Note su esperienza con il volano

Cosa è un volano?

...una **massa** più o meno "grande" **collegata solidalmente all'albero motore di una macchina.**

A cosa serve un volano nelle macchine?

... serve ad **accumulare energia cinetica** nelle fasi di eccesso di produzione per averla a disposizione nelle fasi di carenza.

... la **capacità di accumulo di energia in un volano aumenta**, oltre che **con l'aumentare della massa**, anche con il **crescere al quadrato della distanza di questa dall'asse di rotazione** (I_0: "**momento di inerzia**" intorno all'asse di rotazione).

"**cambiare la velocità significa anche cambiare la potenza**":

Potenza = Lavoro / Tempo
= Forza x Spostamento / Tempo
= Forza x **Velocità**

... **tutte le macchine che hanno un regime di velocità variabile hanno necessità del volano.**

E' quindi un **regolatore della velocità e della potenza** della macchina alla quale è applicato.

Il volano e' realizzato da un **disco in alluminio** di raggio 20 cm, libero di ruotare attorno ad un "asse fisso" passante per il suo centro geometrico che coincide altresì con il suo CM.

Su tale asse, attorno ad un **cilindretto** di raggio 0.5 cm solidale con il disco d'alluminio, e' avvolto un **filo** che passando per una carrucola è attaccato ad un **cilindro** sospeso di massa ≈ **600g**.

In prossimita' del bordo del disco ci sono 20 **fori** in cui e' possibile inserire dei **bulloni** (55 g) **modificando così il suo momento d'inerzia**.

Infine, si possono fissare sul disco delle **palette**, **modificando così il comportamento dinamico del volano**.

Possibili sistemi di acquisizione per il volano:

1) Si puo' **acquisire su PC la posizione del peso lungo la verticale** mano a mano che si sposta, per esempio in due modi:

a) Posizionando un **encoder rotativo** sull'asse della puleggia,
… del tipo di quelli usati nella esperienza del pendolo fisico.

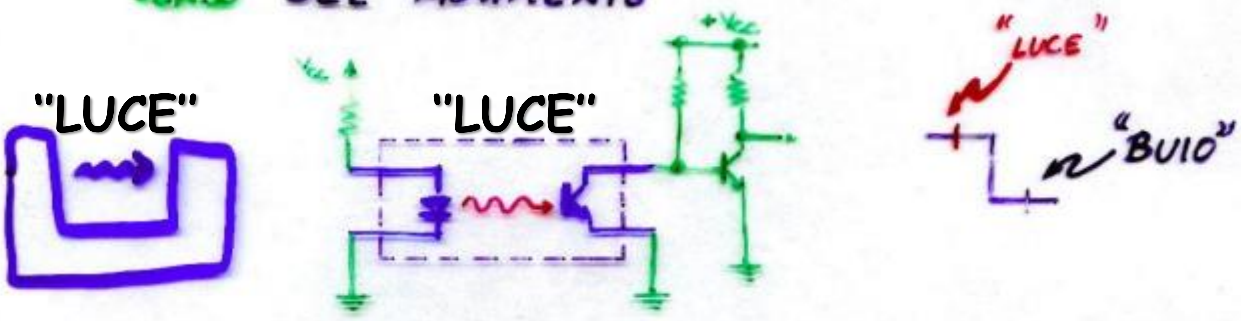
b) Posizionando sotto di esso un **sensore ad ultrasuoni** orientato verso l'alto,
… del tipo di quelli utilizzati nelle esperienze con i carrelli.

2) Alternativamente, sulla vertical, lungo la quale il peso si puo' muovere, ci sono 15 **sensori** disposti ad una distanza di 5 cm.
… Tirando su il peso e rilasciando il disco d'alluminio, si puo' misurare il tempo impiegato dal peso nella sua discesa dalla altezza massima fino al punto in cui e' presente un sensore.
I sensori sono collegati ad un PC che permette la lettura dei dati.

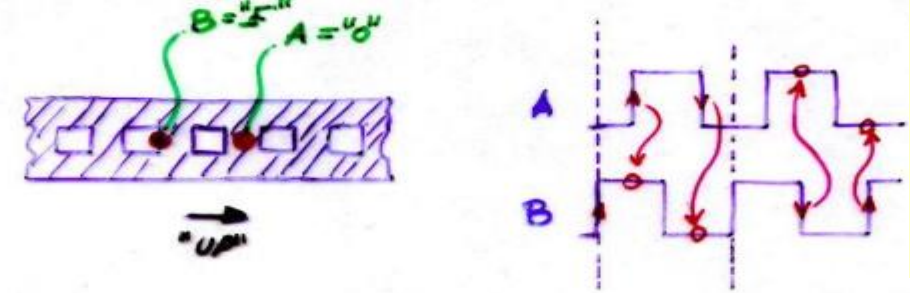

DISCRIMINAZIONE DEL VERSO DI SPOSTAMENTO DI UN OGGETTO

- GLI ENCODER DI POSIZIONE DI TIPO INCREMENTALE (LINEARE o ANGOLARE) SONO COSTITUITI DA FENDITURE TRASPARENTI EQUIDISTANZIATE PRATICATE SUL SUPPORTO CHE SARA' LINEARE o UN DISCO CIRCOLARE

