

Note su esperienza con il pendolo fisico "PASCO"

Pendolo Fisico "PASCO"

... è composto da:

- **Asta rigida** che può essere fissata ad un **perno** tramite un **piccolo bullone** in 3 posizioni lungo l'asta:
 - o in una posizione **centrale**,
 - o in una di altre due posizioni **decentrate** e **simmetriche** rispetto al centro dell'asta.
- Sull'asta rigida **possono essere fissati uno o più pesi in ottone** allo scopo di modificare il momento di inerzia del pendolo.
- **Misuratore di rotazione PASCO (PS 2120)** collegato al **perno** sul quale è fissata l'asta rigida, a sua volta collegato al computer tramite la già usata **unità "PASCO 500 interface"**.



Rotary Motion

Measures magnitude and direction of motion

PS 2120

Specifications

Resolution: • 0.02 mm (linear) and 0.09° (angular) (4,000 points per revolution)

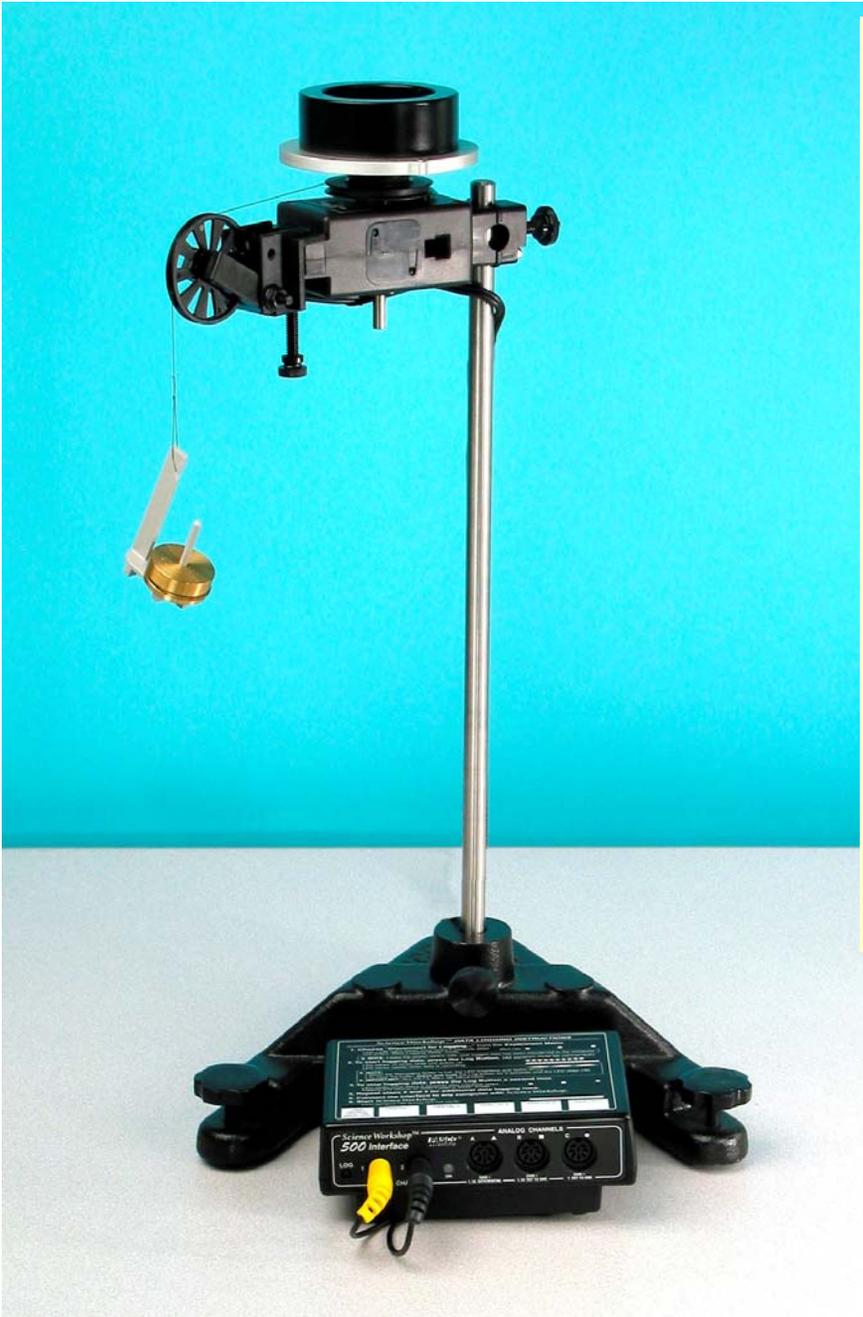
Accuracy: • +/- 0.09°

Three-step Pulley: • 10, 29 and 48 mm diameter

Rotational Resolution: • 0.00157 radian

Maximum rotation rate: • 30 revolutions per second

→ $4000 \times 30 = 120\,000 \text{ Hz}$
(1/120kHz) ~ 8.3 μs



... possibile **utilizzo del sensore rotativo PS 2120** per la **misura del momento di inerzia** di un corpo rigido montato orizzontalmente (come nella foto).

... ora l'asse di rotazione del sensore PS 2120 andrebbe posto verticalmente anzichè' orizzontalmente come nel caso del pendolo fisico.

Operazioni preliminari:

a) Misurare le diverse parti del pendolo composto:

- **massa** dell'asta rigida e dei pesi in ottone;
- **dimensioni** dell'asta rigida e dei pesi in ottone;
- **distanza** tra i fori sull'asta rigida;
- **diametro** del cerchietto di plastica usato per fissare l'asta rigida stessa.

b) Verificare l'orizzontalità dell'asse di rotazione.

