# Note su Test di Student o Test t

# TEST DI STUDENT o TEST t

Ancora sul problema della consistenza di due valori medi ottenuti analizzando campioni della stessa variabile casuale ........ sono diversi semplicemente a causa di fluttuazioni statistiche ??

**Esempio 1** → test d'ipotesi : {campione} {ipotesi}

$N = 10$

$\langle x \rangle = 172,4 \quad \stackrel{?}{\approx \text{ok}} \quad x_{th} = 167$

$\sqrt{\dfrac{\Sigma (x - \langle x \rangle)^2}{N-1}} \rightarrow \sigma = 7,9$

$\sigma/\sqrt{N} = 2,5$

$$t = \frac{\langle x \rangle - x_{th}}{\sigma/\sqrt{N}} = 2,15 \quad (\nu = 9)$$

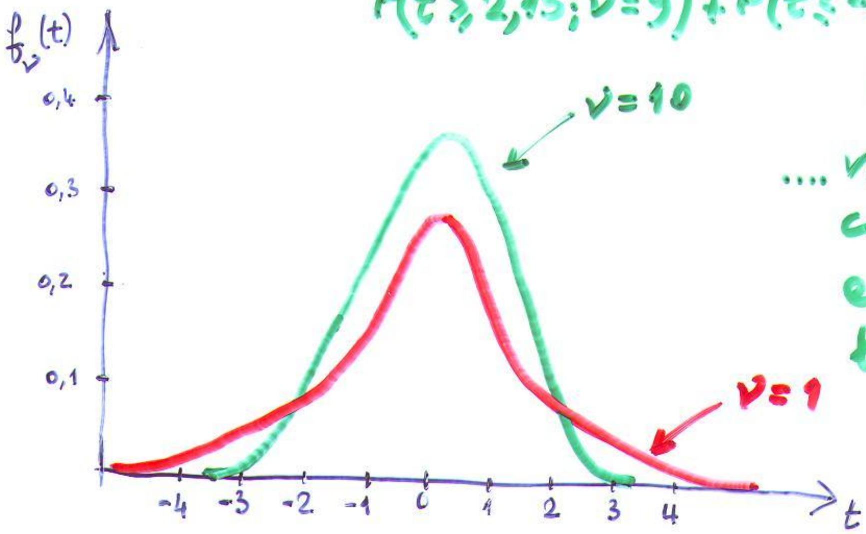
**$P_{Student}$ "a 2 code"**

$$P(t \geq 2,15\,;\, \nu = 9) = \int_{2,15}^{+\infty} f_9(t)\,dt \approx 2,5\%$$

$\left( \begin{array}{l} f(t) \approx \text{GAUSS} \quad \text{per } \nu \to \infty \\ f_\nu(t) \quad \text{"TABELLE STUDENT"} \quad \text{" } \nu \text{ finito} \end{array} \right)$

l'ipotesi {è / non è} accettata se la soglia è = 5% ? ... è al limite!

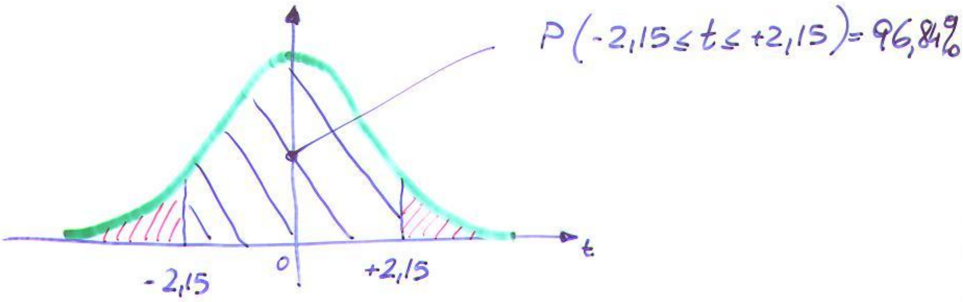
$P(t \geq 2,15\,;\,\nu=9) + P(t \leq -2,15\,;\,\nu=9) \approx 5\%$




.... vanno considerate entrambe le code ....

