Note su esperienza di “misura della costante elastica di una molla”

Obiettivo [1/2]

… determinazione della stessa GF, la costante di richiamo elastica di una molla **K**, con

due metodi indipendenti:

a) attraverso misure di **allungamento**

➔ k_s

b) attraverso misure di **periodo** di oscillazione

➔ K_d

… naturalmente si tratta della stessa GF K:

$$K_s = K_d$$

Obiettivo [2/2]

… dopo avere verificato la compatibilità tra

- determinazione statica k_s e

- " dinamica K_d

Utilizzare entrambe le misure per ricavare l'accelerazione di gravità g

Strumenti a disposizione

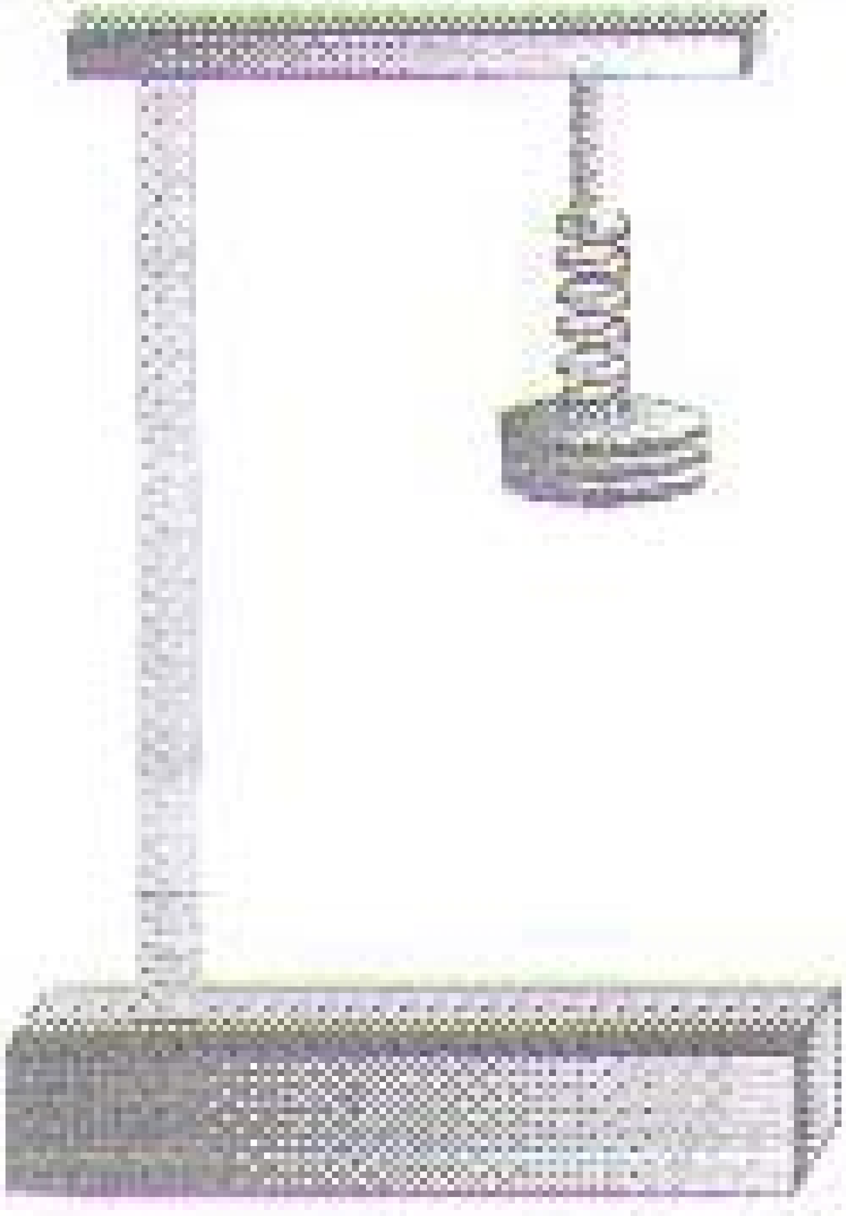
	sensibilità
a) Bilancia analogica	2 g
" digitale	0.1 g
" "	0.01 g
b) Scala millimetrata	1 mm
c) Cronometro	0.01 s

Suggerimenti strategici per le misurazioni:

- Nella misura del periodo di oscillazione viene suggerito di **misurare la durata di più oscillazioni,** per esempio 10.