- DUE FOTO ACCOPPIATORI FISSI E POSIZIONATI IN MODO CHE QUANDO UNO "VEDE" LUCE L'ALTRO "VEDE" BUIO, POSSONO CONTARE E RIVELARE IL SENSO DEL MOVIMENTO

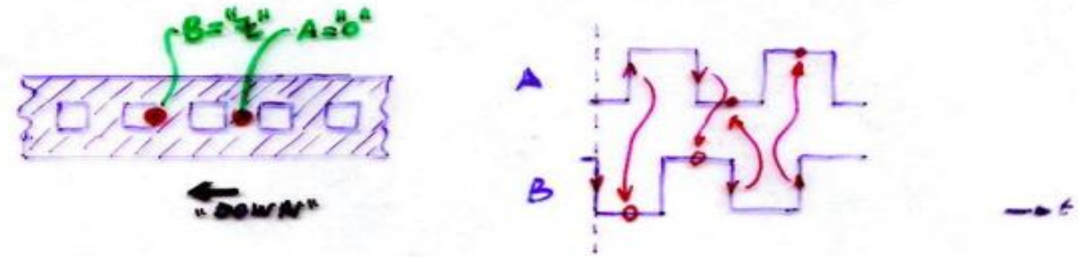


Lo **sfasamento tra i due segnali A e B** deve essere, per costruzione meccanica, pari a ¼ del passo tra le fenditure.



INIZIALMENTE A="0" VEDE BUIO CIOE' BARICENTRATO SUL PIENO
MENTRE B="1" BUIO→LUCE BORDO FENDITURA

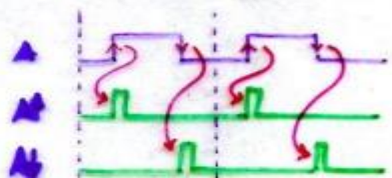
$$UP = (A\uparrow)\cdot B + (A\downarrow)\cdot NOT(B) + (B\uparrow)\cdot NOT(A) + (B\downarrow)\cdot A$$



INIZIALMENTE A="0" VEDE BUIO CIOE' BARICENTRATO SUL PIENO
MENTRE B="1" LUCE→BUIO BORDO FENDITURA

$$DOWN = (A\uparrow)\cdot NOT(B) + (A\downarrow)\cdot B + (B\uparrow)\cdot A + (B\downarrow)\cdot NOT(A)$$

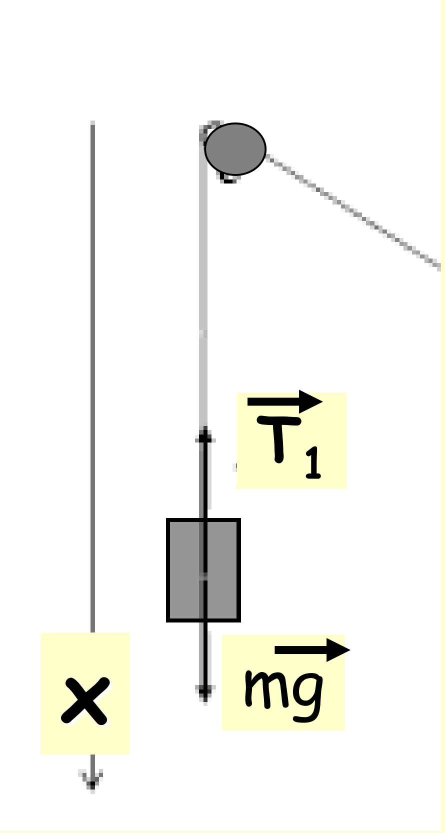
PER **n** IMPULSI DAI FOTO ACCOPPIATORI RICAVO **4n** IMPULSI E SULLA LINEA "UP" E SU QUELLA "DOWN" A SECONDA DEL "SENSO DI MARCIA"



... si tratta di un **nonio elettronico**!

Descrizione schematica del moto del volano

... si scrivono 2 equazioni accoppiate del moto :

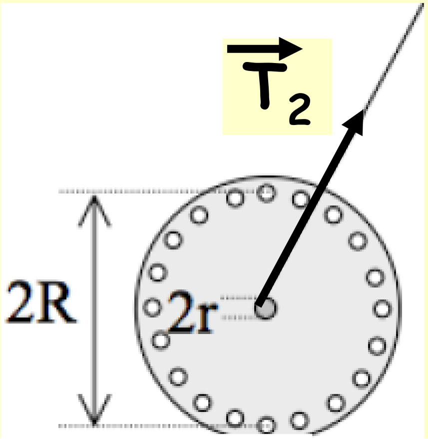


- Punto materiale

$$\boxed{\text{lungo asse x}: \quad m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = mg - T_1}$$

