La distribuzione geometrica di una variabile aleatoria discreta ci dice la probabilità che si realizzi l'evento che ci interessa (successo) una 1ª volta in x prove.

p = probabilità del verificarsi dell'evento successo

$q = 1 - p$ = probabilità del non verificarsi dell'evento successo

$$\boxed{P(x) = (1-p)^{x-1} \cdot p}$$

con $x = 1, 2, 3, \ldots$

... rappresenta la probabilità che il 1° successo richieda l'esecuzione di x prove indipendenti di cui $x-1$ prove sono fallimenti e solo la prova x-esima è un 1° successo

$$\Rightarrow \sum_{x=1}^{\infty} P(x) = \sum_{1}^{\infty} (1-p)^{x-1} \cdot p = 1$$

$$\Rightarrow E(x) = \frac{1}{p}$$

$$\Rightarrow \sigma^2(x) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

$\Rightarrow$ La variabile aleatoria della distribuzione geometrica gode della proprietà di "assenza di memoria"

$\boxed{\text{Esempio:}}$ probabilità che un dado a 6 facce debba essere lanciato proprio 10 volte per avere un "4" una 1ª volta.

$$p = \frac{1}{6} \cong 17\%$$

$$q = 1 - p = \frac{5}{6} \cong 83\%$$

$$E(x) = \frac{1}{p} = 6$$

$$\sigma^2(x) = \frac{q}{p^2} = \frac{5}{6} \times 6^2 = 30$$

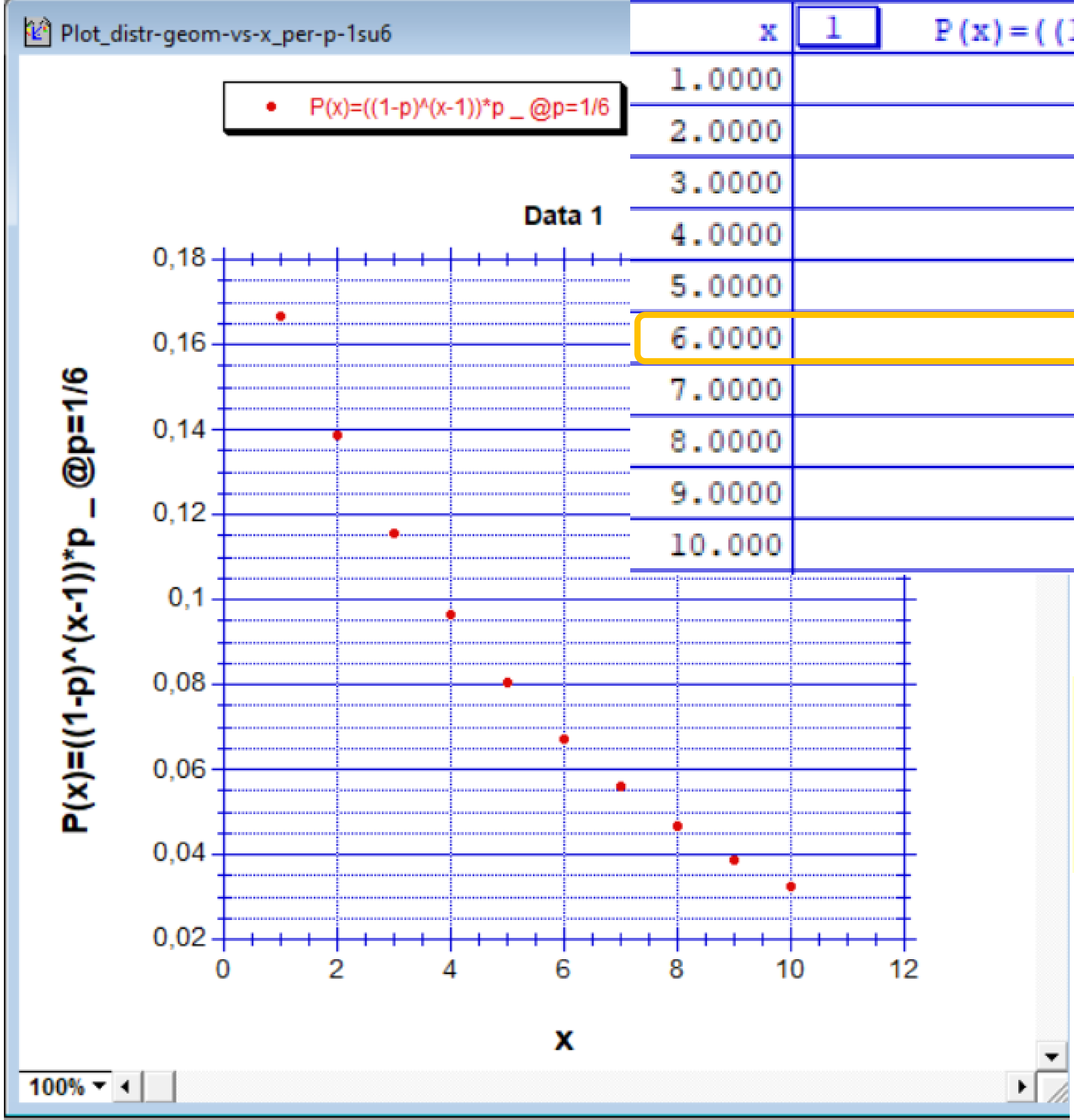
$$\sigma(x) \cong 5{,}5$$

$$P(x=10) = (1-p)^{10-1} \cdot p = \underbrace{\left(\frac{5}{6}\right)^9}_{\cong 19\%} \cdot \left(\frac{1}{6}\right) \cong 3{,}2\%$$

$\vdots$

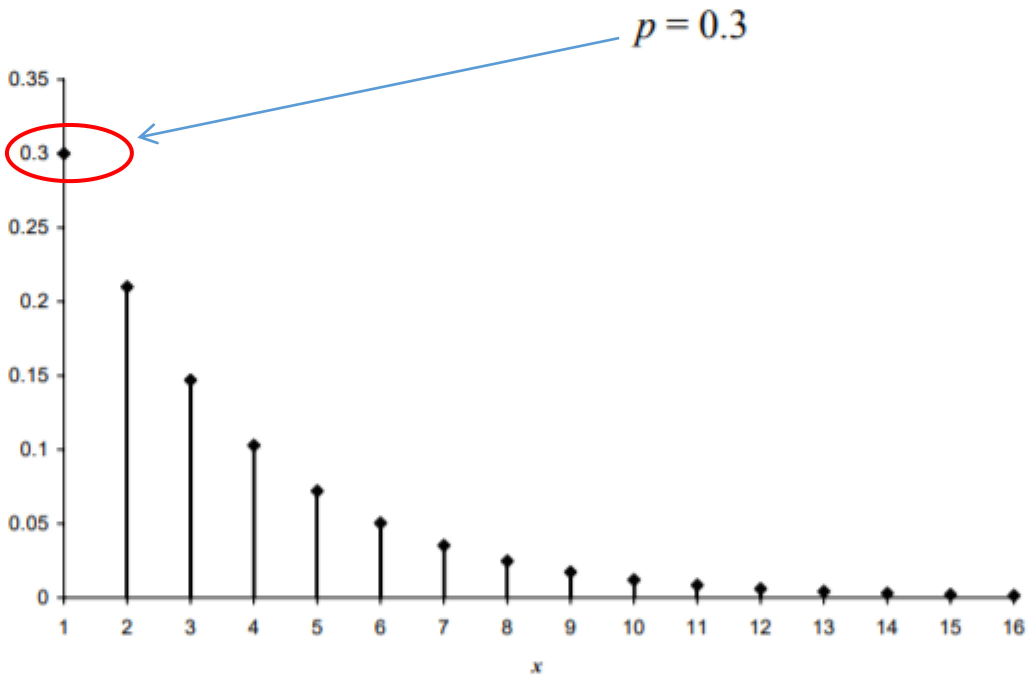
$$P(x=1) = (1-p)^{1-1} \cdot p \cong 17\% \iff \boxed{P(x=1) = p}$$