- In generale, si suggerisce di **ripetere più volte le singole misure** (per esempio 10 volte quelle dell'allungamento a parita' di massa "appesa") per ottenere una stima sia del valore atteso che della deviazione standard della particolare grandezza in misura. $\rightarrow$ **$\langle \ell \rangle$, $\sigma(\ell)$**

Apparato sperimentale a disposizione [1/2]

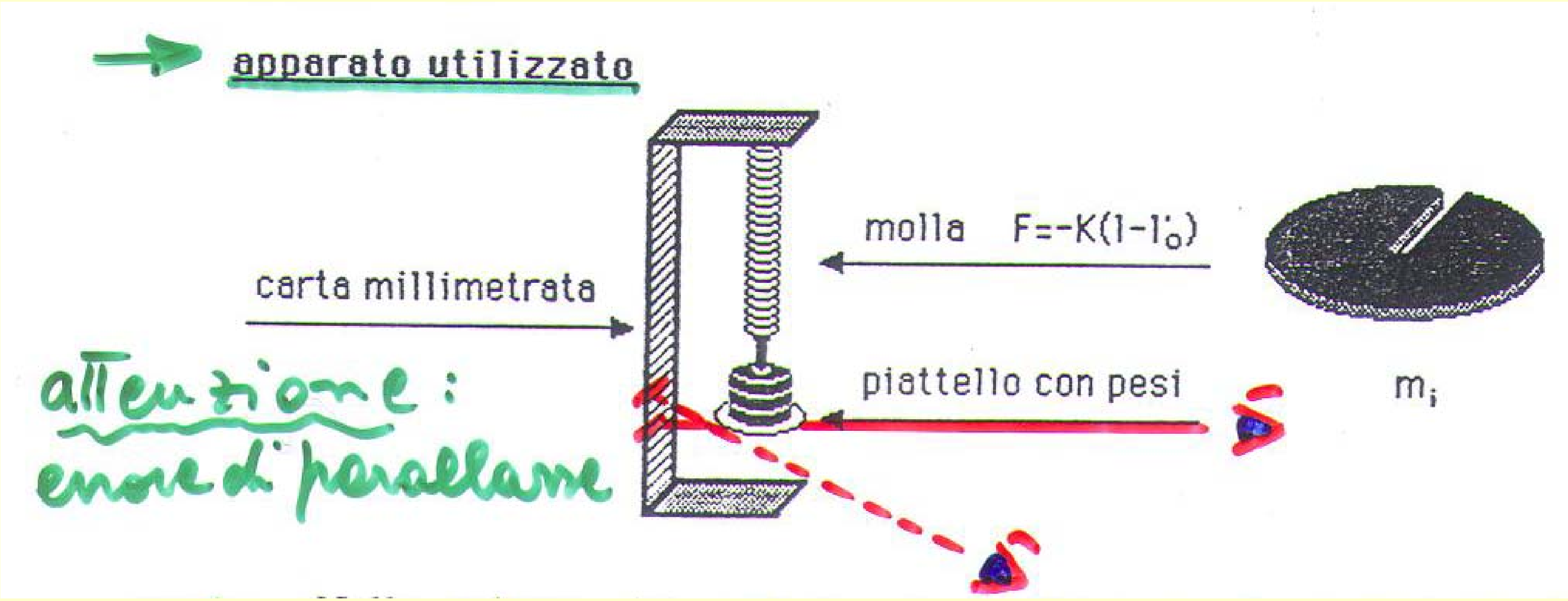


Una massa *m* è appesa ad una molla di costante elastica K appesa a sua volta ad un supporto.

- **In condizioni di equilibrio**, la molla risultera' allungata rispetto alla sua posizione di equilibrio in assenza di pesi.
- **Spostando lievemente il peso dalla posizione di equilibrio lungo la verticale**, inizierа' un moto di "piccole oscillazioni" intorno alla posizione di equilibrio.