- Corpo rigido
senza bulloni e senza palette sul disco

$$\boxed{\text{lungo asse rotazione disco}: \quad I_0\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = rT_2 - M_a}$$



M_a : momento delle forze resistenti

I_0 : momento di inerzia del disco rispetto ad un asse orizzontale passante per il suo CM

… si assume che il **filo** che collega il volano alla massa sia:

- **Inestensibile**: l'angolo di cui ruota il disco (**Δθ**) moltiplicato per il raggio **r** della puleggia fissata sul disco stesso è pari allo spostamento lineare (**Δx**) del peso.

$$\Rightarrow \quad \Delta \mathrm{x} = \mathrm{r}\Delta\vartheta$$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{dx}{dt} = r\frac{d\vartheta}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{d^2x}{dt^2} = r\frac{d^2\vartheta}{dt^2}$$

- **Massa trascurabile**: la tensione è la stessa in ogni sezione del filo stesso

$$\Rightarrow \quad T_1 = T_2 = T$$

$$\begin{cases} ma = mg - T \\ I_0 \dfrac{a}{r} = rT - M_a \Rightarrow T = \left(I_0 \dfrac{a}{r} + M_a\right)\dfrac{1}{r} = \boxed{\dfrac{I_0 a}{r^2} + \dfrac{M_a}{r}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow ma = mg - \frac{I_0 a}{r^2} - \frac{M_a}{r}$$

$$a\left(m + \frac{I_0}{r^2}\right) = mg - \frac{M_a}{r}$$

$$a\,\frac{mr^2 + I_0}{\cancel{r^2}} = \frac{mgr - M_a}{\cancel{r}} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{a = \frac{mgr^2 - M_a r}{mr^2 + I_0}}$$

… senza bulloni e senza palette sul disco, il moto di discesa del peso è perciò uniformemente accelerato

Osservazioni sul moto uniformemente accelerato in fase di discesa del peso senza bulloni e senza palette sul disco

Ma = Momento delle forze resistenti

I_0 = Momento di inerzia del disco rispetto ad un asse orizzontale passante per il suo CM

$$\boxed{a = \frac{mgr^2 - M_a r}{mr^2 + I_0}}$$

$$\Rightarrow \quad se \quad M_a \approx 0 \qquad \Rightarrow \quad a \approx \frac{mgr^2}{mr^2 + I_0}$$

$\boxed{a \approx g(1-I_0/(mr^2))}$

$$\Rightarrow \quad se \quad M_a \approx 0 \quad \& \quad I_0 << mr^2 \qquad \Rightarrow \quad a \approx g$$

$$\Rightarrow \quad se \quad I_0 >> mr^2 \qquad \Rightarrow \quad a \approx 0$$

Tensione T nel filo durante la fase di discesa del peso senza bulloni e senza palette montate sul disco

$$\begin{cases} ma = mg - T \Rightarrow T = m(g-a) \\ a = \dfrac{mgr^2 - M_a r}{mr^2 + I_0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow T = m\left(g - \frac{mgr^2 - M_a r}{mr^2 + I_0}\right) = m\,\frac{\cancel{mgr^2} + gI_0 \cancel{- mgr^2} + M_a r}{mr^2 + I_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{mgI_0 + M_a mr}{mr^2 + I_0}}$$

Moto del volano aggiungendo n coppie di bulloni (μ = massa singolo bullone) sul disco poste in posizioni simmetriche, ma senza palette montate sul disco, il moto di discesa del peso è ancora uniformemente accelerato

$$I_0 \Rightarrow I_0 + 2n\mu R^2$$

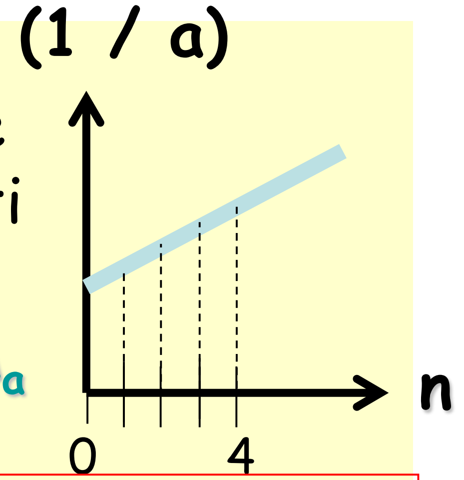
$$a = \frac{mgr^2 - M_a r}{mr^2 + I_0} \Rightarrow a = \frac{mgr^2 - M_a r}{[mr^2 + I_0] + 2n\mu R^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{[mr^2 + I_0]}{mgr^2 - M_a r} + n\frac{2\mu R^2}{mgr^2 - M_a r}$$

$$\frac{1}{a} = \boxed{\frac{[mr^2 + I_0]}{mgr^2 - M_a r}} + n\boxed{\frac{2\mu R^2}{mgr^2 - M_a r}}$$