... per ridurre l'**errore sistematico** sulla misura di "g" che tenderebbe a farci misurare un valore **sottostimato** di "g"

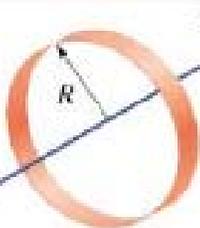
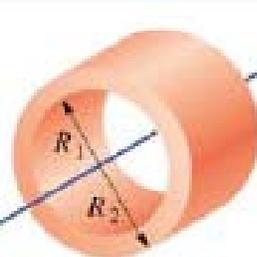
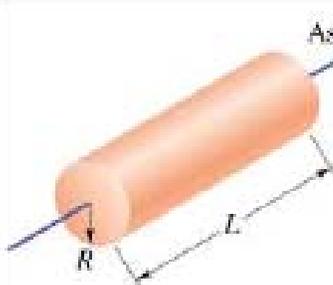
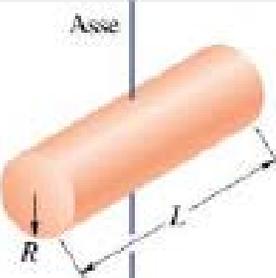
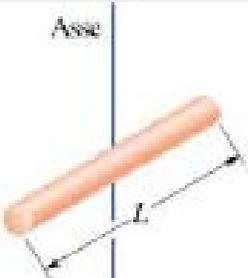
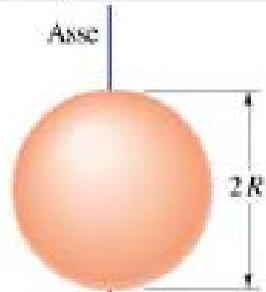
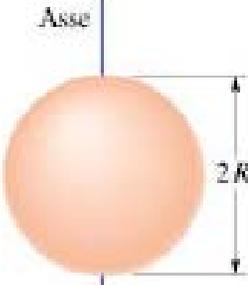
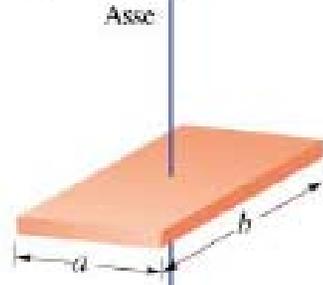
c) Verifica della perpendicolarità tra asse di rotazione ed asta rigida ogni volta che questa viene rimontata per effettuare un cambiamento della configurazione di misura.

... per ridurre l'**errore sistematico** sul momento di inerzia "I" rispetto all'asse di rotazione che ci farebbe **sovrastimare** "I"
... tenderebbe a farci misurare un valore **sovrastimato** di "g"

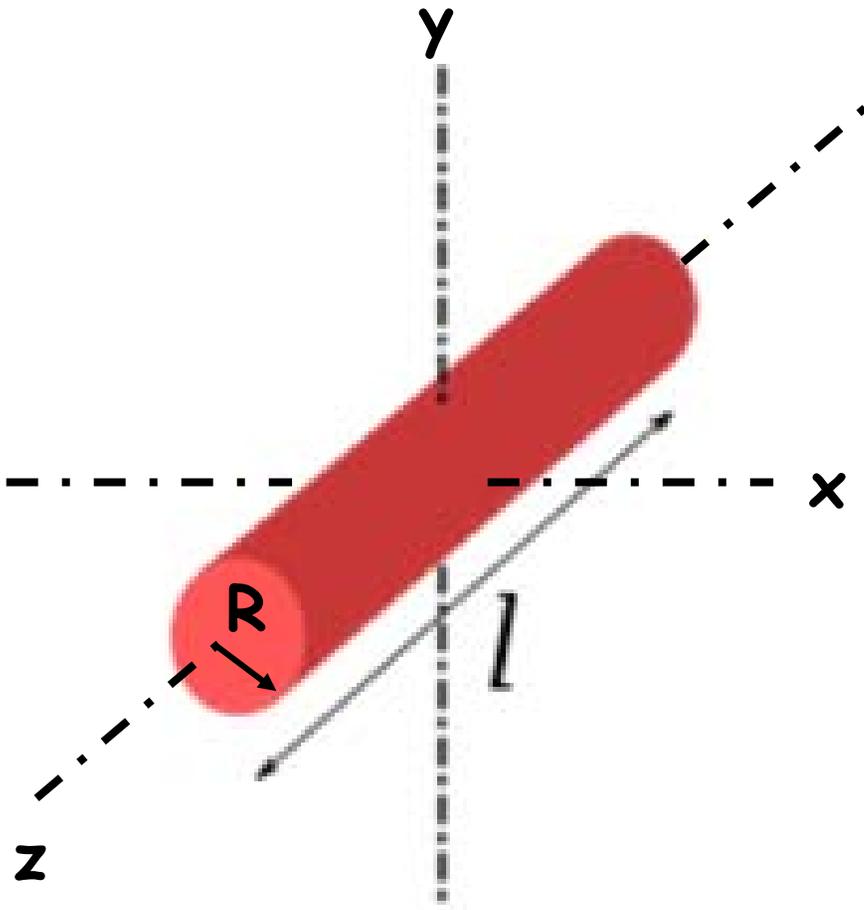
d) Predisporre il sistema di acquisizione "DATA STUDIO"