Apparato sperimentale a disposizione [2/2]

La **distanza finita** tra scala graduata e parte mobile ("porta piattelli") … ➔ pericolo di errore sistematico di parallasse!



legge fisica che descrive il fenomeno $\sum \vec{F}_i = m\,\vec{a}$

$$(m + m_0)\,g - K\,(l - l'_0) = (m + m_0)\,\frac{d^2 l}{dt^2}$$

dove m_0 e' la massa del dispositivo per sostenere i vari pesi piu' il contributo della massa della molla (non trascurabile); l'_0 e' la lunghezza a riposo della molla **("orizzontale")**

quindi in generale si avra' un'oscillazione con $\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m+m_0}{K_d}}}$;

staticamente, invece, $\frac{d^2 l}{dt^2} = 0$ e quindi $\boxed{l = l_0 + m\,\frac{g}{K_s}}$ (con $l_0 = l'_0 + m_0\,\frac{g}{K_s}$)

[ovviamente K_s e K_d sono la stessa grandezza fisica K; qui viene indicata con simboli differenti per evidenziare i due diversi metodi utilizzati per la sua misura]

Giustificazione dimensionale della legge relativa al periodo di oscillazione

$$T(M,K) = ?$$

$$[T] = [M]^a\,[K]^b = [M]^a\,[\frac{F}{L}]^b = [M]^a\,[\frac{M\;L\;T^{-2}}{L}]^b$$

$$[T] = [M]^{a+b}\,[L]^0\,[T]^{-2b}$$

[L] 0 = 0

[M] 0 = a + b ➔ a = - b = + 1/2

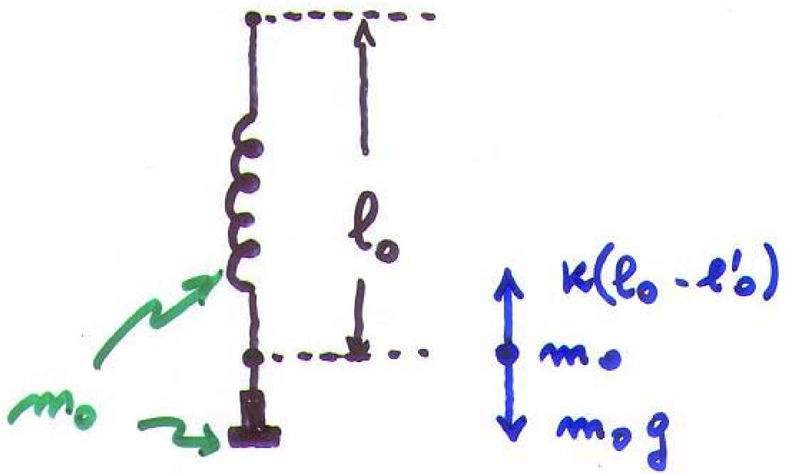
[T] 1 = - 2 b ➔ b = - 1 / 2

$[T] = [M]^{1/2}\,[k]^{-1/2}$ ➔ **$T \sim \sqrt{(M/K)}$**

STATICAMENTE: allungamento [1/3]

ℓ_0' lunghezza della molla completamente a riposo (p. es. "orizzontale")

ℓ_0 lunghezza della molla posta in "verticale" con il portapiattelli attaccato ma vuoto