$$y = A + Bx$$

Fit lineare
con 5 punti
(8 bulloni)
→ I_0 e M_a



$$\Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{mr^2 + I_0}{2\mu R^2} \Rightarrow \boxed{I_0 = 2\mu R^2 \frac{A}{B} - mr^2}$$

$$\Rightarrow A = \frac{\cancel{mr^2} + 2\mu R^2 \frac{A}{B} - \cancel{mr^2}}{mgr^2 - M_a r} \Rightarrow mgr^2 - M_a r = 2\mu R^2 \frac{1}{B} \Rightarrow$$

$$M_a = \frac{1}{r}\left(mgr^2 - \frac{2\mu R^2}{B}\right) \Rightarrow \boxed{M_a = mgr - \frac{2\mu R^2}{rB}}$$

Moto del volano aggiungendo soltanto palette montate sul disco, il moto di discesa risente ora anche del momento dovuto a forze viscose … non è più uniformemente accelerato

$$M_a \Rightarrow M_a + k\frac{v}{r}$$

$$a = \frac{mgr^2 - M_a r}{mr^2 + I_0} \Rightarrow a = \frac{mgr^2 - (M_a + k\frac{v}{r})r}{mr^2 + I_0}$$

Divido per r sia numeratore sia denominatore

$$\Rightarrow (mr + \frac{I_0}{r})a = mgr - (M_a + k\frac{v}{r})$$

$$\Rightarrow (mr + \frac{I_0}{r})a + (M_a + k\frac{v}{r}) = mgr$$

$$(mr+\frac{I_0}{r})a+(M_a+k\frac{v}{r})=mgr$$

$$\Rightarrow (mr+\frac{I_0}{r})\frac{dv}{dt}=mgr-(M_a+k\frac{v}{r})$$

$$\Rightarrow \frac{mr^2+I_0}{\cancel{r}}\frac{dv}{dt}=\frac{mgr^2-rM_a-kv}{\cancel{r}}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{mgr^2-rM_a-kv}=\frac{dt}{(mr^2+I_0)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\frac{d(mgr^2-rM_a-kv)}{(-k)}}{(mgr^2-rM_a-kv)}=\frac{dt}{(mr^2+I_0)}}$$

Equazione differenziale in v risolvibile con il **metodo della separazione delle variabili**

$$\frac{\dfrac{d(mgr^2 - rM_a - kv)}{(-k)}}{(mgr^2 - rM_a - kv)} = \frac{dt}{(mr^2 + I_0)}$$

$$\int_0^v \frac{d(mgr^2 - rM_a - kv)}{(mgr^2 - rM_a - kv)} = \int_0^t \frac{(-k)}{(mr^2 + I_0)} dt$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{mgr^2 - rM_a - kv}{mgr^2 - rM_a}\right) = \frac{(-k)t}{(mr^2 + I_0)}$$

$$\Rightarrow (mgr^2 - rM_a - kv) = (mgr^2 - rM_a)\exp\left(-\frac{kt}{(mr^2 + I_0)}\right)$$

$$per \quad t \to \infty \quad (mgr^2 - rM_a - kv_\infty) = 0$$

$$\boxed{v_\infty = \frac{mgr^2 - rM_a}{k} \qquad \tau = \frac{mr^2 + I_0}{k}} \qquad \boxed{v(t) = v_\infty(1 - \exp(-t/\tau))}$$

… la velocità limite v_∞ raggiunta dalla massa nella sua caduta

- **non** dipende dal momento di inerzia del volano I_0,
- **ma dipende solo** dalle **"cause dissipative frenanti"** sia radenti M_a sia viscose k.

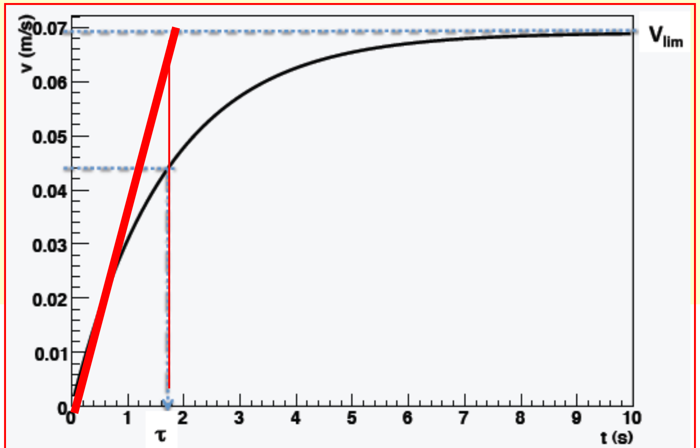
$$\boxed{v_\infty = \frac{mgr^2 - rM_a}{k}}$$