L'importanza del "Test t" si ha quando si ha a che fare con pochi dati ($\lesssim 30$): la distribuzione degli scarti non seguirebbe più GAUSS se invece usavo Gauss:

**$P_{Gauss}$**
**"a 2 code"**




$$\frac{\langle x\rangle - x_{th}}{\sigma/\sqrt{N}} = \frac{172{,}40-167}{2{,}51} = +2{,}15 \rightarrow P(t \geq 2{,}15) = \boxed{1.6\%}$$

$$\frac{x_{th} - \langle x\rangle}{\sigma/\sqrt{N}} = \frac{167-172{,}40}{2{,}51} = -2{,}15 \rightarrow P(t \leq -2{,}15) = \boxed{1.6\%}$$

$\hookrightarrow$ $P(t \geq 2{,}15$ oppure $t \leq -2{,}15) = 1 - 0{,}9684 = \boxed{3.2\%}$

→ con una soglia di accettazione pari al 5% avrei concluso che c'è incompatibilità tra $\langle x\rangle$ del campione e $x_{th}$

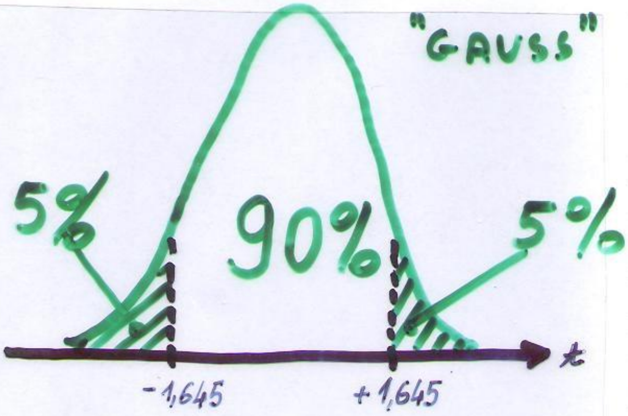
**mentre usando "Student" ero al "limite"**