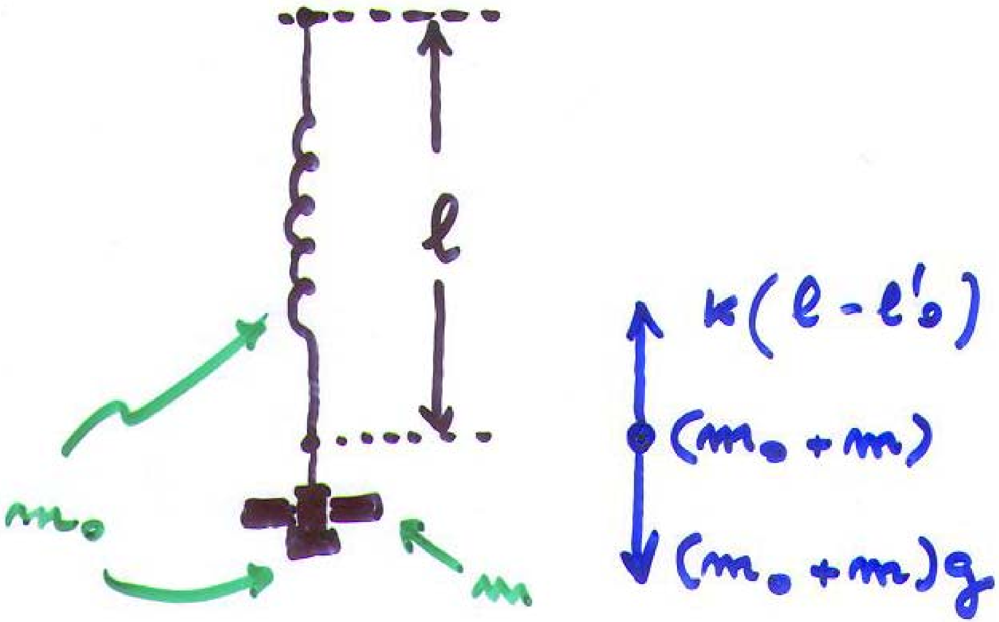


$$k(\ell_0 - \ell_0') = m_0 g$$

$$\boxed{\ell_0 = \ell_0' + \frac{m_0}{k} g}$$

STATICAMENTE: allungamento [2/3]

ℓ lunghezza della molla verticale con carico m nel porta piattelli



$$k(\ell - \ell'_0) = (m_0 + m)g$$

$$k\left[\ell - \left(\ell_0 - \frac{m_0 g}{k}\right)\right] = (m_0 + m)g$$

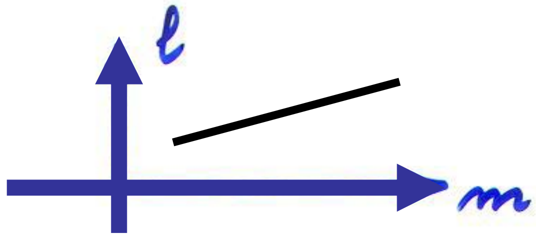
$$k(\ell - \ell_0) = mg$$

$$\boxed{\ell = \ell_0 + \frac{mg}{k}}$$

EQUILIBRIO STATICO

STATICAMENTE: allungamento [3/3]

STATICO



$$l = l_0 + (g / K)\, m$$

$$y = a + b\, x$$

Termine noto $a\ ,\ \sigma(a) \ \rightarrow\ l_0\ ,\ \sigma(l_0)$

Slope $b\ ,\ \sigma(b) \ \rightarrow\ K\ ,\ \sigma(k)$

$$\sigma^2(g/k) = (d\,(g/K) / dK)^2\, \sigma^2(k) = (g^2 / k^4)\, \sigma^2(k)$$

$$\rightarrow\ \sigma(k) = (K^2 / g)\, \sigma(g/k)$$

→ "eliminare" misure nella prima zona non lineare prima di fare il "fit"

DINAMICAMENTE: oscillazione [1/2]

$$\left(l_0 - \frac{m_0 g}{k}\right)$$

$$(m+m_0)\frac{d^2 l}{dt^2} = (m+m_0)g - k(l - l_0')$$

$$(m+m_0)\frac{d^2 l}{dt^2} = (m+m_0)g - k\left(l - l_0 + \frac{m_0 g}{k}\right)$$

$$(m+m_0)\frac{d^2 l}{dt^2} = mg - k(l - l_0)$$

$$(m+m_0)\frac{d^2 l}{dt^2} + k\underbrace{\left(l - l_0 - \frac{mg}{k}\right)}_{\xi} = 0$$