… la costante di tempo τ al contrario

- **non** dipende dal momento frenante M_a
- **ma dipende da** I_0 e k

$$\boxed{\tau = \frac{mr^2 + I_0}{k}}$$

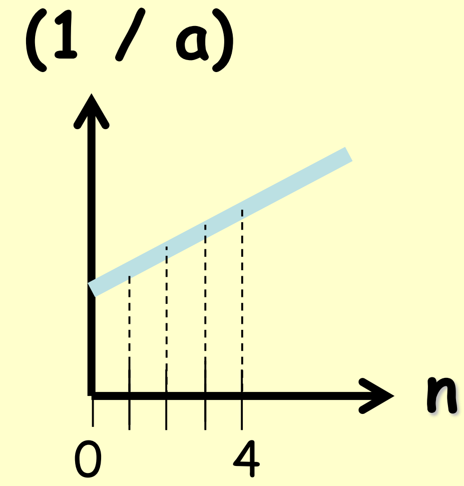
$$\boxed{v(t) = v_\infty(1 - \exp(-t/\tau))}$$



Sommario della strategia nelle misure da fare con il volano:

1) Senza le palette montate sul disco ma con n coppie di bulloni

n = 0, 1, 2, 3, 4



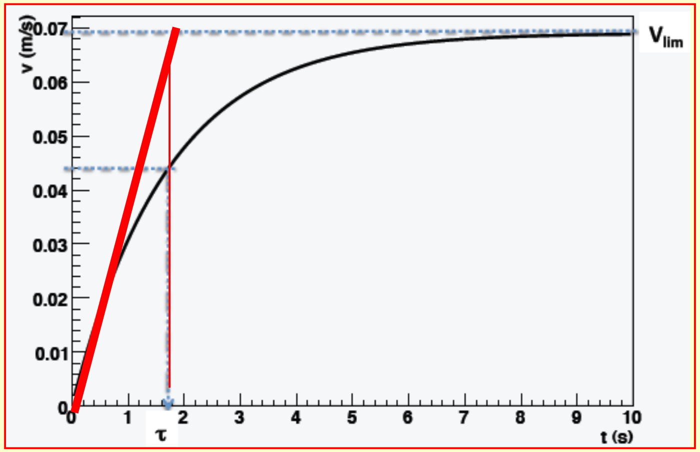
fit lineare

y: (1/a) verso x: n ➔ (1/a) = A + Bn

$$\boxed{\Rightarrow I_0 = 2\mu R^2 \frac{A}{B} - mr^2 \quad e \quad M_a = mgr - \frac{2\mu R^2}{rB}}$$

Sommario della strategia nelle misure da fare con il volano:

2) Con le palette montate sul disco



fit: $$\boxed{v(t) = v_\infty (1 - \exp(-t/\tau))}$$

$$v_\infty = \frac{mgr^2 - rM_a}{k} \qquad \tau = \frac{mr^2 + I_0}{k}$$

$$\boxed{k = \frac{mgr^2 - rM_a}{v_\infty}}$$ Coefficiente di attrito viscoso

Numerologia per l'esperienza con il volano

Volano

errori massimi

VITE + BULLONE = $(54,00 \pm 0,25)\,g$

CILINDRETTO = $(586,50 \pm 0,25)\,g$

SPOLA SUL DISCO diametro = $(2,1000 \pm 0.0025)\,cm$

VOLANO raggio = $(20,60 \pm 0.05)\,cm$

DISTANZA CENTRO FORO - ASSE ROTAZ. = $(18.10 \pm 0.05)\,cm$

VELA $(73,50 \pm 0.25)\,g$

$$\left(\frac{\pm \text{errore max}}{\sqrt{3}} \times 1.18 = \pm \text{errore statistico "al } 68,3\% \text{"} \right)$$

fino a 10 coppie di bulloni sul disco

$\rightarrow \quad I_0 = (1.209 \pm 0.022) \times 10^{-2}\ kg \cdot m^2 \qquad \pm 1.8\%$

$\rightarrow \quad M_a = (2.992 \pm 0.026) \times 10^{-2}\ N \cdot m \qquad \pm 0.88\%$

10 alette fissate sul disco

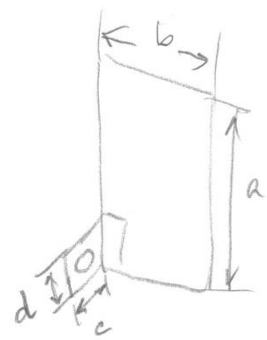
$\rightarrow \quad v(\infty) = (4.10 \pm 0.42)\ m/s \qquad \pm 10\%$

$\rightarrow \quad \tau = (4{,}04 \pm 0{,}14) \times 10^{-2}\ s \qquad \pm 3.5\%$