- Selezionare "Crea esperimento".
- Aggiungere "Sensore Moto Rotatorio".
- Selezionare "Frequenza di campionamento a 20 Hz"
- Selezionare "Alta Risoluzione"
... 0.25° \leftrightarrow 1440 punti a giro.
- Definire (dal menu' Proprieta') il
"numero di cifre significative"
con cui verranno scritte le misure

Momento di inerzia di alcuni solidi omogenei, calcolato rispetto ad un asse di simmetria passante per il centro di massa

 <p>Anello rispetto all'asse centrale</p>	 <p>Cilindro anulare rispetto all'asse centrale</p>	 <p>Cilindro pieno (o disco) rispetto all'asse centrale</p>
$I = MR^2$ (a)	$I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$ (b)	$I = \frac{1}{2}MR^2$ (c)
 <p>Cilindro pieno (o disco) rispetto a un diametro passante per il centro</p>	 <p>Barra sottile rispetto a un asse passante per il centro e perpendicolare alla lunghezza</p>	 <p>Sfera piena rispetto a un diametro</p>
$I = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$ (d)	$I = \frac{1}{12}ML^2$ (e)	$I = \frac{2}{5}MR^2$ (f)
 <p>Sfera cava (o guscio) sottile, rispetto a un diametro</p>	 <p>Anello rispetto a un diametro</p>	 <p>Lastra rispetto a un asse perpendicolare passante per il centro</p>
$I = \frac{2}{3}MR^2$ (g)	$I = \frac{1}{2}MR^2$ (h)	$I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$ (i)

Momento di inerzia per un'asta rigida rispetto ad un asse centrale (zz) o ad un asse diametrale (xx, yy)



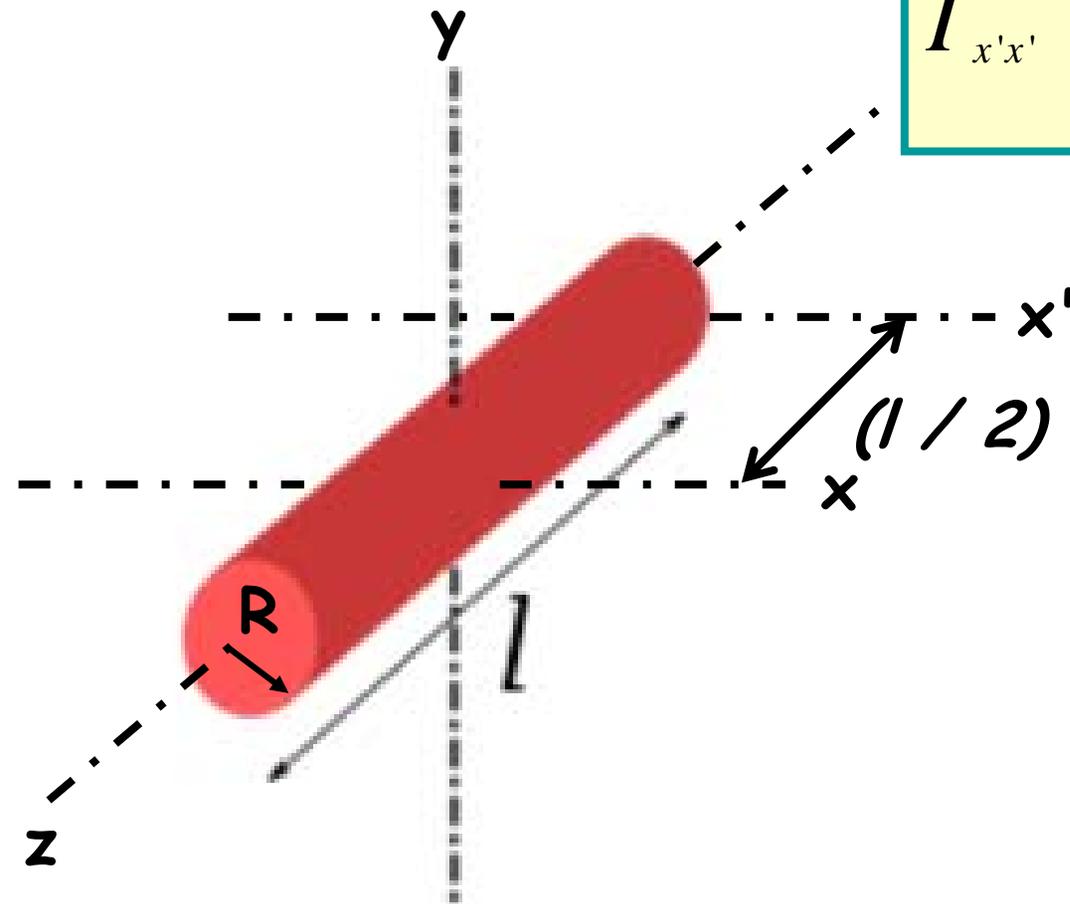
$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{Ml^2}{12}$$

$$I_{zz} = \frac{MR^2}{2}$$

Momento di inerzia per un'asta rigida rispetto ad un asse diametrale (xx) passante per il CM e rispetto ad un asse parallelo al primo (x'x') e passante per un estremo (Teorema di Huygens-Steiner)