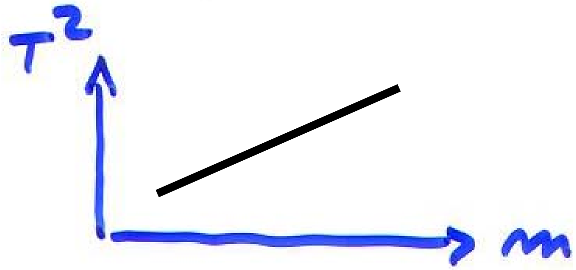
$$\frac{d^2}{dt^2}\xi + \underbrace{\frac{k}{m+m_0}}_{\omega^2}\xi = 0$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m+m_0}}$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m+m_0}{k}}}$$

DINAMICAMENTE: oscillazione [2/2]

DINAMICO



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(m+m_0)}{k}}$$

$$T^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{m+m_0}{k} = \frac{4\pi^2}{k} \cdot m + \frac{4\pi^2 m_0}{k}$$

y = b x + a

$$\sigma^2\left(\frac{4\pi^2}{k}\right) = \left(-\frac{4\pi^2}{k^2}\right)^2 \sigma^2(k) \longrightarrow \sigma(k) = \frac{k^2}{4\pi^2} \cdot \sigma\left(\frac{4\pi^2}{k}\right)$$

OSSERVAZIONE:

Qualità dei due tipi di determinazioni delle due migliori rette ("best fit").

- N = 10 piattelli in totale.

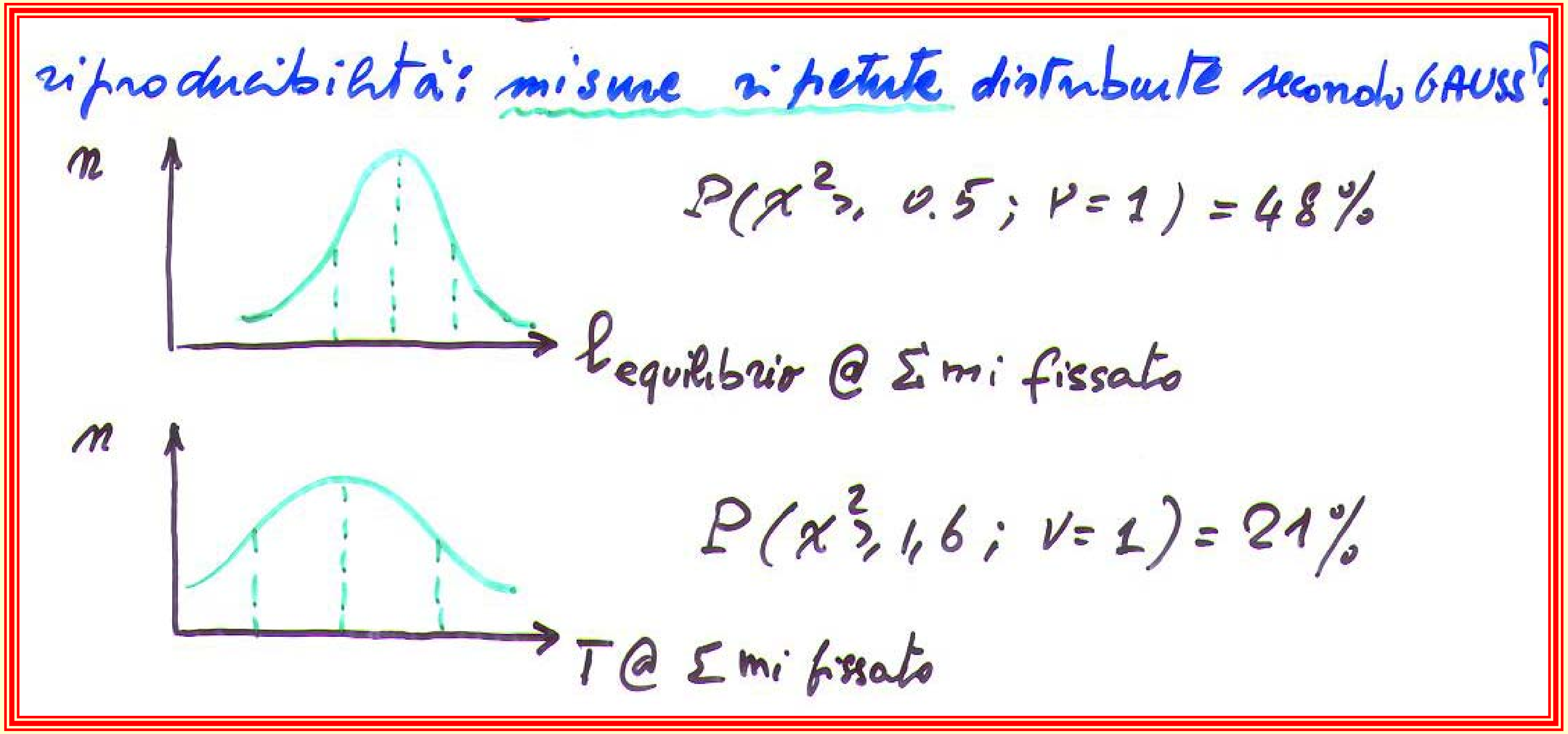
- Eliminazione dei primi 2 punti in entrambi i grafici ("statico" e "dinamico").

