Note sul problema della “compatibilita’ tra misure”

Esempio di variabile casuale ottenuta per combinazione lineare di altre variabili casuali statisticamente indipendenti

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1^{exp} \pm \sigma(x_1) \\ x_2^{exp} \pm \sigma(x_2) \end{array}}$$

$Y(x_1, x_2) = a_1 x_1 + a_2 x_2$

$a_1 = +1 \,;\ a_2 = -1 \,;$

$$u \equiv x_1^{exp} - x_2^{exp}$$

$$\sigma^2(u) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 \sigma^2(x_1) + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 \sigma^2(x_2) = \sigma^2(x_1) + \sigma^2(x_2)$$

$$\boxed{\sigma\left(x_1^{exp} - x_2^{exp}\right) = \sqrt{\sigma^2(x_1) + \sigma^2(x_2)}}$$

si tratta di un test di compatibilità tra due determinazioni sperimentali di una stessa grandezza fisica.

Esempio numerico:

$x_1 = 74 \pm 2 \quad ; \quad x_2 = 78 \pm 4$

$$\sqrt{\sigma^2(x_1) + \sigma^2(x_2)} = \sqrt{4 + 16} = 4.4721\ldots$$

$$t = \frac{74 - 78}{4.5} = -0.888\ldots..$$

PROBABILITÀ CHE SIANO COMPATIBILI

$P(t \leq -0.89) = 50\% - 31{,}33\% = 18.67$

P.S.

$$P(|t| \geq 0.89) = P(t \geq 0.89) + P(t \leq -0.89)$$

$$= 2 \times (50\% - 31.33\%) = 37{,}34\%$$

Verificata la compatibilità posso ricavare una migliore determinazione con la media pesata

$$x_1 \pm \sigma(x_1) \qquad x_2 \pm \sigma(x_2) \quad \longrightarrow \quad \bar{X}_{\substack{media\\pesata}} = \frac{\sum_k x_k \cdot w_k}{\sum_k w_k}$$

$$w_k = \frac{1}{\sigma^2(x_k)}$$

$$\frac{1}{\sigma^2\left(\bar{X}_{\substack{media\\pesata}}\right)} = \sum_k \frac{1}{\sigma^2(x_k)} \; ;$$

$$\sigma\left(\bar{X}_{\substack{media\\pesata}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\sum_k \frac{1}{\sigma^2(x_k)}}}$$

Esempio numerico:

$$x_1 = 74 \pm 2 \qquad (\pm 2,7\%)$$
$$x_2 = 78 \pm 4 \qquad (\pm 5,1\%)$$

$$\bar{X}_{\substack{media\\pesata}} = \frac{74 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 78 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{23,375}{0,3125} = 74,800$$

$$\bar{X}_{\substack{media\\aritmetica}} = \frac{74 + 78}{2} = 76,000$$

$$\boxed{x_1 < \bar{X}_{\substack{media\\pesata}} < \bar{X}_{\substack{media\\aritmetica}} < x_2}$$

… in generale l'ordine tra media pesata e media aritmetica dipendera' dai "pesi"…

$$\sigma\left(X_{\substack{media\\pesata}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2}} = 1,7889 \simeq 1,8$$

$$\boxed{\sigma\left(X_{\substack{media\\pesata}}\right) < \sigma(x_1) < \sigma(x_2)}$$

$$\boxed{X_{\substack{media\\pesata}} \pm \sigma\left(X_{\substack{media\\pesata}}\right) = 74,8 \pm 1,8}$$

(± 2.4 %)

$$\boxed{\left[\frac{\sigma\left(X_{\substack{media\\pesata}}\right)}{X_{\substack{media\\pesata}}}\right] < \left[\frac{\sigma(x_1)}{x_1}\right] < \left[\frac{\sigma(x_2)}{x_2}\right]}$$

Strategia in un caso pratico:

1ª serie di N_1 misure

$\underbrace{x_{11}, x_{12}, x_{13}, \ldots x_{1N_1}}$

$\langle x_1 \rangle = \sum_{1k}^{N_1} x_{1k} / N_1$

$\sigma(\langle x_1 \rangle)$

2ª serie di N_2 mis.