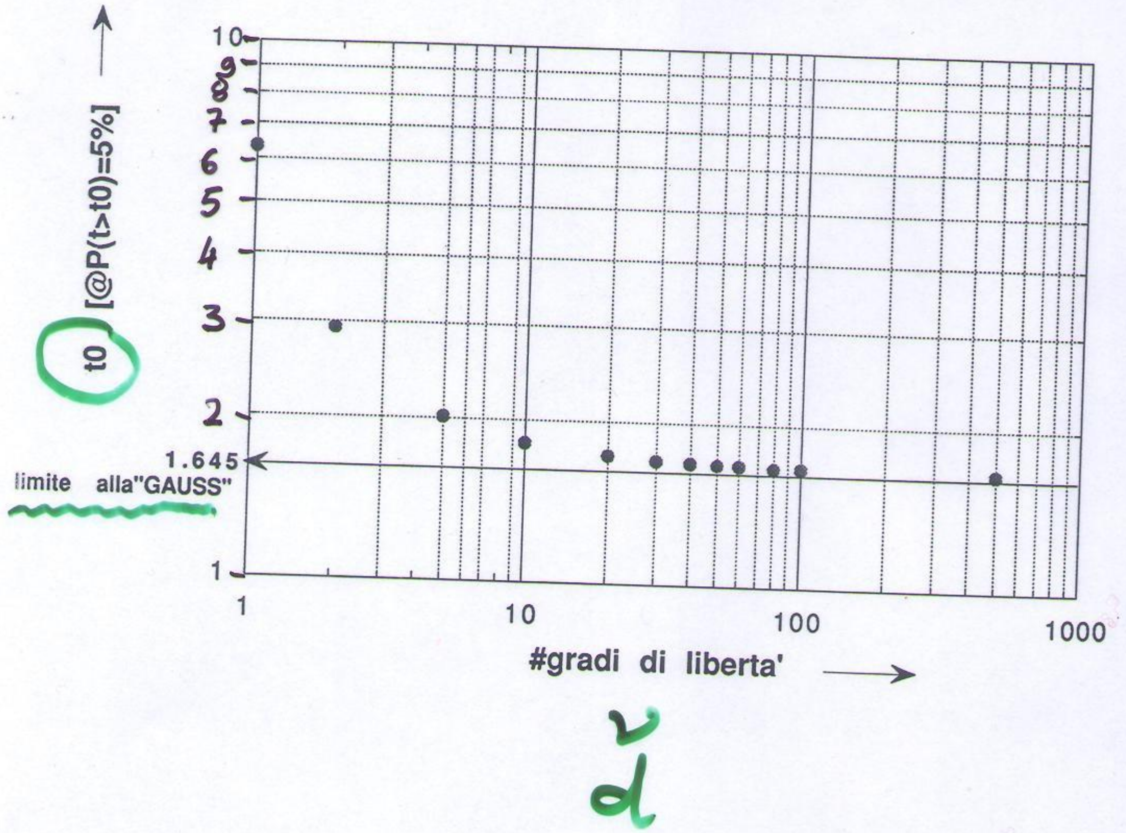
137_a

"STUDENT"

$\nu$ $t_0$

| | #gradi di liberta' | t0 [@P(t>t0)=5%] | C |
|---|---|---|---|
| 0 | 1.0000 | 6.3140 | |
| 1 | 2.0000 | 2.9200 | |
| 2 | 5.0000 | 2.0150 | |
| 3 | 10.000 | 1.8120 | |
| 4 | 20.000 | 1.7250 | |
| 5 | 30.000 | 1.6970 | |
| 6 | 40.000 | 1.6840 | |
| 7 | 50.000 | 1.6760 | |
| 8 | 60.000 | 1.6710 | |
| 9 | 80.000 | 1.6640 | |
| 10 | 100.00 | 1.6600 | |
| 11 | 500.00 | 1.6480 | |



# Esempio 2

Se ancora usassi Gauss:

$N_1 = 6$

$\langle x_1 \rangle = 13{,}06$

$\sigma(\langle x_1 \rangle) = \sqrt{\dfrac{12{,}86}{6 \cdot 5}} = 0{,}65$

$\downarrow$

$\langle x_1 \rangle \pm \sigma(\langle x_1 \rangle) = 13{,}06 \pm 0{,}65$

$N_2 = 7$

$\langle x_2 \rangle = 12{,}55$

$\sigma(\langle x_2 \rangle) = \sqrt{\dfrac{18{,}98}{7 \cdot 6}} = 0{,}67$

$\downarrow$

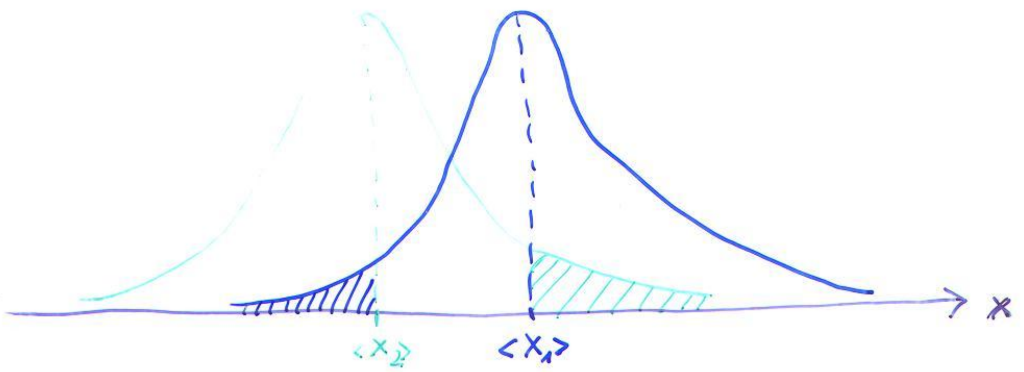
$\langle x_2 \rangle \pm \sigma(\langle x_2 \rangle) = 12{,}55 \pm 0{,}67$

- $\dfrac{\langle x_1 \rangle - \langle x_2 \rangle}{\sigma(\langle x_2 \rangle)} = \dfrac{13.06 - 12.55}{0{,}67} = +0{,}76 \longrightarrow P(t \geq 0{,}76) \cong 22\%$

- $\dfrac{\langle x_2 \rangle - \langle x_1 \rangle}{\sigma(\langle x_1 \rangle)} = \dfrac{12{,}55 - 13{,}06}{0{,}65} = -0{,}78 \longrightarrow P(t \leq -0{,}78) \cong 22\%$

$\hookrightarrow P(t \geq 0{,}76 \text{ oppure } t \leq -0{,}78) \cong 22\% + 22\% = 44\%$

