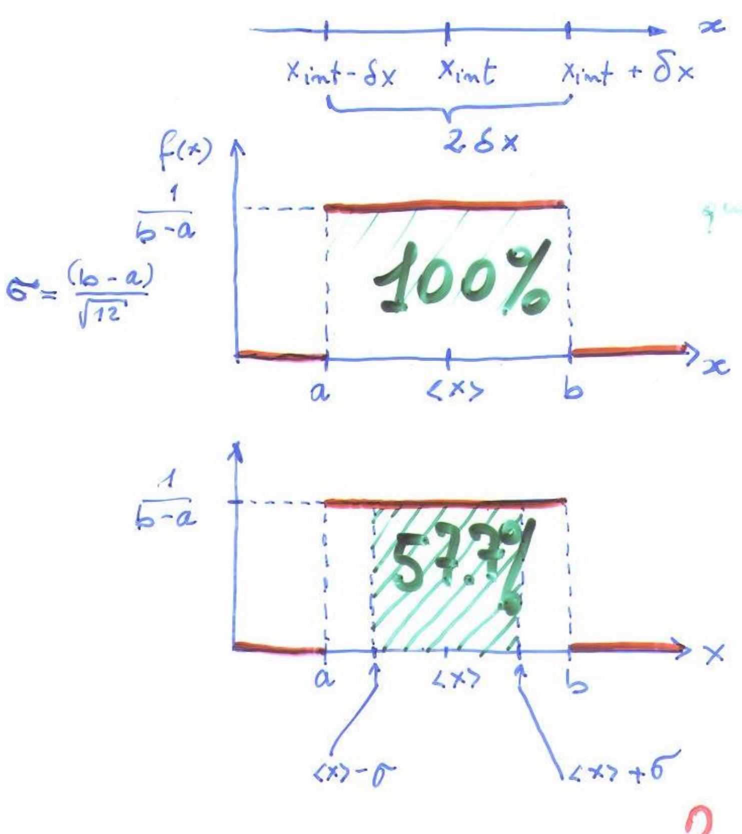


Osservazione sulla f(x) di tipo rettangolare:

→ se non ho alcuna informazione sulla f(x) posso usare questa ipotesi minimale?

?!

È il caso dell'incertezza di sensibilità assunta quale incertezza massima: posso stimare l'incertezza statistica pur non avendo informazioni sulla f(x) reale, ipotizzando che sia di tipo "rettangolare".



$x_{int} \pm \delta x$

$\langle x \rangle \pm \frac{b-a}{2}$

quindi:

$$\begin{cases} \langle x \rangle \simeq x_{int} \\ \delta x = \frac{\sigma\sqrt{12}}{2} \rightarrow \sigma = \frac{2\cdot\delta x}{\sqrt{12}} \end{cases}$$

