Note sul test di Pearson
(TEST DEL CHI^2)

- **Problema**: come possiamo decidere se i risultati delle nostre misure sono consistenti con una distribuzione teorica?

oppure,

se i dati di un esperimento sono rappresentati da una legge o da un'altra legge?

→ $\boxed{\text{test di verosimiglianza del } \chi^2 \text{ detto anche test di Pearson}}$:

$$\chi^2 = \sum_k \left(\frac{\text{valore osservato}_k - \text{valore atteso}_k}{\text{deviazione standard}_k} \right)^2$$

numero dei gradi di libertà:

ν = numero dati a disposizione − numero delle equazioni che connettono i dati (per esempio per ricavare dei parametri)

$$\langle \chi^2 \rangle = \nu \quad , \quad \sigma^2(\chi^2) = 2\nu \rightarrow \langle \frac{\chi^2}{\nu} \rangle = 1$$

$$f(\chi^2) \approx \text{Gauss} \quad \text{per } \nu \gtrsim (20 \div 30)$$

Nel $\boxed{\text{confronto tra istogrammi di conteggi}}$

$$\boxed{F^{exp} \overset{?}{\longleftrightarrow} F^{th}}$$

in ciascun canale ("bin") le fluttuazioni saranno ≈ alla Poisson con $\sigma = \sqrt{F^{th}}$

Infatti, il processo di attribuzione di un conteggio ad un canale è del tipo "si - no", cioè BINOMIALE .... per valori elevati dei conteggi si può approssimare con la distribuzione di POISSON.

$$\left\{\begin{aligned} \chi^2 &= \sum_K \left(\frac{F^{exp} - F^{th}}{\sigma(F^{th})}\right)^2_K = \sum_K \left[\frac{(F^{exp} - F^{th})^2}{F^{th}}\right]_K \\ \nu &= \left(\begin{gathered}\text{numero}\\ \text{dei "bin"}\\ \text{usati per}\\ \text{raggruppare}\\ \text{i dati}\\ \text{nell'istogramma}\end{gathered}\right) - \left(\begin{gathered}\text{condizione}\\ \text{di}\\ \text{normalizzazione}\end{gathered}\right) - \left(\begin{gathered}\text{numero delle}\\ \text{equazioni usate}\\ \text{per ricavare}\\ \text{gli estimatori}\\ \text{dei parametri}\\ \text{della distribuzione}\\ \text{teorica ipotizzata}\end{gathered}\right) \end{aligned}\right.$$

numero minimo di "bin" per un istogramma su cui poter fare il Test del χ^2:

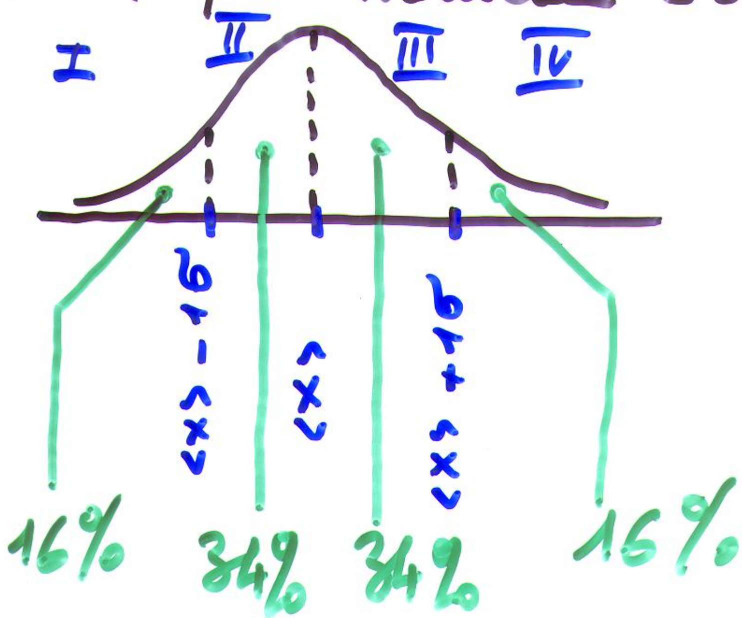
poiché ν minimo = 1

e se si usano 2 equazioni per i 2 estimatori "media" e "dev. std"