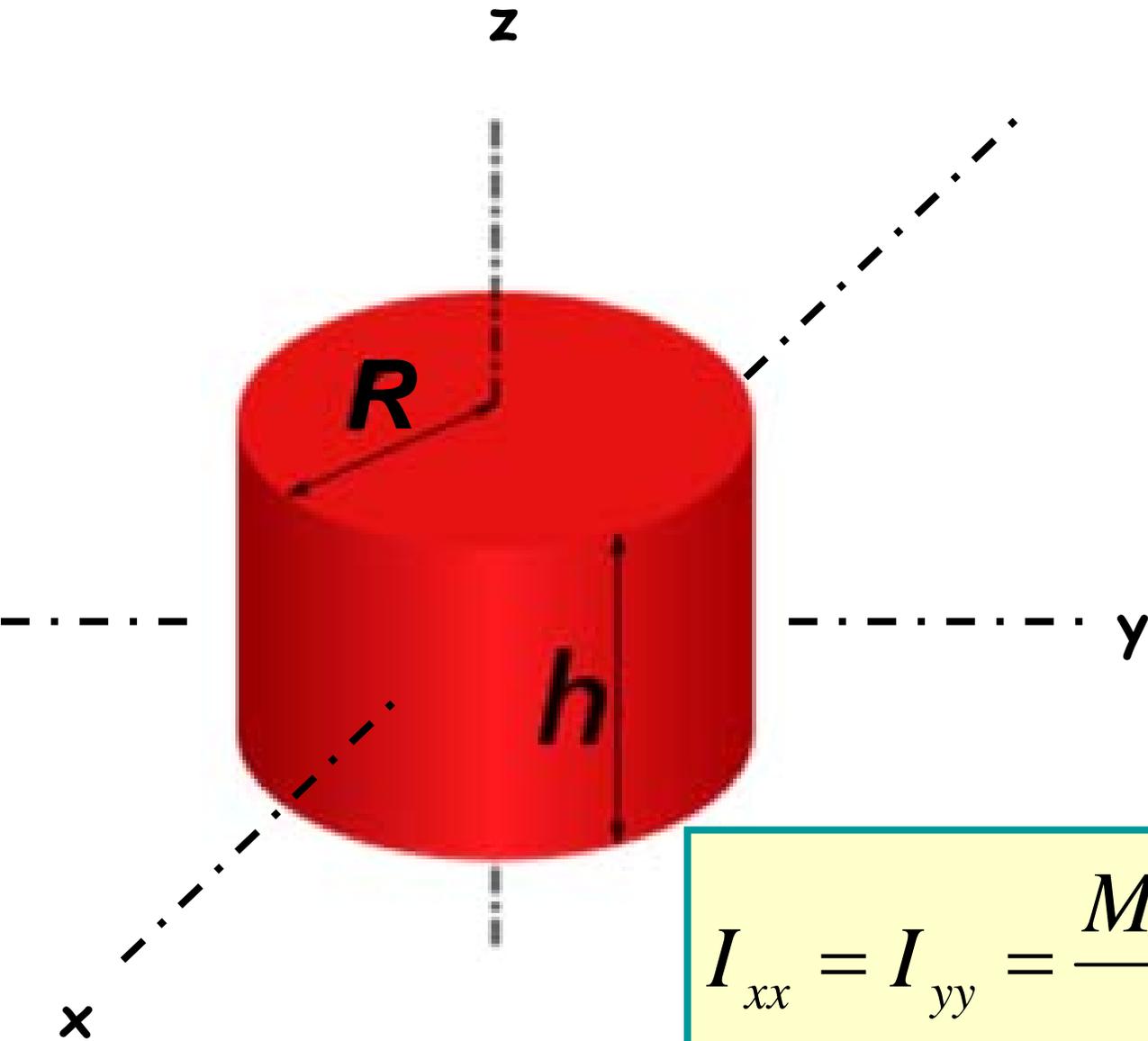
$$I_{x'x'} = I_{xx} + M \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{Ml^2}{3}$$

$$I_{xx} = \frac{Ml^2}{12}$$



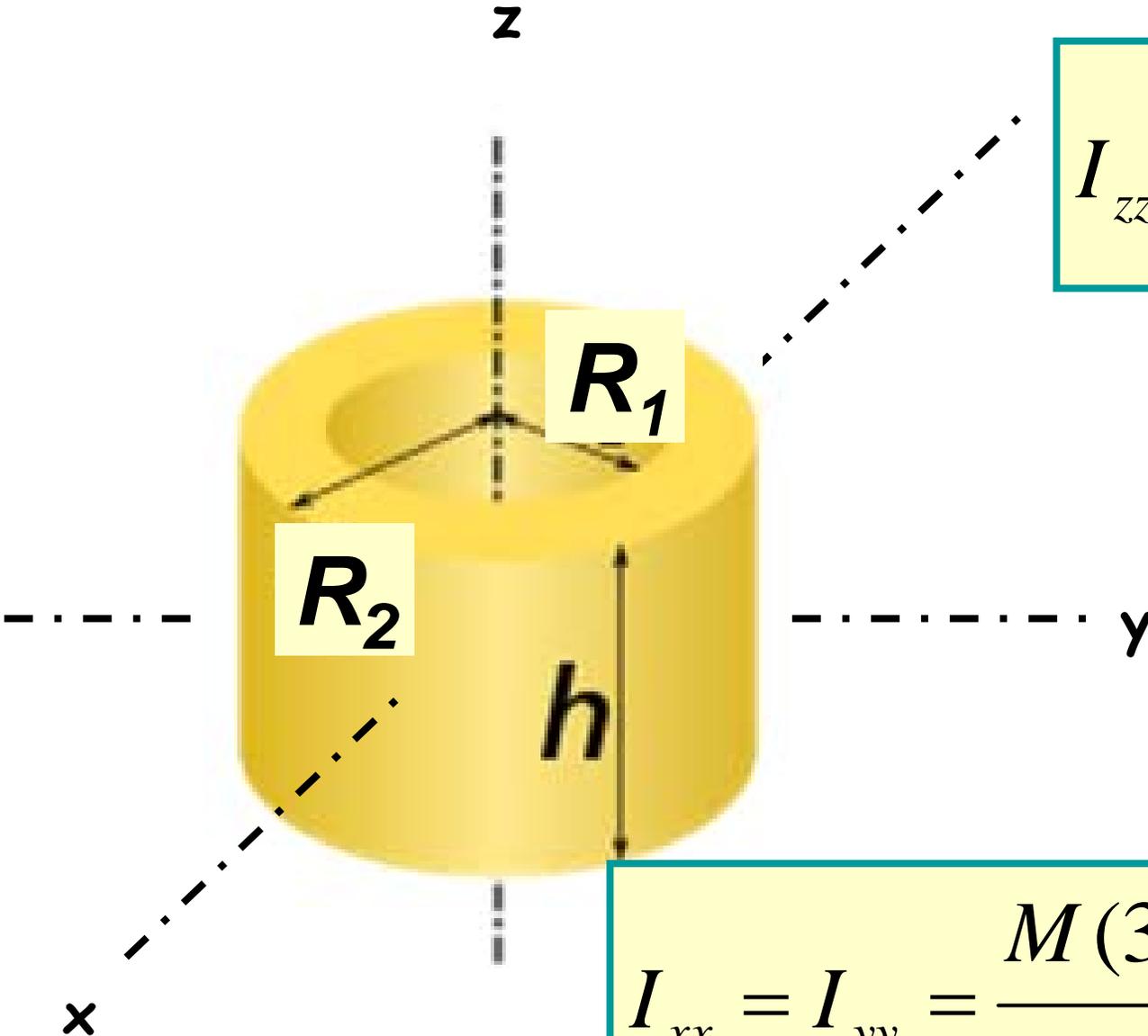
Momento di inerzia per un cilindro pieno rispetto ad un asse centrale (zz) o ad un asse diametrale (xx, yy)