- Calcolo della deviazione standard del fit (σ_{fit}).

- Test statistico sulla qualità del fit fatta sulla distribuzione dei residui del fit (Test del χ^2).

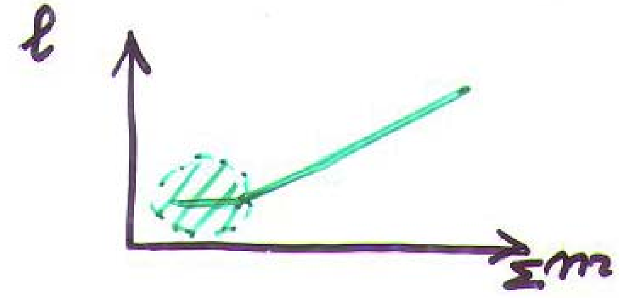
Attenzione:

Quando si ripetono le misure **evitare** di cadere nella trappola di fare delle semplici **letture ripetute**!



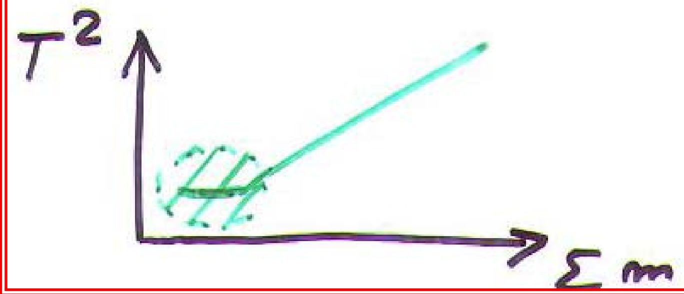
Numerologia: ordini di grandezza

$m_0 \sim 60\,g$; $m_i \sim 80\,g$; $\ell_0 \sim 10\,cm$



$k_s = (45{,}6 \pm 1{,}4)\ N/m$

$\hookrightarrow 1{,}4 / 45{,}6 = 3\%$



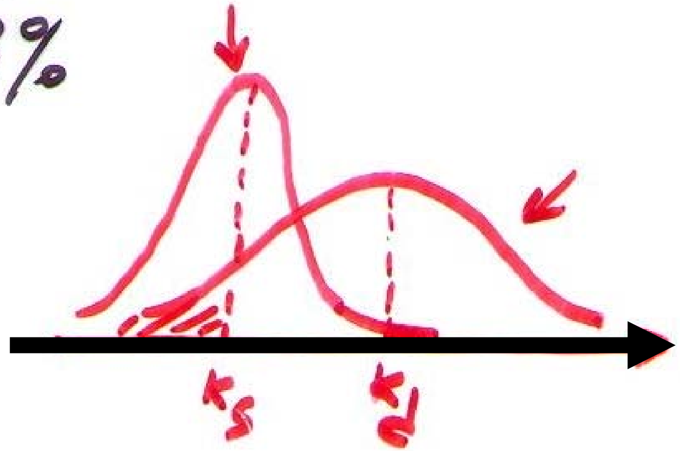
$k_d = (47{,}8 \pm 4{,}7)\ N/m$

$\hookrightarrow 4{,}7 / 47{,}8 = 8\%$

… vanno eliminate le prime due misure con solo 1 o 2 piattelli attaccati alla molla.