allora:

$$1 + 1 + 2 = 4$$

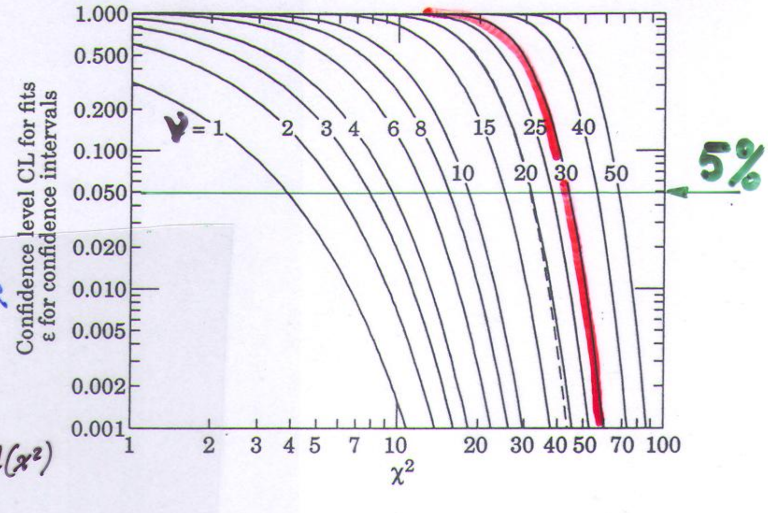
Nel test del χ^2 di compatibilità tra un **istogramma delle frequenze osservate sperimentalmente** e quello dei valori attesi secondo GAUSS, i 4 bin minimi più naturali sono:



Numero dei valori attesi in:

I	$N \cdot 0,16$
II	$N \cdot 0,34$
III	$N \cdot 0,34$
IV	$N \cdot 0,16$

$$CL(\chi^2) = \int_{\chi^2}^{\infty} f(\chi^2, \nu)\, d(\chi^2)$$



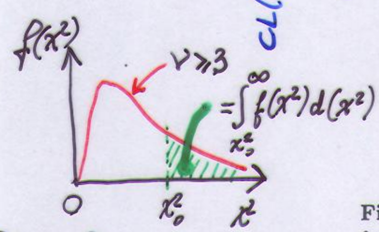
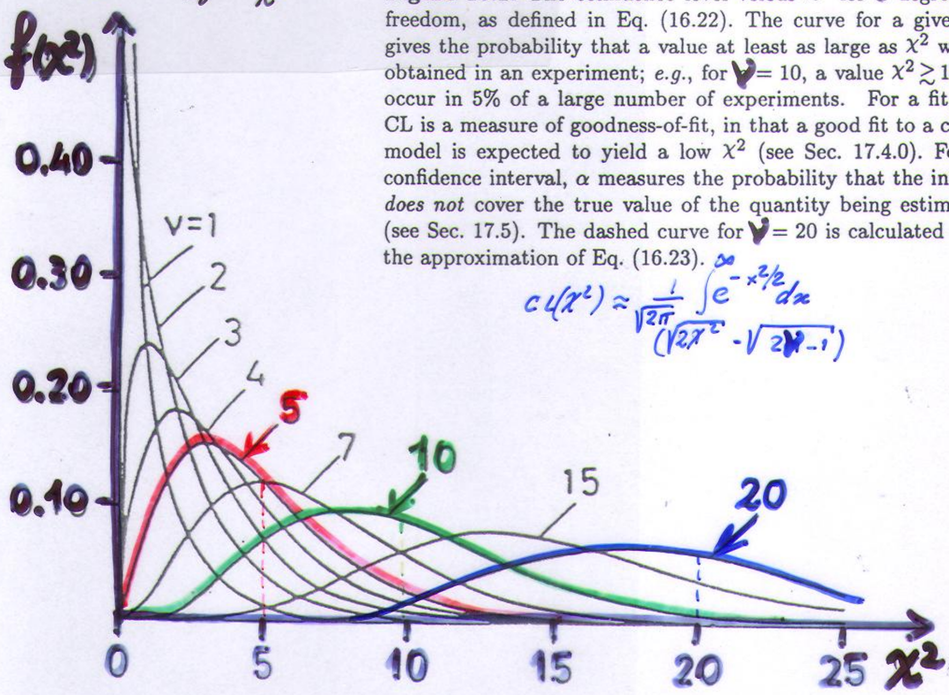