$$\boxed{\sigma \simeq \frac{\delta x}{1.73}}$$

$\frac{\delta x}{1{,}73}$

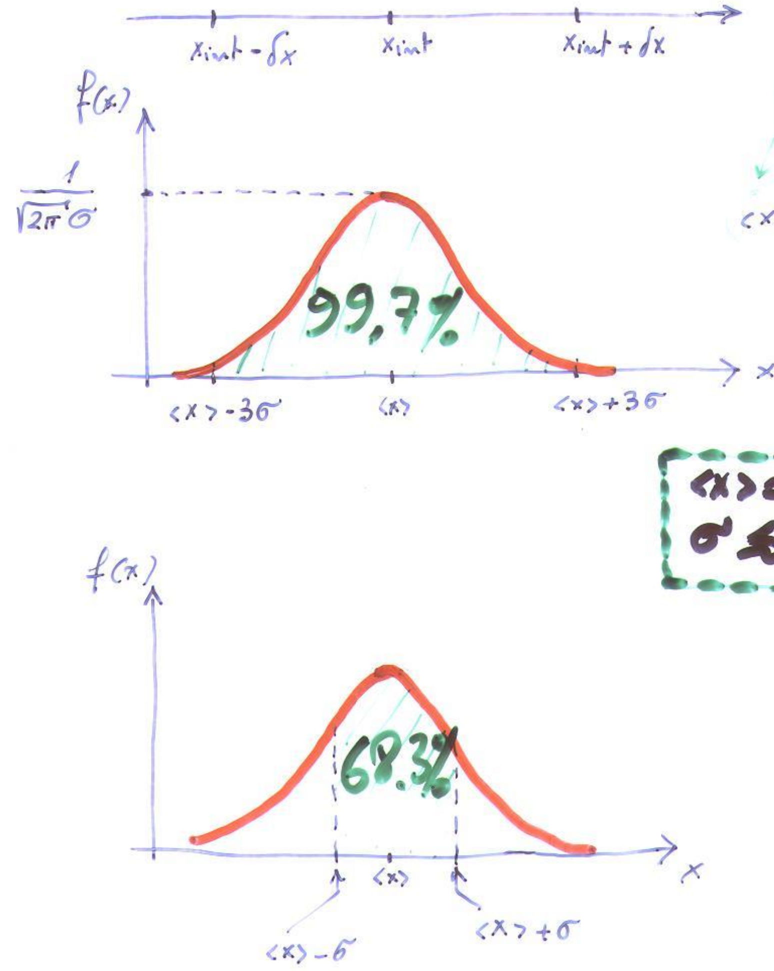
$x_{int} \pm \sigma_{piatta}$

?

$P \simeq 57{,}7\%$

→ Se invece ho elementi per ipotizzare che la $f(x)$ sia di tipo "gaussiano" (teorema del limite centrale)

?! allora posso stimare l'incertezza statistica pur avendo solo l'incertezza massima dovuta alla sensibilità.



$x_{int} \pm \delta x$

$\langle x \rangle \pm 3\sigma$

$$\boxed{\begin{gathered}\langle x \rangle \simeq x_{int} \\ \sigma \simeq \frac{\delta x}{3}\end{gathered}}$$

$\frac{\delta x}{3}$

? $x_{int} \pm \sigma_{gauss}$

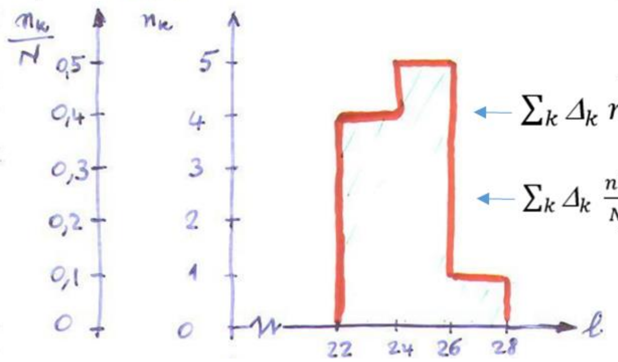
$P = 68,3\%$

Rappresentazione grafica di misure ripetute

l (cm)
26,4
23,9
25,1
24,6
22,7
23,8
25,1
23,9
25,3
25,4

$\rightarrow$

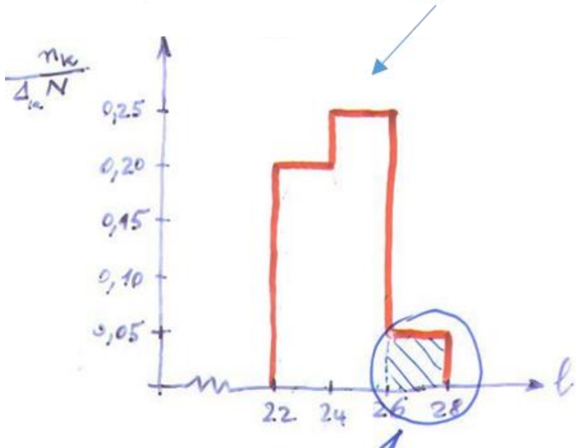
$l_k \le l < l_k+\Delta$	n_k	n_k/N	$\frac{n_k}{\Delta_k \cdot N}$
22 ⊢ 24	4	0,4	0,20
24 ⊢ 26	5	0,5	0,25
26 ⊢ 28	1	0,1	0,05



$\sum_k \Delta_k \, n_k = 2 \times 4 + 2 \times 5 + 2 \times 1 = 20cm$

$\sum_k \Delta_k \, \frac{n_k}{N} = 2 \times 0.4 + 2 \times 0.5 + 2 \times 0.1 = 2.0cm$

$$\sum_k \Delta_k \, \frac{n_k}{N\Delta_k} = 2 \times 0.20 + 2 \times 0.25 + 2 \times 0.05 = 1$$



$$\boxed{\sum_k \Delta_k \, \frac{n_k}{N\Delta_k} = 1}$$

cioè l'area totale dell'istogramma è normalizzata ad uno

Quest'area $\underbrace{}_{}$ (=0,1) rappresenta la frazione delle misure nell'intervallo di lunghezza $\Delta_k = 2$ cm