$x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2N_2}$

$\langle x_2 \rangle = \sum_{1k}^{N_2} x_{2k} / N_2$

$\sigma(\langle x_2 \rangle)$

Se ho verificato la compatibilita' tra i due campioni, allora ...

a) non ho i dati ma solo $\langle x_1 \rangle, \langle x_2 \rangle$

$\rightarrow$ media pesata

b) ho tutti i dati $x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{21}, x_{22} \ldots$

$\rightarrow$ media aritmetica sul supercampione di $N_1 + N_2$ misure

Sommario Media Pesata :

- σ_k^2 diversi :

$$\begin{cases} x_{\substack{media\\pesata}} = \dfrac{\sum_1^N{}_k\, x_k \cdot \dfrac{1}{\sigma_k^2}}{\sum_1^N{}_k\, \dfrac{1}{\sigma_k^2}} \; ; \\[2ex] \sigma\left(x_{\substack{media\\pesata}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{\sum_1^N{}_k\, \dfrac{1}{\sigma_k^2}}} \; ; \end{cases}$$

↳ $N = 2$: $k = 1, 2$

$$x_{\substack{media\\pesata}} = \frac{x_1 \dfrac{1}{\sigma_1^2} + x_2 \dfrac{1}{\sigma_2^2}}{\dfrac{1}{\sigma_1^2} + \dfrac{1}{\sigma_2^2}} = \frac{x_1 \cdot \sigma_2^2 + x_2 \cdot \sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \; ;$$

$$\sigma\left(x_{\substack{media\\pesata}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{\sigma_1^2} + \dfrac{1}{\sigma_2^2}}} = \frac{\sigma_1 \cdot \sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \; ;$$

/.

$\cdot/\cdot$

- σ_K^2 uguali a σ^2:

$$\begin{cases} x_{\substack{\text{media}\\ \text{pesata}}} = \dfrac{\sum_1^N {}_K \, x_K \cdot \frac{1}{\sigma^2}}{\sum_1^N {}_K \frac{1}{\sigma^2}} = \dfrac{\sum_1^N {}_K \, x_K}{N} = x_{\substack{\text{media}\\ \text{aritmetica}}} \\ \\ \sigma\left(x_{\substack{\text{media}\\ \text{pesata}}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{\sum_1^N {}_K \frac{1}{\sigma^2}}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{N}} = \sigma\left(x_{\substack{\text{media}\\ \text{aritmetica}}}\right) \end{cases}$$

↳ $N = 2$; $K = 1, 2$

$$x_{\substack{\text{media}\\ \text{pesata}}} = \frac{x_1 + x_2}{2} \ ;$$

$$\sigma\left(x_{\substack{\text{media}\\ \text{pesata}}}\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \ ;$$

APPENDICE A

Integrale Normale degli Errori, I

Se la misura di una variabile continua x è soggetta a molti piccoli errori, tutti casuali, allora la distribuzione attesa dei risultati è data dalla distribuzione normale, o di Gauss.

$$f_{X,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-X)^2/2\sigma^2},$$

dove X è il valore vero di x, e σ la deviazione standard.

L'integrale della funzione normale di distribuzione, $\int_a^b f_{X,\sigma}(x)dx$, è chiamato "l'integrale normale degli errori", ed è la probabilità che una misura cada tra $x = a$ ed $x = b$.

$$P(a \leqslant x \leqslant b) = \int_a^b f_{X,\sigma}(x)\,dx.$$

La Tabella A riporta questo integrale per $a = X - t\sigma$ e $b = X + t\sigma$. Ciò fornisce la probabilità di una misura entro t deviazioni standard da entrambi i lati di X,

$$\begin{aligned} P(\text{entro } t\sigma) &= P(X - t\sigma \leqslant x \leqslant X + t\sigma) \\ &= \int_{X-t\sigma}^{X+t\sigma} f_{X,\sigma}(x)\,dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^{t} e^{-z^2/2}\,dz. \end{aligned}$$

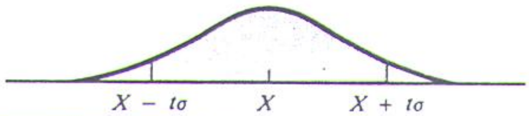
Questa funzione è talvolta denominata $erf(t)$, ma questa notazione è anche usata per una funzione un po' diversa.

La probabilità di una misura "al di fuori" dello stesso intervallo può essere trovata per sottrazione:

$$P(\text{al di fuori di } t\sigma) = 100\% - P(\text{entro } t\sigma).$$

Per ulteriori discussioni, vedi Sezione 5.4 ed Appendice B.

Tabella A. La probabilità percentuale,
$P(\text{entro } t\sigma) = \int_{X - t\sigma}^{X + t\sigma} f_{X,\sigma}(x)dx$,
come una funzione di t.