$(\sigma_{fit} = 6.8 \times 10^{-3}\ m/s)$

$\tau \rightarrow k = (0{,}301 \pm 0.012)\ kg \cdot m^2 \cdot s^{-1} \qquad \pm 4\%$

paletta per il volano



$a = (17.9 \pm 0.05)$ cm

$b = (14.110 \pm 0.0025)$ cm

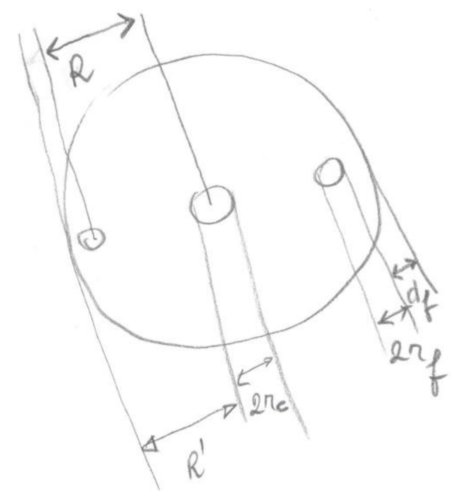
$c = (3.055 \pm 0.0025)$ cm

$d = (3.105 \pm 0.0025)$ cm

spessore a-b $= (0.105 \pm 0.0025)$ cm

spessore c-d $= (0.200 \pm 0.0025)$ cm

raggio del disco del volano



$R = 16.660$ cm

$$R = R' + \frac{2r_c}{2} - d_f - \frac{2r_f}{2}$$

$$\Delta R = \Delta R' + \frac{\Delta 2r_c}{2} + \Delta d_f + \frac{\Delta 2r_f}{2}$$

$$\Delta R = 0.05 + 0.00125 + 0.0025 + 0.00125$$

$$= 0.055 \text{ cm}$$

$$\sigma(R) = \frac{\Delta R}{\sqrt{3}} \times 1{,}18 = 0.037 \text{ cm}$$

$$\frac{1}{a} = \boxed{A} + \boxed{B}\, m$$

$$A = \frac{m r^2 + I_0}{m g r^2 - M_a r} \qquad B = \frac{2 \mu r^2}{m g r^2 - M_a r}$$

$A = (5.129 \pm 0.056)\ s/m^2$ → 1.1 %

$B = (18.89 \pm 0.32)\ s/m^2$ → 1.7 %

$$\begin{cases} I_0 = 2 \mu R^2 \dfrac{A}{B} - m r^2 \\ M_a = m g r - \dfrac{2 \mu R^2}{r B} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma^2(I_0) = \left(\dfrac{\partial I_0}{\partial \mu}\sigma_\mu\right)^2 + \left(\dfrac{\partial I_0}{\partial m}\sigma_m\right)^2 + \left(\dfrac{\partial I_0}{\partial R}\sigma_R\right)^2 + \left(\dfrac{\partial I_0}{\partial A}\sigma_A\right)^2 + \left(\dfrac{\partial I_0}{\partial B}\sigma_B\right)^2 + \left(\dfrac{\partial I_0}{\partial r}\sigma_r\right)^2 + 2(\partial I_0/\partial A)(\partial I_0/\partial B)\sigma(A,B) \\ \sigma^2(M_a) = \left(\dfrac{\partial M_a}{\partial \mu}\sigma_\mu\right)^2 + \left(\dfrac{\partial M_a}{\partial m}\sigma_m\right)^2 + \left(\dfrac{\partial M_a}{\partial R}\sigma_R\right)^2 + \left(\dfrac{\partial M_a}{\partial B}\sigma_B\right)^2 + \left(\dfrac{\partial M_a}{\partial r}\sigma_r\right)^2 \end{cases}$$

$$\frac{\partial I_0}{\partial \mu} = 2R^2\frac{A}{B}, \quad \frac{\partial I_0}{\partial m} = -r^2, \quad \frac{\partial I_0}{\partial R} = 4\mu R\frac{A}{B}, \quad \frac{\partial I_0}{\partial A} = \frac{2\mu R^2}{B},$$

$$\frac{\partial I_0}{\partial r} = -2 m r$$

$$\partial I_0/\partial B = -2\mu R^2 A/B^2$$

$$\frac{\partial M_a}{\partial \mu} = -\frac{2R^2}{rB}, \quad \frac{\partial M_a}{\partial m} = g r, \quad \frac{\partial M_a}{\partial R} = -\frac{4\mu R}{rB}, \quad \frac{\partial M_a}{\partial B} = \frac{2\mu R^2}{rB^2},$$

$$\frac{\partial M_a}{\partial r} = m g + 2\frac{\mu R^2}{r^2 B}$$

$\Rightarrow I_0 = (0.01140 \pm 0.00025)\ kg \cdot m^2$, $M_a = (0.0248 \pm 0.0010)\ J$