Figure 16.1: The confidence level versus χ^2 for ν degrees of freedom, as defined in Eq. (16.22). The curve for a given ν gives the probability that a value at least as large as χ^2 will be obtained in an experiment; *e.g.*, for $\nu = 10$, a value $\chi^2 \gtrsim 18$ will occur in 5% of a large number of experiments. For a fit, the CL is a measure of goodness-of-fit, in that a good fit to a correct model is expected to yield a low χ^2 (see Sec. 17.4.0). For a confidence interval, α measures the probability that the interval *does not* cover the true value of the quantity being estimated (see Sec. 17.5). The dashed curve for $\nu = 20$ is calculated using the approximation of Eq. (16.23).

$$CL(\chi^2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(\sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2\nu - 1})}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx$$

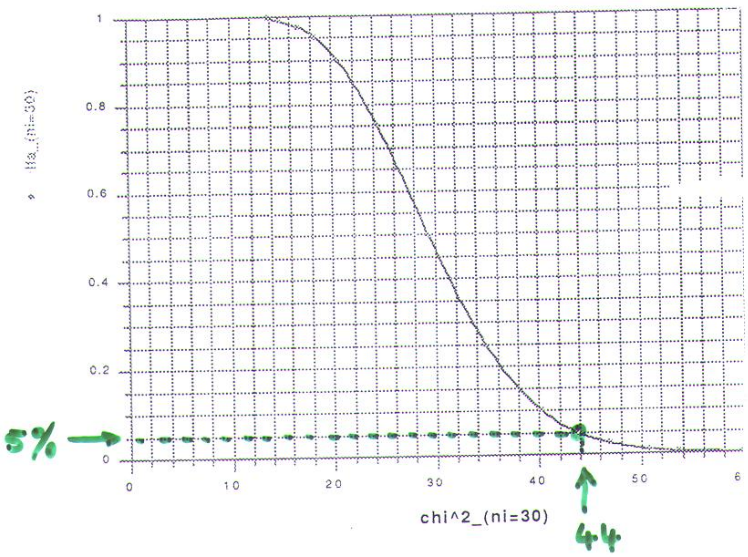


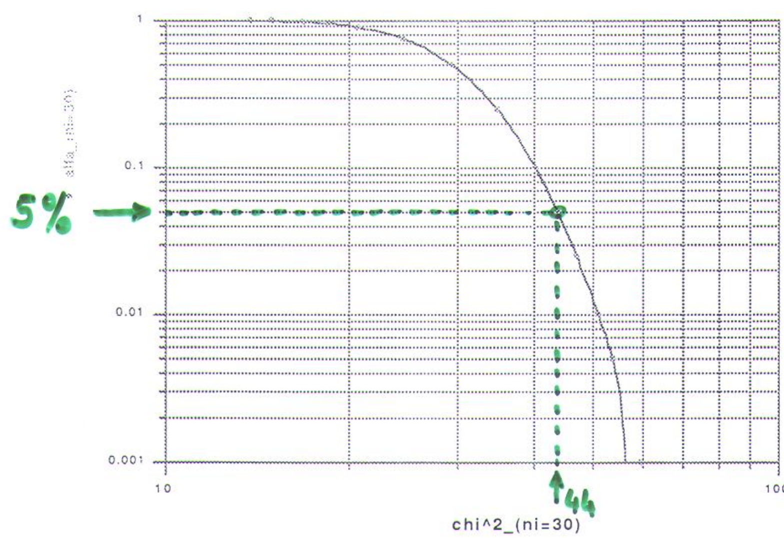
$\langle \chi^2 \rangle - \chi^2_{\text{più probabile}} \longrightarrow \approx 0$ per $\nu \nearrow$