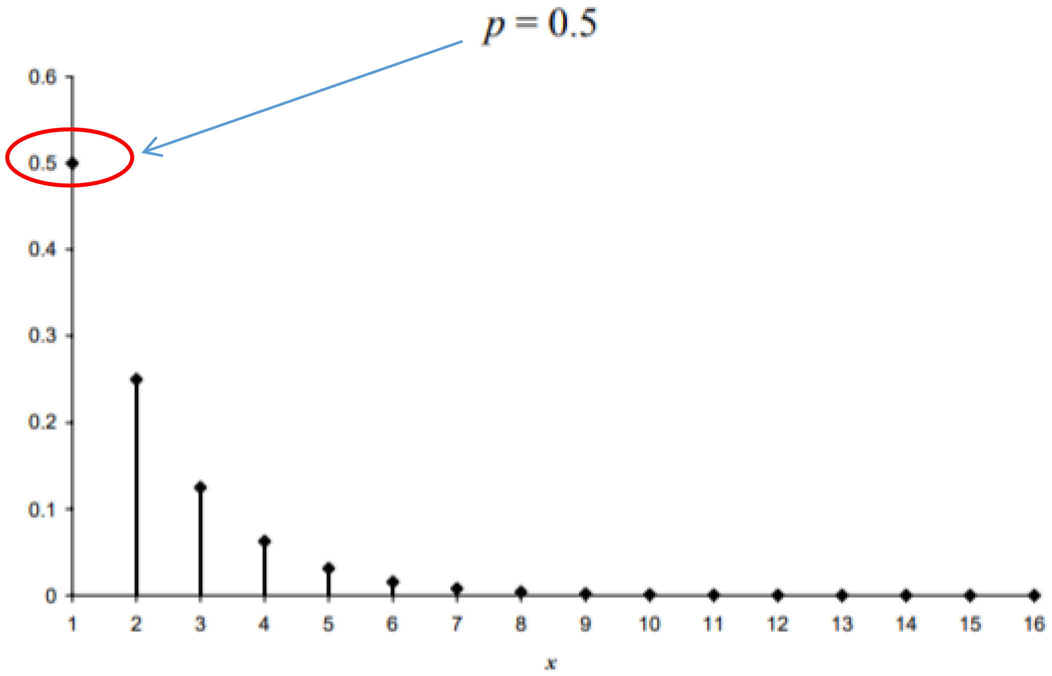
L'evento "successo" è sempre più probabile che accada alla 1ª prova $(x=1)$ piuttosto che si realizzi successivamente, cioè alla prova x-esima con $x > 1$.