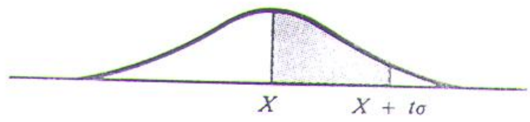


t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.00	0.80	1.60	2.39	3.19	3.99	4.78	5.58	6.38	7.17
0.1	7.97	8.76	9.55	10.34	11.13	11.92	12.71	13.50	14.28	15.07
0.2	15.85	16.63	17.41	18.19	18.97	19.74	20.51	21.28	22.05	22.82
0.3	23.58	24.34	25.10	25.86	26.61	27.37	28.12	28.86	29.61	30.35
0.4	31.08	31.82	32.55	33.28	34.01	34.73	35.45	36.16	36.88	37.59
0.5	38.29	38.99	39.69	40.39	41.08	41.77	42.45	43.13	43.81	44.48
0.6	45.15	45.81	46.47	47.13	47.78	48.43	49.07	49.71	50.35	50.98
0.7	51.61	52.23	52.85	53.46	54.07	54.67	55.27	55.87	56.46	57.05
0.8	57.63	58.21	58.78	59.35	59.91	60.47	61.02	61.57	62.11	62.65
0.9	63.19	63.72	64.24	64.76	65.28	65.79	66.29	66.80	67.29	67.78
1.0	68.27	68.75	69.23	69.70	70.17	70.63	71.09	71.54	71.99	72.43
1.1	72.87	73.30	73.73	74.15	74.57	74.99	75.40	75.80	76.20	76.60
1.2	76.99	77.37	77.75	78.13	78.50	78.87	79.23	79.59	79.95	80.29
1.3	80.64	80.98	81.32	81.65	81.98	82.30	82.62	82.93	83.24	83.55
1.4	83.85	84.15	84.44	84.73	85.01	85.29	85.57	85.84	86.11	86.38
1.5	86.64	86.90	87.15	87.40	87.64	87.89	88.12	88.36	88.59	88.82
1.6	89.04	89.26	89.48	89.69	89.90	90.11	90.31	90.51	90.70	90.90
1.7	91.09	91.27	91.46	91.64	91.81	91.99	92.16	92.33	92.49	92.65
1.8	92.81	92.97	93.12	93.28	93.42	93.57	93.71	93.85	93.99	94.12
1.9	94.26	94.39	94.51	94.64	94.76	94.88	95.00	95.12	95.23	95.34
2.0	95.45	95.56	95.66	95.76	95.86	95.96	96.06	96.15	96.25	96.34
2.1	96.43	96.51	96.60	96.68	96.76	96.84	96.92	97.00	97.07	97.15
2.2	97.22	97.29	97.36	97.43	97.49	97.56	97.62	97.68	97.74	97.80
2.3	97.86	97.91	97.97	98.02	98.07	98.12	98.17	98.22	98.27	98.32
2.4	98.36	98.40	98.45	98.49	98.53	98.57	98.61	98.65	98.69	98.72
2.5	98.76	98.79	98.83	98.86	98.89	98.92	98.95	98.98	99.01	99.04
2.6	99.07	99.09	99.12	99.15	99.17	99.20	99.22	99.24	99.26	99.29
2.7	99.31	99.33	99.35	99.37	99.39	99.40	99.42	99.44	99.46	99.47
2.8	99.49	99.50	99.52	99.53	99.55	99.56	99.58	99.59	99.60	99.61
2.9	99.63	99.64	99.65	99.66	99.67	99.68	99.69	99.70	99.71	99.72
3.0	99.73	—	—	—	—	—	—	—	—	—
3.5	99.95	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4.0	99.994	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4.5	99.9993	—	—	—	—	—	—	—	—	—
5.0	99.99994	—	—	—	—	—	—	—	—	—

APPENDICE B
Integrale Normale degli Errori, II

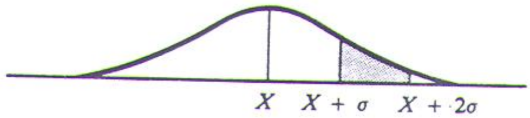
In certi calcoli, una forma conveniente dell'integrale normale degli errori è

$$Q(t) = \int_X^{X+t\sigma} f_{X,\sigma}(x)\,dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-z^2/2}\,dz.$$