$\longrightarrow$ in base alla solita soglia del 5%, avrei ancora concluso che le due medie sono compatibili



Test di Gauss a 2 code usando la differenza tra le due stime:

$t_0 = (\langle x1 \rangle - \langle x2 \rangle) / \mathrm{sqrt}(\sigma^2(\langle x1 \rangle) + \sigma^2(\langle x1 \rangle)) = 0.546$

$P_{\text{Gauss a 2 code}}(|t| > t_0) = 0.29 \times 2 = 58\%$

Test di Student a 2 code usando la differenza tra le due stime:

$\nu = (6-1)+(7-1) = 11$

$P_{\text{Student a 2 code}}(|t| > t_0\ ;\nu=11) = 60\%$

# Consistenza tra due valori medi
# "conoscendo i dati dei due campioni

{campione 1} $N_1$ $\langle x_1 \rangle$

{campione 2} $N_2$ $\langle x_2 \rangle$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_1}(x_{1i} - \langle x_1 \rangle)^2 + \sum_{i=1}^{N_2}(x_{2i} - \langle x2 \rangle)^2}{N_1 + N_2 - 2}}$$

$$\sigma(\langle x_1 \rangle) = \frac{\sigma}{\sqrt{N_1}} \qquad \sigma(\langle x_2 \rangle) = \frac{\sigma}{\sqrt{N_2}}$$

$$t = \frac{\langle x_1 \rangle - \langle x_2 \rangle}{\sqrt{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{N_1}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{\sqrt{N_2}}\right)^2}}, \quad \nu = N_1 + N_2 - 2$$

## Continuazione di Esempio 2

$N_1 = 6$ $\qquad$ $N_2 = 7$

$\langle x_1 \rangle = 13{,}06$ $\qquad$ $\langle x_2 \rangle = 12{,}55$

$\sum_{i=1}^{N_1}(x_{1i} - \langle x_1 \rangle)^2 = 12.86$ $\qquad$ $\sum_{i=1}^{N_2}(x_{2i} - \langle x_2 \rangle)^2 = 18.98$

$$\sigma = \sqrt{\frac{12.86 + 18.98}{6 + 7 - 2}} = \sqrt{2{,}8945} = 1{,}7$$

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{N_1}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{\sqrt{N_2}}\right)^2} = 0{,}95$$

$$t = \frac{13{,}06 - 12{,}55}{0{,}95} = 0{,}54 \qquad \nu = 6 + 7 - 2 = 11$$

**P Student a due code**

Test su $\langle x_1 \rangle - \langle x_2 \rangle$ : $P(t \geq 0{,}54 \,;\, \nu = 11) = 0{,}3$

Test su $\langle x_2 \rangle - \langle x_1 \rangle$ : $P(t \leq -0{,}54 \,;\, \nu = 11) = 0{,}3$

60%

La differenza osservata tra le 2 medie rientra nelle fluttuazioni statistiche con una probabilità = 60%

Se considero la nuova variabile casuale "differenza tra i due valori medi":

$$t = \frac{\langle x_1 \rangle - \langle x_2 \rangle}{\sigma(\langle x_1 \rangle - \langle x_2 \rangle)} = \frac{\langle x_1 \rangle - \langle x_2 \rangle}{\sqrt{\sigma^2(\langle x_1 \rangle) + \sigma^2(\langle x_2 \rangle)}}$$

$$= \frac{13.06 - 12.55}{\sqrt{0.65^2 + 0.67^2}} \cong 0.546$$

$P_{\text{Gauss a due code}}$

$$P_{Gauss}(t > +0,546 \text{ oppure } t < -0,546) \cong \boxed{40\%}$$

**PS**

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_1^2(N_1-1) + \sigma_2^2(N_2-1)}{(N_1-1)+(N_2-1)} =$$

$$= \frac{\dfrac{\sum^{1,N_1}(x_1-\langle x_1\rangle)^2}{N_1-1}(N_1-1) + \dfrac{\sum^{1,N_2}(x_2-\langle x_2\rangle)^2}{N_2-1}(N_2-1)}{N_1+N_2-2} =$$

$$= \frac{\sum^{1,N_1}(x_1-\langle x_1\rangle)^2 + \sum^{1,N_2}(x_2-\langle x_2\rangle)^2}{N_1+N_2-2}$$