cioè: $f(\chi^2) \approx$ Gauss

$\nu = 30$: $\int_{\chi^2}^{\infty} f(\chi^2;\nu)\,d(\chi^2)$ vs. χ^2

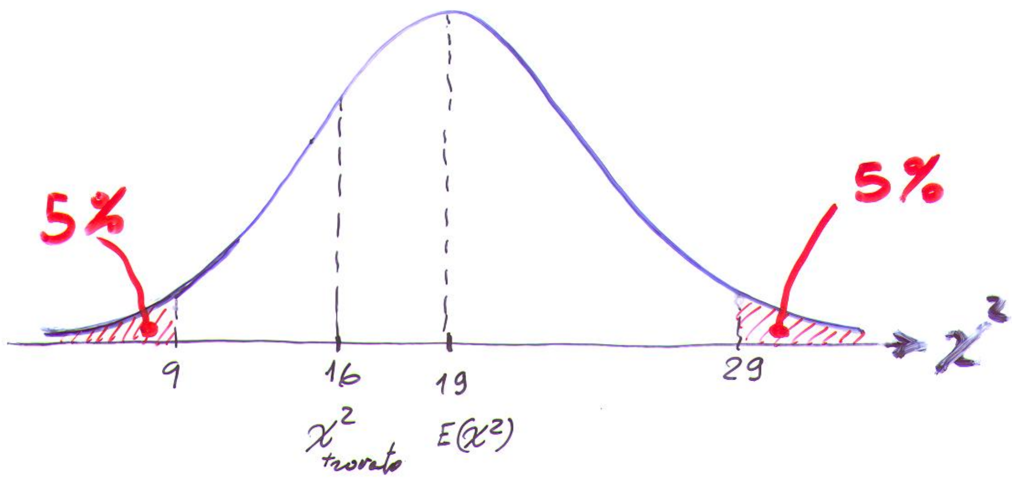
alfa_(ni=30)	chi^2_(ni=30)
0.9950	13.7870
0.9900	14.9535
0.9750	16.7908
0.9500	18.4926
0.9000	20.5992
0.7500	[illegible]
0.5000	29.3360
0.2500	34.7998
0.1000	40.2560
0.0500	43.7729
0.0250	46.9792
0.0100	50.8922
0.0050	53.6720
0.0010	59.7030





P.S. VANTAGGIO EVIDENTE NELL'USO DI SCALE LOGARITMICHE

$\nu = 19$: "PEARSON" $\approx$ "GAUSS"



$$P_{GAUSS}\left(\langle x \rangle - 1{,}65 * \sigma \le x \le \langle x \rangle + 1{,}65 * \sigma \right) = 90\%$$

$$\langle x \rangle \to \nu \qquad \sigma \to \sqrt{2\nu} \qquad x \to \chi^2$$

$$\begin{cases} 19 - 1{,}65\sqrt{2 \times 19} \simeq 8{,}83 \\ 19 + 1{,}65\sqrt{2 \times 19} \simeq 29{,}17 \end{cases}$$

..... ATTENZIONE, NON SOLO A VALORI TROPPO GRANDI, MA ANCHE TROPPO PICCOLI PER χ^2....

ESISTONO TABELLE "ORGANIZZATE" IN VARI MODI ......

APPENDICE D dal Taylor

$$\begin{array}{c|c} d \diagdown \tilde{\chi}^2 & \dots \\ \hline \vdots & \alpha \end{array}$$

Probabilità per χ^2 ridotto

Se una serie di misure è raggruppata in intervalli $k = 1, \ldots, n$, denotiamo con O_k il numero di misure osservate nell'intervallo k. Il numero "atteso" (sulla base di qualche distribuzione assunta od attesa) nell'intervallo k è denotato con E_k. La bontà con cui le osservazoni si adattano alla distribuzione attesa è indicata dal chi quadrato ridotto, $\tilde{\chi}^2$, definito come

$$\tilde{\chi}^2 = \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{n} \frac{(O_k - E_k)^2}{E_k},$$

dove d è il numero di gradi di libertà, $d = n - c$, e c è il numero di vincoli (vedi Sezione 12.3). Il valore medio atteso di $\tilde{\chi}^2$ è 1. Se $\tilde{\chi}^2 \gg 1$, i risultati osservati non si adattano alla distribuzione assunta; se $\tilde{\chi}^2 \lesssim 1$, l'accordo è soddisfacente.