→ 2.2 % → 4.0 %

$$\boxed{k = \frac{mgr^2 - r M_a}{v_\infty}}$$

$$\sigma_k = \sqrt{\left(\frac{\partial k}{\partial m}\sigma_m\right)^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial r}\sigma_r\right)^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial M_a}\sigma_{M_a}\right)^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial v_\infty}\sigma_{v_\infty}\right)^2}$$

$$\frac{\partial k}{\partial m} = \frac{gr^2}{v_\infty}, \quad \frac{\partial k}{\partial r} = \frac{2mgr - M_a}{v_\infty},$$

$$\frac{\partial k}{\partial M_a} = \frac{-r}{v_\infty}, \quad \frac{\partial k}{\partial v_\infty} = \frac{r M_a - mgr^2}{v_\infty^2},$$

$$\Rightarrow \quad k = (0.01486 \pm 0,00021)\ \mathrm{J \cdot s}$$ ➔ 1.4 %

$v_\infty = (0.04078 \pm 0.00049)\ \mathrm{m/s}$ ➔ 1.2 %

$M_a = (0.0248 \pm 0.0010)\ \mathrm{J}$

$g = 9,804\ \mathrm{m/s^2}$

$m = (0,05370 \pm 0.00034)\ \mathrm{kg}$

$2r = (1,6150 \pm 0.0017)\ \mathrm{cm}$

$$v(t) = v(\infty)\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

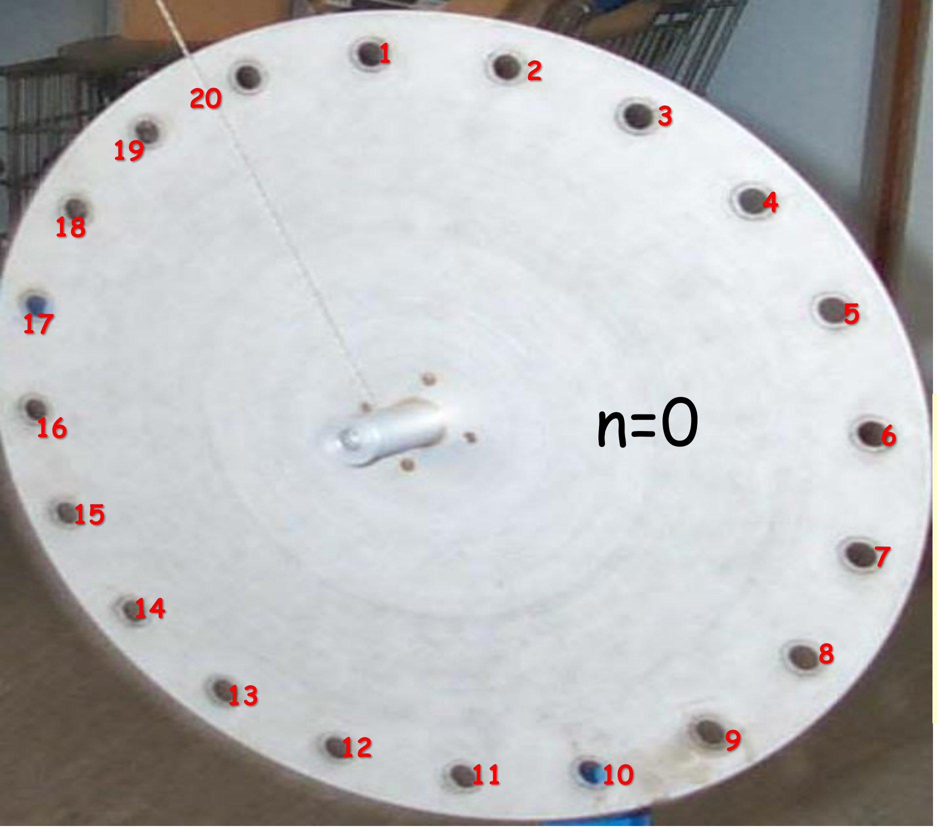
$\downarrow$ integrando $v(t)$ in funzione del tempo in dt

$$x(t) = v(\infty)\left(\tau e^{-t/\tau} + t\right)$$

$$x(t) = v(\infty)\,\tau e^{-t/\tau} + v(\infty)\cdot t$$

$$\frac{d}{dt}x(t) = v(\infty)\cancel{\tau}\left(-\frac{1}{\cancel{\tau}}\right)e^{-t/\tau} + v(\infty) =$$