..... nell'ipotesi che i due campioni abbiano distribuzioni limite con la stessa varianza

## Osservazione :

Campione piccolo $N \leq 30-40$ da cui ricavo :

$$\langle x \rangle = \Sigma_i \, x_i / N$$

$$\sigma(x) = \sqrt{\frac{\Sigma_i \, (x_i - \langle x \rangle)^2}{N-1}}$$

$$\sigma(\langle x \rangle) = \sigma(x)/\sqrt{N}$$

$\hookrightarrow$ anziché la distribuzione di probabilità di GAUSS va usata quella di STUDENT che dipende da $t$ e da $\nu = N-1$

il valore di $t$ rappresenta il coefficiente moltiplicativo per $\sigma/\sqrt{N}$ per ottenere l'intervallo di incertezza sul valore medio, con il valore di probabilità desiderato

$\boxed{t \equiv \text{fattore correttivo di maggiorazione della larghezza degli intervalli}}$

**Esempio :**

$N = 10 \quad , \quad \nu = 9$

$\langle x \rangle = 41.89$

$\sigma(x) = 0{,}42$

$\sigma(\langle x \rangle) = \sigma(x)/\sqrt{N} = 0{,}13$

uso: $P_t(|t| < 4.78, \nu = 9) = 99.9\%$

anziché: $P_{Gauss}(\langle x \rangle \pm 3{,}29\sigma) = 99.9\%$

$$P\left\{ \langle x \rangle \pm 4{,}78 \cdot \frac{\sigma(x)}{\sqrt{N}} \right\} = 99.9\%$$