$E\left(\frac{\chi^2}{d}\right) = E\left(\tilde{\chi}^2\right) = 1$

Questo test è reso quantitativo con le probabilità riportate in Tabella D. $\tilde{\chi}_o{}^2$ denoti il valore di $\tilde{\chi}^2$ effettivamente ottenuto in un esperimento con d gradi di libertà. Il numero $P_d(\tilde{\chi}^2 \geqslant \tilde{\chi}_o{}^2)$ è la probabilità di ottenere un valore di $\tilde{\chi}^2$ grande quanto l'osservato $\tilde{\chi}_o{}^2$ se le misure hanno seguito realmente la distribuzione assunta. Così se, $P_d(\tilde{\chi}^2 \geqslant \tilde{\chi}_o{}^2)$ è grande, la distribuzione osservata ed attesa sono consistenti; se è piccola esse sono probabilmente in disaccordo. In particolare, se $P_d(\tilde{\chi}^2 \geqslant \tilde{\chi}_o{}^2)$ è minore del 5 percento, diciamo che il disaccordo è "significativo", e rigettiamo la distribuzione assunta al livello del 5 percento. Se è minore di 1 percento, il disaccordo è chiamato "altamente significativo", e rigettiamo la distribuzione assunta al livello dell'1 percento.

Per esempio, supponiamo di ottenere un chi quadrato ridotto di 2.6 (cioé, $\tilde{\chi}_o{}^2 = 2.6$) in un esperimento con sei gradi di libertà ($d = 6$). Secondo la Tabella D, la probabilità di ottenere $\tilde{\chi}^2 \geqslant 2.6$ è 1.6 percento, se le misure fossero governate dalla distribuzione assunta. Così al livello del 5 percento (ma non completamente al livello dell'1 percento), dovremmo rigettare la distribuzione assunta. Per ulteriore discussione vedi Capitolo 12.

I valori nella Tabella D sono stati calcolati dall'integrale

$$P_d(\tilde{\chi}^2 \geqslant \tilde{\chi}_o{}^2) = \frac{2}{2^{d/2}\Gamma(d/2)} \int_{\chi_o}^{\infty} x^{d-1} e^{-x^2/2}\, dx. \qquad = \alpha$$

Vedi, per esempio, E.M. Pugh e G.H. Winslow, "The Analysis of Physical Measurments" (Addison-Wesley, 1966) Sezione 12-5.

Tabella D. La probabilità percentuale $P_d(\tilde{\chi}^2 \geq \tilde{\chi}_o^2)$ **di ottenere un valore di $\tilde{\chi}^2 \geq \tilde{\chi}_o^2$ in una esperienza con d gradi di libertà, come una funzione di d e $\tilde{\chi}_o^2$. (I bianchi indicano probabilità minori di 0.05 percento).**

d \ $\tilde{\chi}_o^2$	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	8.0	10.0
1	100	48	32	22	16	11	8.3	6.1	4.6	3.4	2.5	1.9	1.4	0.5	0.2
2	100	61	37	22	14	8.2	5.0	3.0	1.8	1.1	0.7	0.4	0.2	—	—
3	100	68	39	21	11	5.8	2.9	1.5	0.7	0.4	0.2	0.1	—	—	—
4	100	74	41	20	9.2	4.0	1.7	0.7	0.3	0.1	0.1	—	—	—	—
5	100	78	42	19	7.5	2.9	1.0	0.4	0.1	—	—	—	—	—	—