$$I_{zz} = \frac{MR^2}{2}$$



$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{M(3R^2 + h^2)}{12}$$

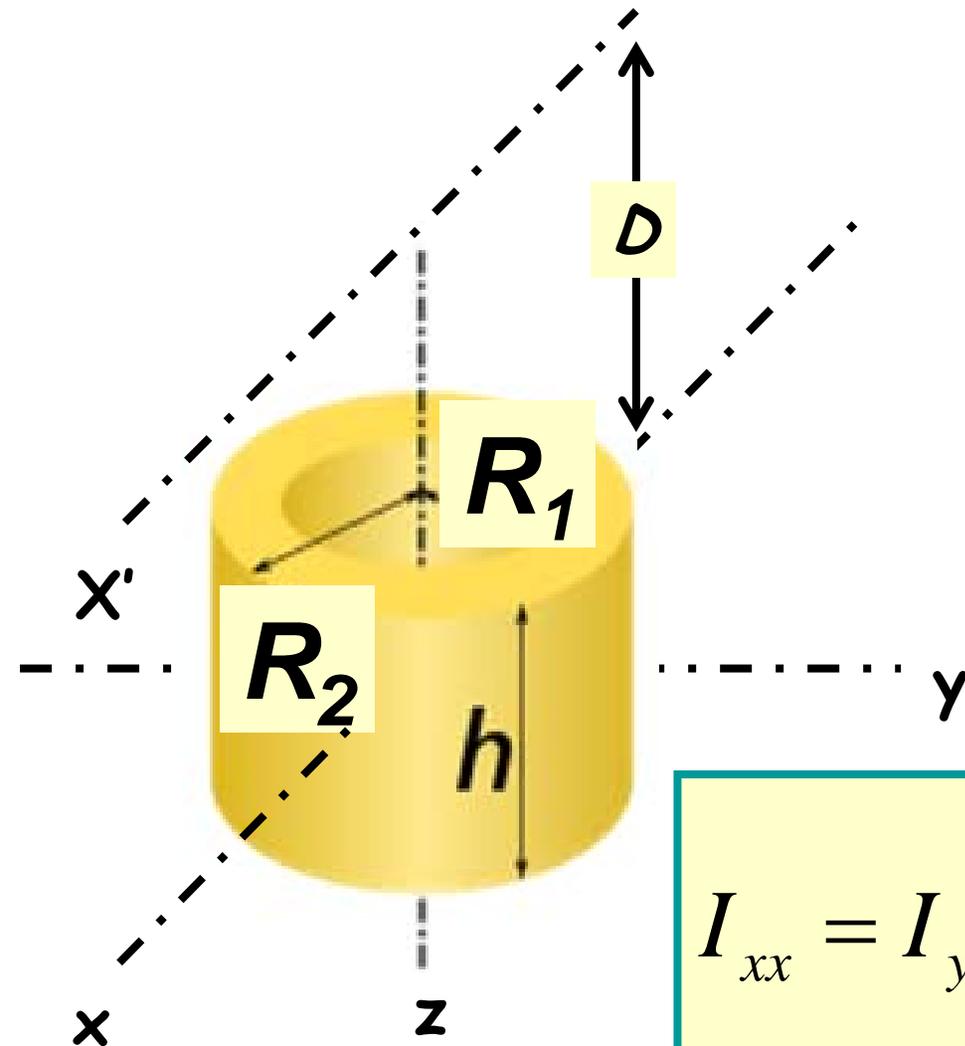
Momento di inerzia per un cilindro cavo rispetto ad un asse centrale (zz) o ad un asse diametrale (xx, yy)



$$I_{zz} = \frac{M(R_1^2 + R_2^2)}{2}$$

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{M(3(R_1^2 + R_2^2) + h^2)}{12}$$