2,5%

0,05%

Tabella A.17

**VALORI DI t ORDINATI PER RIGHE INDIVIDUATE DA $\nu$**
**E PER COLONNE INDIVIDUATE DA $\boxed{P(t>t_0) = P}$**

| $\nu$ \ P | .40 | .30 | .20 | .10 | .050 | .025 | .010 | .005 | .001 | .0005 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.325 | 0.727 | 1.376 | 3.078 | 6.314 | 12.71 | 31.82 | 63.66 | 318.3 | 636.6 |
| 2 | 0.289 | 0.617 | 1.061 | 1.886 | 2.920 | 4.303 | 6.965 | 9.925 | 22.33 | 31.60 |
| 3 | 0.277 | 0.584 | 0.978 | 1.638 | 2.353 | 3.182 | 4.541 | 5.841 | .10.22 | 12.94 |
| 4 | 0.271 | 0.569 | 0.941 | 1.533 | 2.132 | 2.776 | 3.747 | 4.604 | 7.173 | 8.610 |
| 5 | 0.267 | 0.559 | 0.920 | 1.476 | 2.015 | 2.571 | 3.365 | 4.032 | 5.893 | 6.859 |
| 6 | 0.265 | 0.553 | 0.906 | 1.440 | 1.943 | 2.447 | 3.143 | 3.707 | 5.208 | 5.959 |
| 7 | 0.263 | 0.549 | 0.896 | 1.415 | 1.895 | 2.365 | 2.998 | 3.499 | 4.785 | 5.405 |
| 8 | 0.262 | 0.546 | 0.889 | 1.397 | 1.860 | 2.306 | 2.896 | 3.355 | 4.501 | 5.041 |
| 9 | 0.261 | 0.543 | 0.883 | 1.383 | 1.833 | 2.262 | 2.821 | 3.250 | 4.297 | 4.781 |
| 10 | 0.260 | 0.542 | 0.879 | 1.372 | 1.812 | 2.228 | 2.764 | 3.169 | 4.144 | 4.587 |
| 11 | 0.260 | 0.540 | 0.876 | 1.363 | 1.796 | 2.201 | 2.718 | 3.106 | 4.025 | 4.437 |
| 12 | 0.259 | 0.539 | 0.873 | 1.356 | 1.782 | 2.179 | 2.681 | 3.055 | 3.930 | 4.318 |
| 13 | 0.259 | 0.538 | 0.870 | 1.350 | 1.771 | 2.160 | 2.650 | 3.012 | 3.852 | 4.221 |
| 14 | 0.258 | 0.537 | 0.868 | 1.345 | 1.761 | 2.145 | 2.624 | 2.977 | 3.787 | 4.140 |
| 15 | 0.258 | 0.536 | 0.866 | 1.341 | 1.753 | 2.131 | 2.602 | 2.947 | 3.733 | 4.073 |
| 16 | 0.258 | 0.535 | 0.865 | 1.337 | 1.746 | 2.120 | 2.583 | 2.921 | .3.686 | 4.015 |
| 17 | 0.257 | 0.534 | 0.863 | 1.333 | 1.740 | 2.110 | 2.567 | 2.898 | 3.646 | 3.965 |
| 18 | 0.257 | 0.534 | 0.862 | 1.330 | 1.734 | 2.101 | 2.552 | 2.878 | 3.611 | 3.922 |
| 19 | 0.257 | 0.533 | 0.861 | 1.328 | 1.729 | 2.093 | 2.539 | 2.861 | 3.579 | 3.883 |
| 20 | 0.257 | 0.533 | 0 860 | 1.325 | 1.725 | 2.086 | 2.528 | 2.845 | 3.552 | 3.850 |
| 21 | 0.257 | 0.532 | 0.859 | 1.323 | 1.721 | 2.080 | 2.518 | 2.831 | 3.527 | 3.819 |
| 22 | 0.256 | 0.532 | 0.858 | 1.321 | 1.717 | 2.074 | 2.508 | 2.819 | 3.505 | 3.792 |
| 23 | 0.256 | 0.532 | 0.858 | 1.319 | 1.714 | 2.069 | 2.500 | 2.807 | 3.485 | 3.767 |
| 24 | 0.256 | 0.531 | 0.857 | 1.318 | 1.711 | 2.064 | 2.492 | 2.797 | 3.467 | 3.745 |
| 25 | 0.256 | 0.531 | 0.856 | 1.316 | 1.708 | 2.060 | 2.485 | 2.787 | 3.450 | 3.725 |
| 26 | 0.256 | 0.531 | 0.856 | 1.315 | 1.706 | 2.056 | 2.479 | 2.779 | 3.435 | 3.707 |
| 27 | 0.256 | 0.531 | 0.855 | 1.314 | 1.703 | 2.052 | 2.473 | 2.771 | 3.421 | 3.690 |
| 28 | 0.256 | 0.530 | 0.855 | 1.313 | 1.701 | 2.048 | 2.467 | 2.763 | 3.408 | 3.674 |
| 29 | 0.256 | 0.530 | 0.854 | 1.311 | 1.699 | 2.045 | 2.462 | 2.756 | 3.396 | 3.659 |
| 30 | 0.256 | 0.530 | 0.854 | 1.310 | 1.697 | 2.042 | 2.457 | 2.750 | 3.385 | 3.646 |
| 40 | 0.255 | 0.529 | 0.851 | 1.303 | 1.684 | 2.021 | 2.423 | 2.704 | 3.307 | 3.551 |
| 50 | 0.256 | 0.528 | 0.849 | 1.298 | 1.676 | 2.009 | 2.403 | 2.678 | 3.262 | 3.498 |
| 60 | 0.254 | 0.527 | 0.848 | 1.296 | 1.671 | 2.000 | 2.390 | 2.660 | 3.262 | 3.460 |
| 80 | 0.254 | 0.527 | 0.846 | 1.292 | 1.664 | 1.990 | 2.374 | 2.639 | 3.195 | 3.415 |
| 100 | 0.254 | 0.526 | 0.845 | 1.290 | 1.660 | 1.984 | 2.365 | 2.626 | 3.174 | 3.389 |
| 200 | 0.254 | 0.525 | 0.843 | 1.286 | 1.653 | 1.972 | 2.345 | 2.601 | 3.131 | 3.339 |
| 500 | 0.253 | 0.525 | 0.842 | 1.283 | 1.648 | 1.965 | 2.334 | 2.586 | 3.106 | 3.310 |
| ∞ | 0.253 | 0.524 | 0.842 | 1.282 | 1.645 | $\boxed{1.960}$ | 2.326 | 2.576 | 3.090 | $\boxed{3.291}$ |

LIMITE "GAUSS"

NOTA: $\nu=\infty$ corrisponde ad una gaussiana