P < 5x10⁻⁴

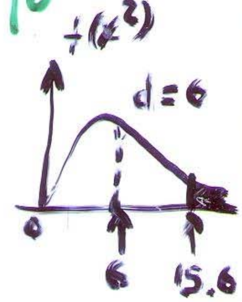
$\tilde{\chi}^2 = \frac{\chi^2}{d} = 2{,}6$

d \ $\tilde{\chi}_o^2$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0
1	100	65	53	44	37	32	27	24	21	18	16	14	12	11	9.4	8.3
2	100	82	67	55	45	37	30	25	20	17	14	11	9.1	7.4	6.1	5.0
3	100	90	75	61	49	39	31	24	19	14	11	8.6	6.6	5.0	3.8	2.9
4	100	94	81	66	52	41	31	23	17	13	9.2	6.6	4.8	3.4	2.4	1.7
5	100	96	85	70	55	42	31	22	16	11	7.5	5.1	3.5	2.3	1.6	1.0
6	100	98	88	73	57	42	30	21	14	9.5	6.2	4.0	2.5	1.6	1.0	0.6
7	100	99	90	76	59	43	30	20	13	8.2	5.1	3.1	1.9	1.1	0.7	0.4
8	100	99	92	78	60	43	29	19	12	7.2	4.2	2.4	1.4	0.8	0.4	0.2
9	100	99	94	80	62	44	29	18	11	6.3	3.5	1.9	1.0	0.5	0.3	0.1
10	100	100	95	82	63	44	29	17	10	5.5	2.9	1.5	0.8	0.4	0.2	0.1
11	100	100	96	83	64	44	28	16	9.1	4.8	2.4	1.2	0.6	0.3	0.1	0.1
12	100	100	96	84	65	45	28	16	8.4	4.2	2.0	0.9	0.4	0.2	0.1	—
13	100	100	97	86	66	45	27	15	7.7	3.7	1.7	0.7	0.3	0.1	0.1	—
14	100	100	98	87	67	45	27	14	7.1	3.3	1.4	0.6	0.2	0.1	—	—
15	100	100	98	88	68	45	26	14	6.5	2.9	1.2	0.5	0.2	0.1	—	—
16	100	100	98	89	69	45	26	13	6.0	2.5	1.0	0.4	0.1	—	—	—
17	100	100	99	90	70	45	25	12	5.5	2.2	0.8	0.3	0.1	—	—	—
18	100	100	99	90	70	46	25	12	5.1	2.0	0.7	0.2	0.1	—	—	—
19	100	100	99	91	71	46	25	11	4.7	1.7	0.6	0.2	0.1	—	—	—
20	100	100	99	92	72	46	24	11	4.3	1.5	0.5	0.1	—	—	—	—
22	100	100	99	93	73	46	23	10	3.7	1.2	0.4	0.1	—	—	—	—
24	100	100	100	94	74	46	23	9.2	3.2	0.9	0.3	0.1	—	—	—	—
26	100	100	100	95	75	46	22	8.5	2.7	0.7	0.2	—	—	—	—	—
28	100	100	100	95	76	46	21	7.8	2.3	0.6	0.1	—	—	—	—	—
30	100	100	100	96	77	47	21	7.2	2.0	0.5	0.1	—	—	—	—	—

d= 6

$100 \cdot P(\tilde{\chi}^2 \geq 2.6, d=6)$

P < 0.05%



Esempio:

$$\tilde{\chi}^2 = \frac{\chi^2}{d} = \frac{15.6}{6} = 2.6 \longrightarrow P(\chi^2 \geq 15{,}6\ ;\ d=6) =$$

$$= P(\tilde{\chi}^2 \geq 2{,}6\ ;\ d=6) = 1{,}6\,\%$$

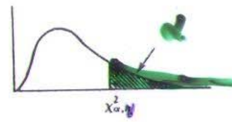
..... "NUMEROLOGIA" .....

$$\frac{\chi^2_{\nu,5\%}-\nu}{\sqrt{2\nu}} \simeq 1{,}8 \rightarrow \boxed{\chi^2_{\nu,5\%} \simeq \nu + 1{,}8\cdot\sqrt{2\nu}} \rightarrow \boxed{\left(\frac{\chi^2_{\nu,5\%}}{\nu}\right) = 1 + \frac{2{,}5}{\sqrt{\nu}}}$$

TAV. 3b $\boxed{\textit{Distribuzione } \chi^2}$

Per diversi livelli di probabilità α, la tavola fornisce i valori χ^2_ν, tali che $P(\chi^2_\nu > \chi^2_{\alpha,\nu}) = \alpha$, dove χ^2_ν è una variabile chi-quadro con ν gradi di libertà.