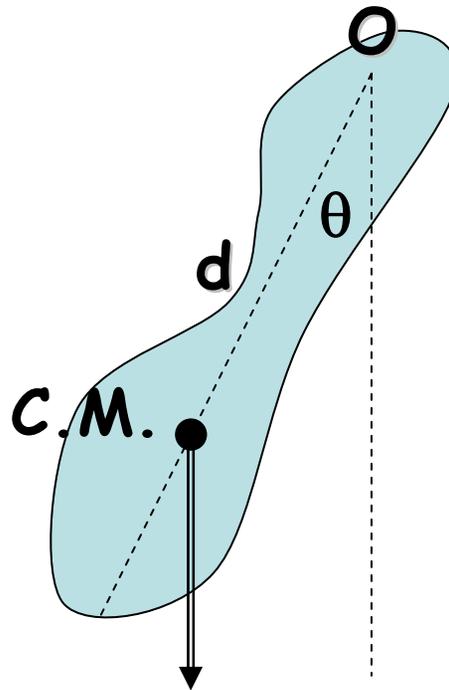
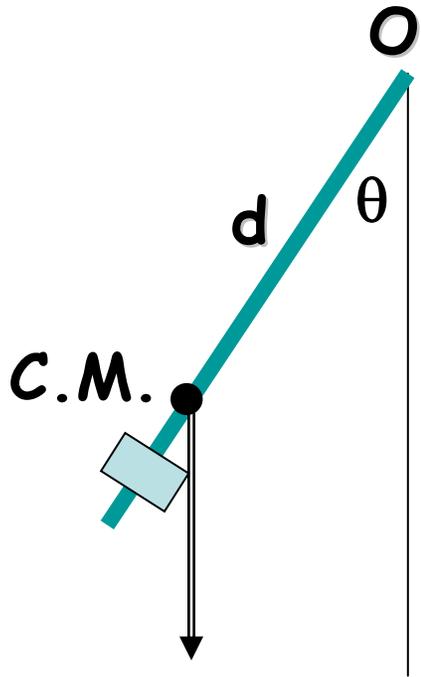
Momento di inerzia per un cilindro cavo rispetto ad un asse diametrale (xx) passante per il CM e rispetto ad un asse parallelo al primo ($x'x'$) e che dista D da esso (Teorema di Huygens-Steiner)



$$I_{x'x'} = I_{xx} + MD^2$$

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{M(3(R_1^2 + R_2^2) + h^2)}{12}$$

Pendolo fisico o pendolo composto



$$\vec{r} \wedge \vec{F} = \frac{d\vec{J}}{dt} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

$$-dMg \sin(\theta) = I \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

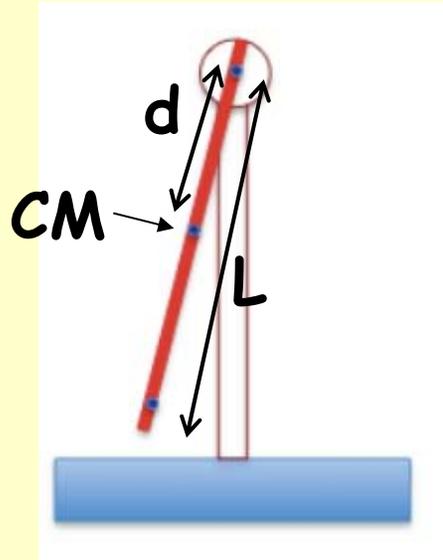
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{Mgd}{I}\right) \sin(\theta) = 0$$

Approssimazione delle piccole ampiezze di oscillazione

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{Mgd}{I}\right) \sin(\theta) = 0 \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{Mgd}{I}\right) \theta = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 \theta = 0$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgd}} \Rightarrow \text{pendolo semplice con } l_{eq} = \frac{I}{Md}$$

Strategia di misura dell'accelerazione di gravità "g" con il pendolo composto "PASCO": 1-ma configurazione



d = distanza del CM dell'asta rigida dall'asse di rotazione

m = massa dell'asta rigida

I_0 = momento d'inerzia dell'asta rigida

T_0 = periodo delle piccole oscillazioni

$$I_0 = \frac{ml^2}{12} + md^2$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{mgd}} = 2\pi \sqrt{\frac{\left(\frac{ml^2}{12} + md^2\right)}{mgd}} = 2\pi \sqrt{\frac{\left(\frac{l^2}{12} + d^2\right)}{gd}}$$

$$\Rightarrow g = \frac{4\pi^2}{T_0^2} \left(\frac{l^2}{12d} + d\right)$$

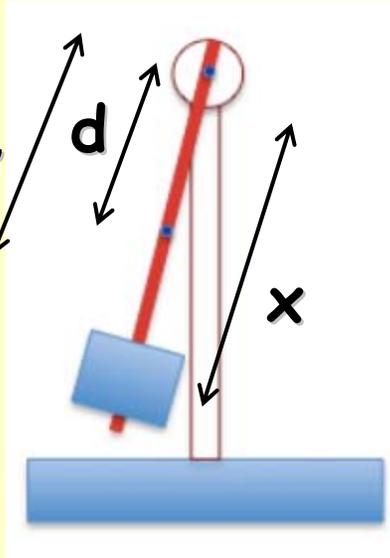
Misure con:

Calibro: d , L

"PASCO": T_0

\rightarrow "g"

Strategia di misura dell'accelerazione di gravità "g" con il pendolo composto "PASCO": 2-nda configurazione



d = distanza del CM dell'asta rigida dall'asse di rotazione.

x = distanza del CM del cilindro in ottone dall'asse di rotazione.