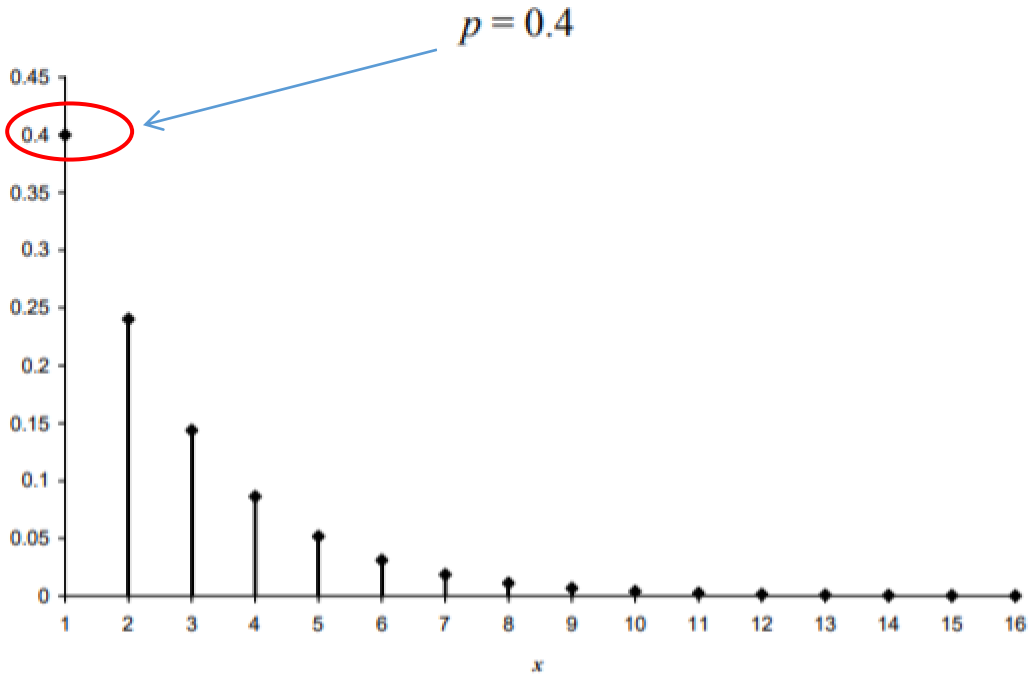


x	1 P(x)=((1-p)^(x-1))*p _ @p=1/6	Cumulata(x)
1.0000	0.16667	0.17
2.0000	0.13889	0.31
3.0000	0.11574	0.43
4.0000	0.096451	0.53
5.0000	0.080376	0.61
6.0000	0.066980	0.68
7.0000	0.055816	0.74
8.0000	0.046514	0.79
9.0000	0.038761	0.83
10.000	0.032301	0.86

Bisogna aspettare x=6 lanci per cumulare una probabilità totale almeno pari al 68% di ottenere un 4 nel lancio di un dado







$$\boxed{P(x) = (1-p)^{x-1} \cdot p}$$

➔ $P(x=1) = (1-p)^{(1-1)}\, p^1 = p$

Esempio 1

probabilità di avere TESTA al 1°, 2°, ... lancio di una moneta

$$\begin{cases} p = \frac{1}{2} = 50\% \\ q = 1-p = \frac{1}{2} = 50\% \end{cases}$$