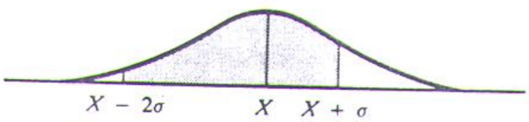
(Questo integrale è, naturalmente, proprio la metà dell'integrale tabulato in Appendice A). La probabilità $P(a \leqslant x \leqslant b)$ di una misura in un intervallo $a \leqslant x \leqslant b$ può essere trovata da $Q(t)$ con una singola sottrazione o addizione. Per esempio,

$$P(X + \sigma \leqslant x \leqslant X + 2\sigma) = Q(2) - Q(1)$$



Analogamente

$$P(X - 2\sigma \leqslant x \leqslant X + \sigma) = Q(2) + Q(1)$$



La probabilità di una misura maggiore di un certo $X + t\sigma$ è proprio $0.5 - Q(t)$. Per esempio,

$$P(x \geqslant X + \sigma) = 50\% - Q(1).$$

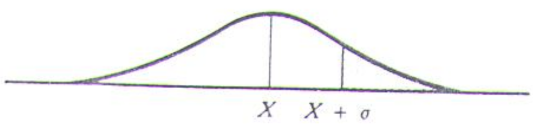
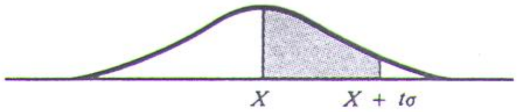


Tabella B. **La probabilità percentuale,**
$Q(t) = \int_X^{X+t\sigma} f_{X,\sigma}(x)dx$,
come una funzione di t.



t	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.00	0.40	0.80	1.20	1.60	1.99	2.39	2.79	3.19	3.59
0.1	3.98	4.38	4.78	5.17	5.57	5.96	6.36	6.75	7.14	7.53
0.2	7.93	8.32	8.71	9.10	9.48	9.87	10.26	10.64	11.03	11.41
0.3	11.79	12.17	12.55	12.93	13.31	13.68	14.06	14.43	14.80	15.17
0.4	15.54	15.91	16.28	16.64	17.00	17.36	17.72	18.08	18.44	18.79
0.5	19.15	19.50	19.85	20.19	20.54	20.88	21.23	21.57	21.90	22.24
0.6	22.57	22.91	23.24	23.57	23.89	24.22	24.54	24.86	25.17	25.49
0.7	25.80	26.11	26.42	26.73	27.04	27.34	27.64	27.94	28.23	28.52
0.8	28.81	29.10	29.39	29.67	29.95	30.23	30.51	30.78	31.06	31.33
0.9	31.59	31.86	32.12	32.38	32.64	32.89	33.15	33.40	33.65	33.89
1.0	34.13	34.38	34.61	34.85	35.08	35.31	35.54	35.77	35.99	36.21
1.1	36.43	36.65	36.86	37.08	37.29	37.49	37.70	37.90	38.10	38.30
1.2	38.49	38.69	38.88	39.07	39.25	39.44	39.62	39.80	39.97	40.15
1.3	40.32	40.49	40.66	40.82	40.99	41.15	41.31	41.47	41.62	41.77
1.4	41.92	42.07	42.22	42.36	42.51	42.65	42.79	42.92	43.06	43.19
1.5	43.32	43.45	43.57	43.70	43.82	43.94	44.06	44.18	44.29	44.41
1.6	44.52	44.63	44.74	44.84	44.95	45.05	45.15	45.25	45.35	45.45
1.7	45.54	45.64	45.73	45.82	45.91	45.99	46.08	46.16	46.25	46.33
1.8	46.41	46.49	46.56	46.64	46.71	46.78	46.86	46.93	46.99	47.06
1.9	47.13	47.19	47.26	47.32	47.38	47.44	47.50	47.56	47.61	47.67
2.0	47.72	47.78	47.83	47.88	47.93	47.98	48.03	48.08	48.12	48.17
2.1	48.21	48.26	48.30	48.34	48.38	48.42	48.46	48.50	48.54	48.57
2.2	48.61	48.64	48.68	48.71	48.75	48.78	48.81	48.84	48.87	48.90
2.3	48.93	48.96	48.98	49.01	49.04	49.06	49.09	49.11	49.13	49.16
2.4	49.18	49.20	49.22	49.25	49.27	49.29	49.31	49.32	49.34	49.36
2.5	49.38	49.40	49.41	49.43	49.45	49.46	49.48	49.49	49.51	49.52
2.6	49.53	49.55	49.56	49.57	49.59	49.60	49.61	49.62	49.63	49.64
2.7	49.65	49.66	49.67	49.68	49.69	49.70	49.71	49.72	49.73	49.74
2.8	49.74	49.75	49.76	49.77	49.77	49.78	49.79	49.79	49.80	49.81
2.9	49.81	49.82	49.82	49.83	49.84	49.84	49.85	49.85	49.86	49.86
3.0	49.87	—	—	—	—	—	—	—	—	—
3.5	49.98	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4.0	49.997	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4.5	49.9997	—	—	—	—	—	—	—	—	—
5.0	49.99997	—	—	—	—	—	—	—	—	—