λ = distanza del CM totale dall'asse di rotazione.

m = massa dell'asta rigida.

M = massa del cilindro cavo in ottone.

$$\lambda = \frac{md + Mx}{m + M}$$

I_{asta} = momento d'inerzia dell'asta rigida rispetto ad un asse passante per il suo CM e parallelo all'asse di rotazione.

I_{ottone} = momento d'inerzia del cilindro in ottone rispetto ad un asse diametrale passante per il suo CM e parallelo allo asse di rotazione.

T_0 = periodo delle piccole oscillazioni.

$$I_0 = I_{asta} + md^2 + I_{ottone} + Mx^2 = \left(\frac{ml^2}{12} + md^2\right) + \left(\frac{M}{12} (3(R_1^2 + R_2^2) + h^2)\right) + Mx^2$$

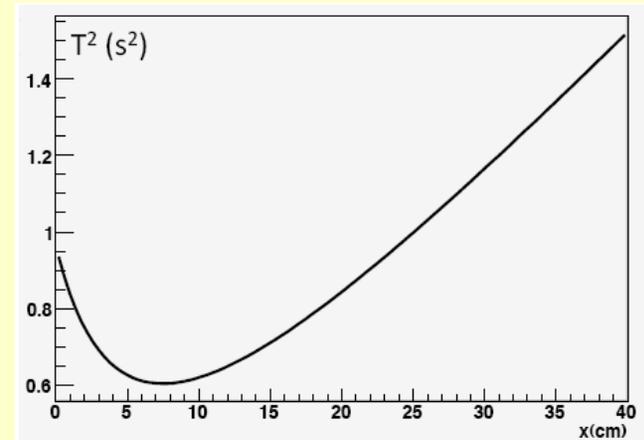
$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{(m+M)g\lambda}}, \quad \lambda = \frac{md + Mx}{m+M}$$

$$\Rightarrow T_0^2 = \frac{4\pi^2 \left[\left(\frac{ml^2}{12} + md^2\right) + \left(\frac{M}{12} (3(R_1^2 + R_2^2) + h^2)\right) \right] + [M]x^2}{g \frac{(m+M)[md] + [M]x}{(m+M)}} = \frac{4\pi^2}{g} \frac{a + bx^2}{c + bx}$$

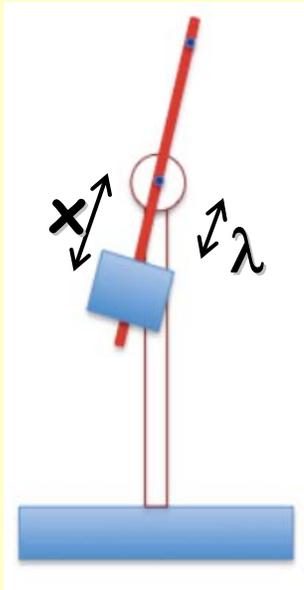
$$a = \left[\left(\frac{ml^2}{12} + md^2\right) + \left(\frac{M}{12} (3(R_1^2 + R_2^2) + h^2)\right) \right]$$

$$b = M$$

$$c = md$$



Strategia di misura dell'accelerazione di gravità "g" con il pendolo composto "PASCO": 3-za configurazione



$d = 0 \rightarrow$ il CM dell'asta rigida coincide con l'asse di rotazione.

x = distanza del CM del cilindro in ottone dall'asse di rotazione.

λ = distanza del CM totale dall'asse di rotazione.

m = massa dell'asta rigida.

M = massa del cilindro cavo in ottone.

$$\lambda = \frac{\cancel{md} + Mx}{m + M}$$

I_{asta} = momento d'inerzia dell'asta rigida rispetto ad un asse passante per il suo CM e parallelo all'asse di rotazione.

I_{ottone} = momento d'inerzia del cilindro in ottone rispetto ad un asse diametrale passante per il suo CM e parallelo allo asse di rotazione.

T_0 = periodo delle piccole oscillazioni.

$$I_0 = I_{asta} + \cancel{md^2} + I_{ottone} + Mx^2 = \left(\frac{ml^2}{12} + \cancel{md^2}\right) + \left(\frac{M}{12}(3(R_1^2 + R_2^2) + h^2)\right) + Mx^2$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{(m+M)g\lambda}}, \quad \lambda = \frac{\cancel{md} + Mx}{m+M}$$

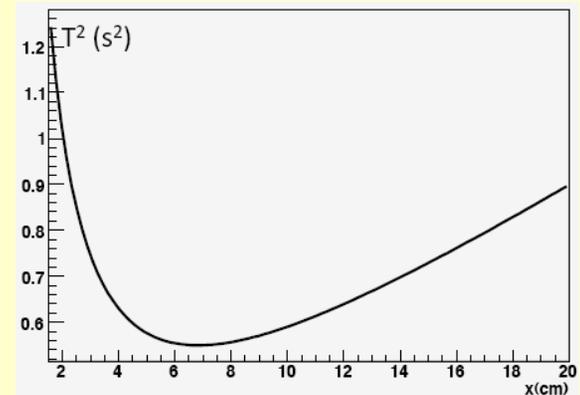
$$\Rightarrow T_0^2 = \frac{4\pi^2 \left[\left(\frac{ml^2}{12} + \cancel{md^2}\right) + \left(\frac{M}{12}(3(R_1^2 + R_2^2) + h^2)\right) \right] + [M]x^2}{g \frac{(m+M) \cancel{[md]} + [M]x}{(m+M)}} = \frac{4\pi^2}{g} \frac{a + bx^2}{\cancel{c} + bx}$$