$$E(x) = \frac{1}{p} = 2$$

$$\sigma^2(x) = \frac{q}{p^2} = \frac{1}{2} \times 2^2 = 2$$

$$\sigma(x) \simeq 1{,}4$$

$$P(x=1) = (1-p)^{1-1} \cdot p = p = 50\%$$

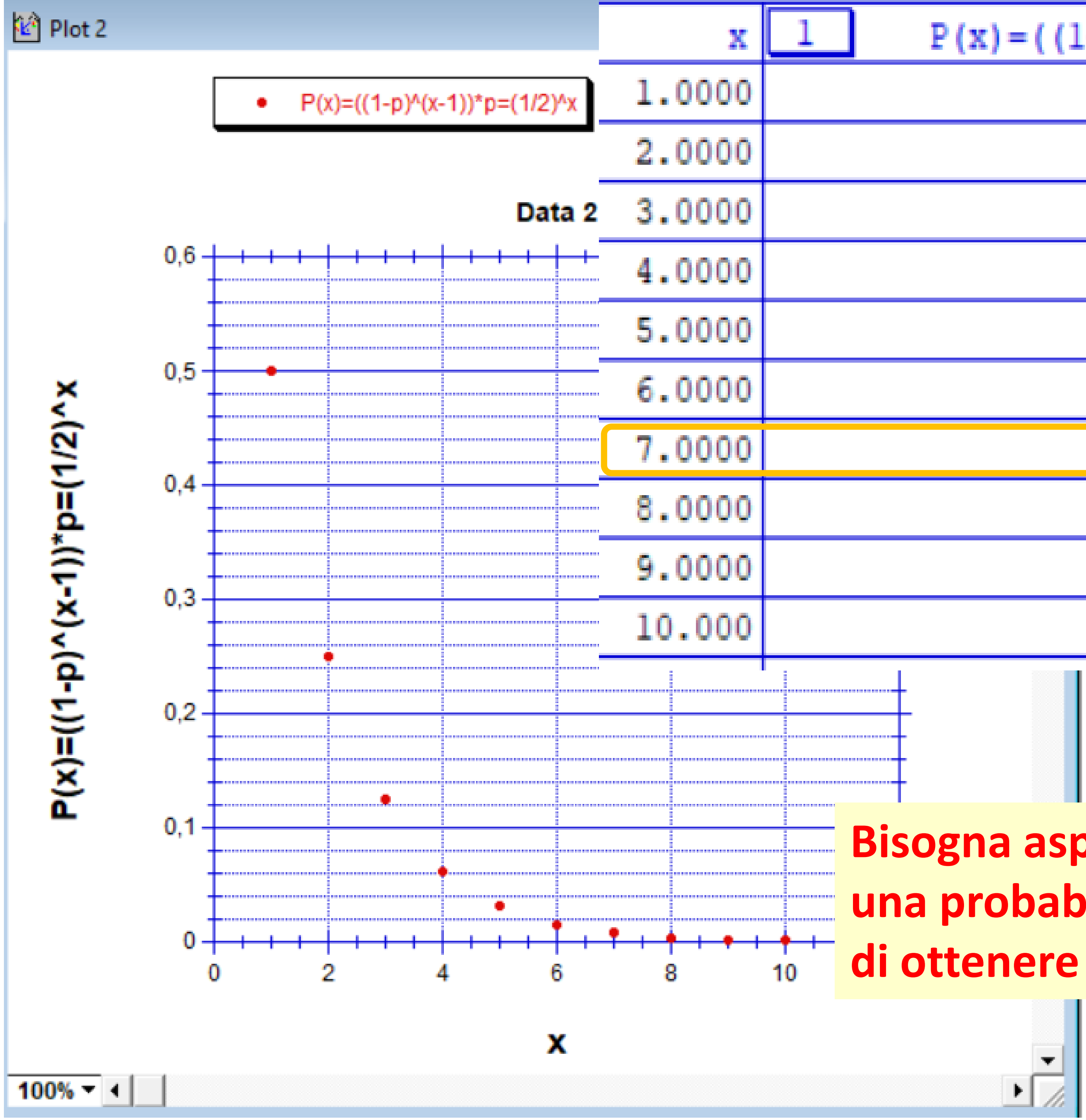
$$P(x=2) = (1-p)^{2-1} \cdot p = q \cdot p = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 0{,}25$$

$$P(x=3) = (1-p)^{3-1} \cdot p = q^2 \cdot p = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} = 0{,}12$$

$$P(x=4) = (1-p)^{4-1} \cdot p = q^3 \cdot p = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0{,}06$$

$$\vdots$$

$$P(x=n) = (1-p)^{n-1} \cdot p = \frac{1}{2^n}$$



x	1 P(x)=((1-p)^(x-1))*p=(1/2)^x	Cumulata(x)
1.0000	0.50000	0.500
2.0000	0.25000	0.750
3.0000	0.12500	0.875
4.0000	0.062500	0.937
5.0000	0.031250	0.969
6.0000	0.015625	0.984
7.0000	0.0078125	0.992
8.0000	0.0039062	0.996
9.0000	0.0019531	0.998
10.000	0.00097656	0.999

Bisogna aspettare x=7 lanci per cumulare una probabilità totale almeno pari al 99% di ottenere TESTA nel lancio di una moneta

Esempio

In una analisi di laboratorio un esperimento ha il 30% di probabilità da dare esito positivo $\boxed{(\text{successo}, p = 0{,}30)}$.
Quante prove occorre effettuare per avere una probabilità di esito positivo pari al $\boxed{90\%}$?

x	P(x)	$\Sigma_x P(x)$
1.0000	0.3000	0.30000
2.0000	0.2100	0.51000
3.0000	0.1470	0.65700
4.0000	0.1029	0.75990
5.0000	0.07203	0.83193
6.0000	0.05042	0.88235
7.0000	0.03529	0.91764
8.0000	0.02471	0.94235
9.0000	0.01729	0.95964
10.000	0.01211	0.97175
11.000	0.008474	0.98022
12.000	0.005932	0.98616
13.000	0.004152	0.99031
14.000	0.002907	0.99322
15.000	0.002035	0.99525
16.000	0.001424	0.99667
17.000	0.0009970	1.0066

$$P(x) = (1-p)^{x-1} \cdot p$$