$\alpha = 5\%$



$\frac{\chi^2_{\nu,5\%}-\nu}{\sqrt{2\nu}}$	$\chi^2_{\nu,5\%}/\nu$	ν \ α	0.250	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005	0.001
		1	1.32330	2.70554	3.84146	5.02389	6.63490	7.87944	10.828
		2	2.77259	4.60517	5.99147	7.37776	9.21034	10.5966	13.816
		3	4.10835	6.25139	7.81473	9.34840	11.3449	12.8381	16.266
1,95	2,37	4	5.38527	7.77944	9.48773	11.1433	13.2767	14.8602	18.467
		5	6.62568	9.23635	11.0705	12.8325	15.0863	16.7496	20.515
		6	7.84080	10.6446	12.5916	14.4494	16.8119	18.5476	22.458
		7	9.03715	12.0170	14.0671	16.0128	18.4753	20.2777	24.322
		8	10.2188	13.3616	15.5073	17.5346	20.0902	21.9550	26.125
1,87	1,88	9	11.3887	14.6837	16.9190	19.0228	21.6660	23.5893	27.877
		10	12.5489	15.9871	18.3070	20.4831	23.2093	25.1882	29.588
		11	13.7007	17.2750	19.6751	21.9200	24.7250	26.7569	31.264
		12	14.8454	18.5494	21.0261	23.3367	26.2170	28.2995	32.909
		13	15.9839	19.8119	22.3621	24.7356	27.6883	29.8194	34.528
1,83	1,69	14	17.1170	21.0642	23.6848	26.1190	29.1413	31.3193	36.123
		15	18.2451	22.3072	24.9958	27.4884	30.5779	32.8013	37.697
		16	19.3688	23.5418	26.2962	28.8454	31.9999	34.2672	39.252
		17	20.4887	24.7690	27.5871	30.1910	33.4087	35.7185	40.790
		18	21.6049	25.9894	28.8693	31.5264	34.8053	37.1564	42.312
1,81	1,59	19	22.7178	27.2036	30.1435	32.8523	36.1908	38.5822	43.820
		20	23.8277	28.4120	31.4104	34.1696	37.5662	39.9908	45.315
		21	24.9348	29.6151	32.6705	35.4789	38.9321	41.4010	46.797
		22	26.0393	30.8133	33.9244	36.7807	40.2894	42.7956	48.268
		23	27.1413	32.0069	35.1725	38.0757	41.6384	44.1813	49.728
1,80	1,52	24	28.2412	33.1963	36.4151	39.3641	42.9798	45.5585	51.179
		25	29.3389	34.3816	37.6525	40.6465	44.3141	46.9278	52.600
		26	30.4345	35.5631	38.8852	41.9232	45.6417	48.2899	54.052
		27	31.5284	36.7412	40.1133	43.1944	46.9630	49.6449	55.476
		28	32.6205	37.9159	41.3372	44.4607	48.2782	50.9933	56.892
1,78	1,47	29	33.7109	39.0875	42.5569	45.7222	49.5879	52.3356	58.302
		30	34.7998	40.2560	43.7729	46.9792	50.8922	53.6720	59.703
		40	45.6160	51.8050	55.7585	59.3417	63.6907	66.7659	73.402
		50	56.3336	63.1671	67.5048	71.4202	76.1539	79.4900	86.661
1,74	1,32	60	66.9814	74.3970	79.0819	83.2976	88.3794	91.9517	99.607
		70	77.5766	85.5271	90.5312	95.0231	100.425	104.215	112.317
		80	88.1303	96.5782	101.879	106.629	112.329	116.321	124.839
		90	98.6499	107.565	113.145	118.136	124.116	128.299	137.208
1,72	1,24	100	109.141	118.498	124.342	129.561	135.807	140.169	149.449

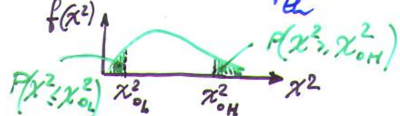
Fonte: Elaborata da Pearson e Hartley [1966].