- $\boxed{\text{compatibilità}}$:

$$\begin{cases} k_s = (45{,}6 \pm 1{,}4)\ N/m & \pm 3\% \\ k_d = (47{,}8 \pm 4{,}7)\ N/m & \pm 8\% \end{cases}$$



$\hookrightarrow \quad t = \dfrac{47{,}8 - 45{,}6}{\sqrt{(4{,}7)^2 + (1{,}4)^2}} \cong 0{,}4$

$P_{Gauss}\,(t \geq +0{,}4 \text{ oppure } t \leq -0{,}4) \cong 69\%$

- migliore stima per k :

"MEDIA PESATA tra K_s e K_d"

$$\sigma_{k\,media\,pesata} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sigma_{k_s}^2} + \frac{1}{\sigma_{k_d}^2}}} = 1{,}3 \; N/m$$

$$k_{media\,pesata} = \frac{k_s\left(\frac{1}{\sigma_{k_s}^2}\right) + k_d\left(\frac{1}{\sigma_{k_d}^2}\right)}{\left(\frac{1}{\sigma_{k_s}^2} + \frac{1}{\sigma_{k_d}^2}\right)} = 45{,}8 \; N/m$$

$$\boxed{(45{,}8 \pm 1{,}3)\; N/m}$$

$$\hookrightarrow \; 1{,}3 / 45{,}8 = 2{,}8\%$$

Determinazione dell'accelerazione di gravità: "g"

- **Allungamento**: migliore retta

  ➔ **slope1 = (g / k) ± σ(slope1)**

- **Oscillazione**: migliore retta

  ➔ **slope2 = (4 π^2 / k) ± σ(slope2)**

$$\frac{slope1}{slope2} = \frac{(\frac{g}{K})}{(\frac{4\pi^2}{K})} = \frac{g}{4\pi^2} \Rightarrow \boxed{g = (4\pi^2)(\frac{slope1}{slope2})}$$

$$\ldots \quad \boxed{(\frac{\sigma(g)}{g}) = \sqrt{(\frac{\sigma(slope1)}{slope1})^2 + (\frac{\sigma(slope2)}{slope2})^2}}$$

→ Sommario sui minimi quadrati [1/2]

$$\boxed{y = a + bx}$$

con solo σ_y costante per ogni y

Termine noto

- $$a = \frac{(\Sigma x^2)(\Sigma y) - (\Sigma x)(\Sigma xy)}{N(\Sigma x^2) - (\Sigma x)^2} = \frac{\langle x^2\rangle\langle y\rangle - \langle x\rangle\langle xy\rangle}{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}$$

Coefficiente angolare "SLOPE"

- $$b = \frac{N(\Sigma xy) - (\Sigma x)(\Sigma y)}{N(\Sigma x^2) - (\Sigma x)^2} = \frac{\langle xy\rangle - \langle x\rangle\langle y\rangle}{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}$$

$$\Delta = N(\Sigma x^2) - (\Sigma x)^2 = N^2(\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2)$$

- $$\sigma_a = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum x^2}{\Delta}} = \frac{\sigma_y}{\sqrt{N}} \cdot \sqrt{\frac{\langle x^2 \rangle}{(\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2)}}$$

- $$\sigma_b = \sigma_y \sqrt{\frac{N}{\Delta}} = \frac{\sigma_y}{\sqrt{N}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2)}}$$

- $$\sigma_{(a,b)} = - \frac{\sigma^2(y) \cdot \sum_1^N i \, x_i}{N \cdot \sum_1^N i \, x_i^2 - (\sum_1^N i \, x_i)^2} = - \frac{\sigma^2(y)}{N} \cdot \frac{\langle x \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$$

$$|\sigma_{(a,b)}| < \sigma_a \cdot \sigma_b$$

- $$\sigma(y = a + bx) = \sqrt{x^2 \cdot \sigma_b^2 + \sigma_a^2 + 2x\sigma_{(a,b)}}$$