$$a = \left[\left(\frac{ml^2}{12} + \cancel{md^2}\right) + \left(\frac{M}{12}(3(R_1^2 + R_2^2) + h^2)\right) \right]$$

$$b = M$$

$$c = \cancel{md}$$

$$\Rightarrow T_0^2 = 4\pi^2 \frac{\left[\left(\frac{ml^2}{12}\right) + \left(\frac{M}{12}(3(R_1^2 + R_2^2) + h^2)\right)\right] + [M]x^2}{Mg} \frac{1}{x} + \frac{4\pi^2}{g} x = \frac{A}{x} + Bx$$



$$\Rightarrow T_0^2 = 4\pi^2 \frac{\left[\left(\frac{ml^2}{12}\right) + \left(\frac{M}{12}(3(R_1^2 + R_2^2) + h^2)\right)\right] + [M]x^2}{Mg} \frac{1}{x} + \frac{4\pi^2}{g} x = \frac{A}{x} + Bx$$

$$A = 4\pi^2 \frac{\left[\left(\frac{ml^2}{12}\right) + \left(\frac{M}{12}(3(R_1^2 + R_2^2) + h^2)\right)\right] + [M]x^2}{Mg}$$

$$B = \frac{4\pi^2}{g}$$

$$\Rightarrow (T_0)^2 = (A / x) + B x$$

... allontanando il cilindro di ottone dall'asse di rotazione, il pendolo fisico si comporta sempre più come un pendolo semplice di lunghezza x in cui il peso è assimilabile al punto materiale attaccato all'estremità del filo.

Contributo I_x al momento di inerzia del pendolo composto dovuto al sistema formato da:

- asse di rotazione;
- parte mobile del sensore rotativo "PASCO PS 2120", ancorato all'asse di rotazione;
- disco in plastica per il fissaggio dell'asta rigida.

... **assumiamo:**

- **CM** del sistema sull'asse di rotazione del pendolo fisico;
- massa complessiva M_x e momento di inerzia I_x incogniti;
- I_x sia trascurabile rispetto agli altri contributi;
... si vuole trovare solo una **stima** per I_x .

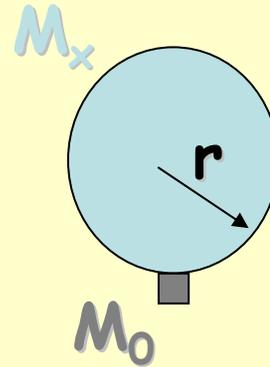
Stima del momento d'inerzia I_x con una misura ad hoc

... fissare (come?) un corpo (quale?) di massa M_0 sul bordo del disco in plastica di raggio r dove solitamente viene montata l'asta rigida.

$$\rightarrow I = M_0 r^2 + I_x$$

$$\rightarrow M = M_0 + M_x$$

$$\rightarrow \lambda = (M_0 r + \cancel{M_x 0}) / (M_0 + M_x) = (M_0 r) / (M_0 + M_x)$$



$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mg\lambda}} = 2\pi \sqrt{\frac{M_0 r^2 + I_x}{(M_0 + M_x)g} \frac{(M_0 r)}{(M_0 + M_x)}} = 2\pi \sqrt{\frac{M_0 r^2 + I_x}{gM_0 r}}$$

$$\Rightarrow \frac{T^2 g M_0 r}{4\pi^2} = M_0 r^2 + I_x \Rightarrow I_x = \frac{T^2 g M_0 r}{4\pi^2} - M_0 r^2$$

Dipendenza del periodo delle oscillazioni dall'ampiezza massima dell'oscillazione stessa:

$$l_{eq} = \frac{I}{Md}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l_{eq}}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \frac{9}{64} \sin^4\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \dots\right) \approx 2\pi \sqrt{\frac{l_{eq}}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\theta_0}{2}\right)^2\right) = 2\pi \sqrt{\frac{l_{eq}}{g}} \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right)$$

$$\Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgd}} \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right) = T_0 \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right) \Rightarrow T_0 = \frac{T}{\left(1 + \frac{1}{4} \sin^2\left(\frac{\theta_0}{2}\right)\right)}$$

T_0 periodo per piccole oscillazioni

→ **Errore sistematico dell'ordine del % per $\theta < 10^\circ$**
dovuto all'approssimazione di piccolo angolo $\sin(\theta) \approx \theta$

→ **Errore sistematico dell'ordine di 0.1% per $\theta < 1^\circ$**
... "misure di grande precisione"
grazie all'approssimazione di $\sin(\theta) \approx \theta - (\theta^3) / 6$

Strategia per fare una **misura di grande precisione** ($\approx 0.1\%$) dell'accelerazione di gravità "g"

- **Mettersi nelle condizioni ottimali con il pendolo composto:**
 - solo l'asta rigida montata in posizione simmetrica
... quindi senza alcun peso di ottone
- **Misura del periodo T al variare l'angolo θ_0**
- **Grafico del periodo T in funzione di $\sin^2(\theta_0/2)$**
 - ... Mi aspetto un andamento lineare (**fit lineare**)
 - dal termine noto ricavo T_0 e da questo si ottengo g

$$T(\vartheta_0) = T_0 + \frac{T_0}{4} \sin^2\left(\frac{\vartheta_0}{2}\right) \Rightarrow T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgd}} \Rightarrow g = \frac{4\pi^2 I}{MgdT_0^2}$$