$$= v(\infty)\left[1 - e^{-t/\tau}\right] \qquad \text{ok}$$



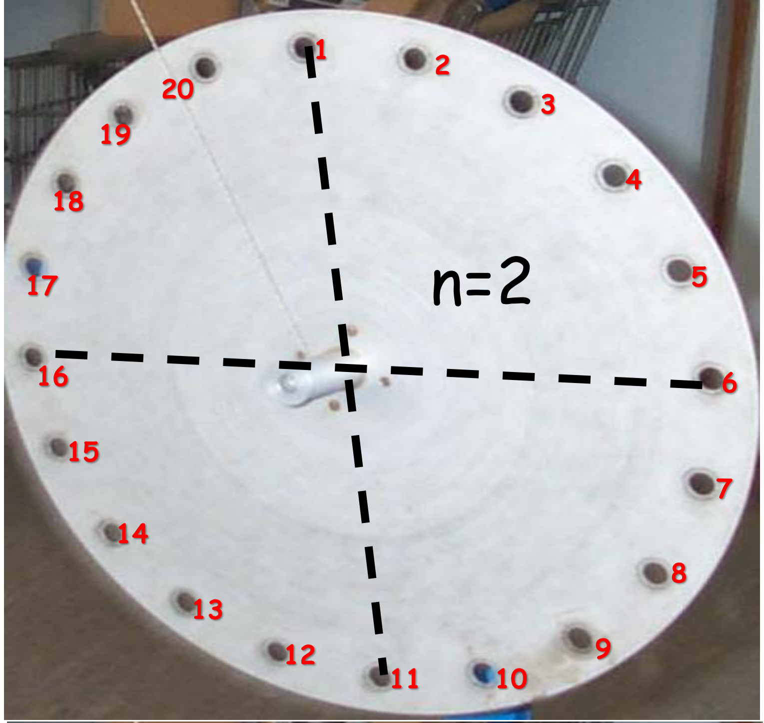
m(1dado) = 15,3g

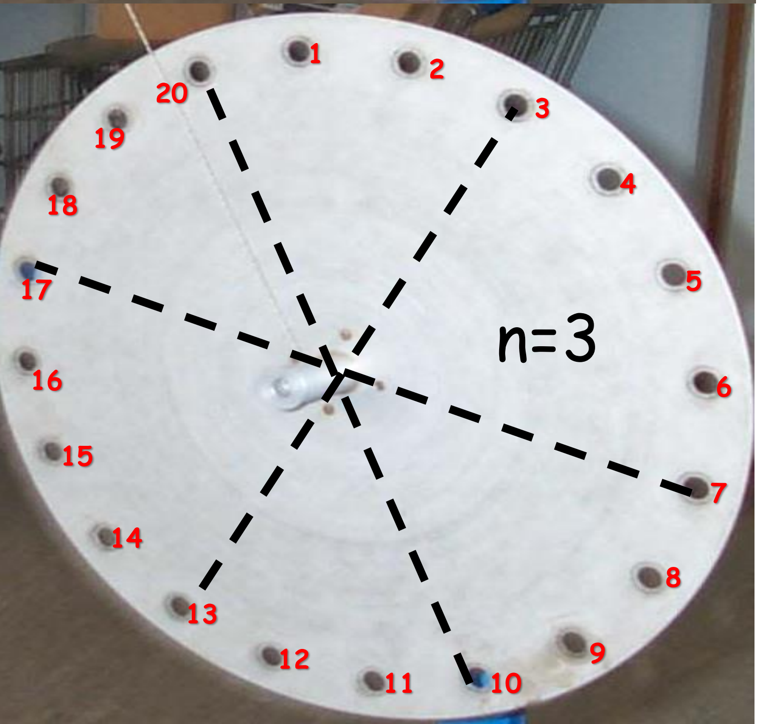
m(1bullone senza dado) = 38,2g

μ = m(1bullone + 1dado) = 53,5g

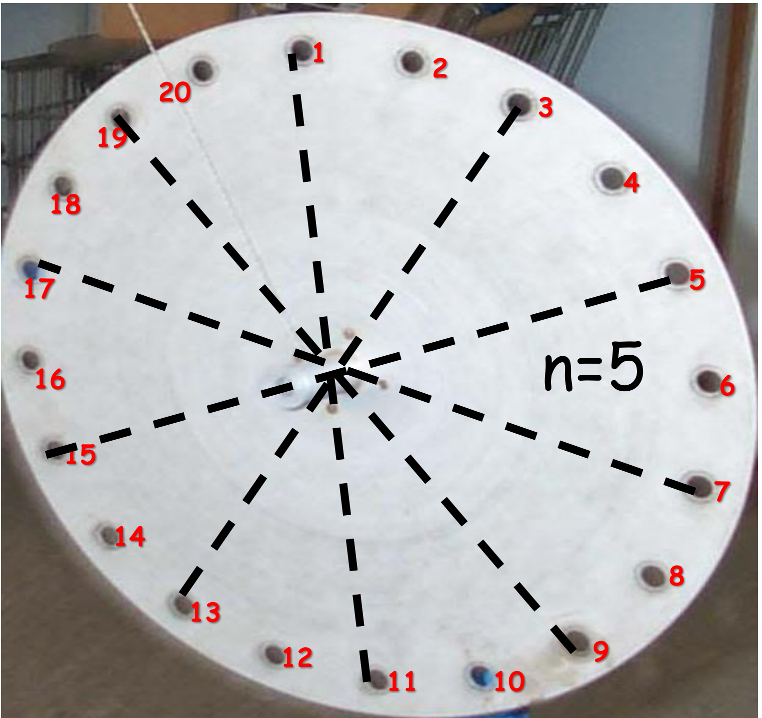
μ + m(1dado) = 68,8g


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
n=1


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
n=2


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
n=3


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
n=4


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
n=5

ecc. . . . ecc . . . .


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20

n=10