Confronto tra istogramma "exp" e "th"

$$\chi^2 = \sum \frac{(F_{exp} - F_{th})^2}{F_{th}} \simeq 0 \longleftrightarrow \text{ogni } F_{exp} \simeq F_{th}$$

ma è poco probabile !

... le fluttuazioni statistiche esistono!



$\chi^2 \nearrow \longleftrightarrow$ per $\frac{(F_{exp} - F_{th})^2}{F_{th}} \nearrow$: disaccordo $\nearrow$

... confronto più distribuzioni "th" con quella "exp" ..... scelta!

Per sole fluttuazioni statistiche (fissato ν)
mi aspetto di avere un certo χ_0^2 o valori superiori
con una certa probabilità P :

$$\boxed{P(\chi^2 \geq \chi_0^2, \nu)}$$

se: $\chi^2_{trovato} = 18,5$ con $\nu = 32$

$$\left(\begin{aligned} \chi^2_{>5\%} &\simeq \nu + 1,8\sqrt{2\nu} \\ &\simeq 32 + 1,8\sqrt{64} \\ &\simeq 46,4 \end{aligned} \right)$$

$P(\chi^2 \geq 15{,}0, \nu = 32) = 99\%$

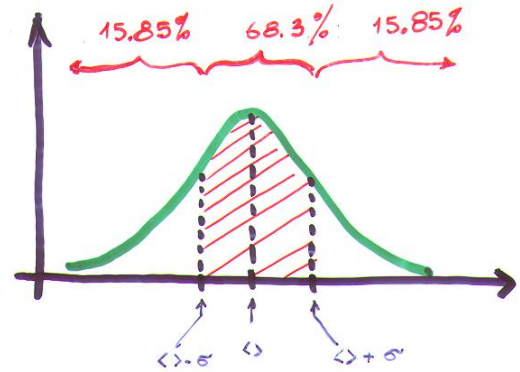
15,0	99 %
18.5	95
20.6	90

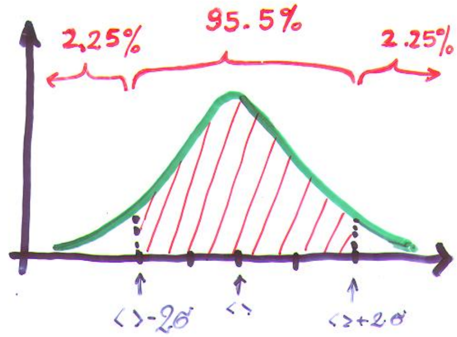
allora: l'ipotesi fatta è verosimile al 95% , cioè

commetteremmo un errore con probabilità del 95%
scartando l'ipotesi

In genere si assume che se $P(\chi^2 \geq \chi_0^2, \nu) < 5\%$
l'ipotesi è da rigettare con una probabilità < 5%
di prendere la decisione sbagliata
e > 95% di prendere la decisione corretta !

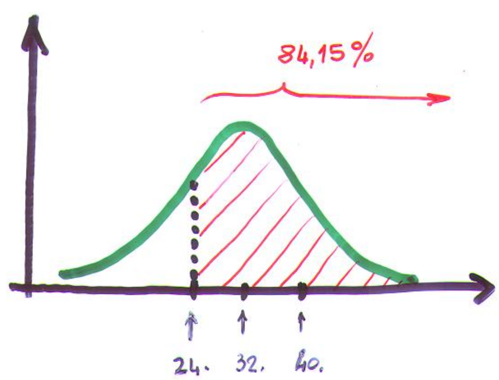
Osservazione : $f(\chi^2) \approx$ Gauss (per $\nu \geq 20$)

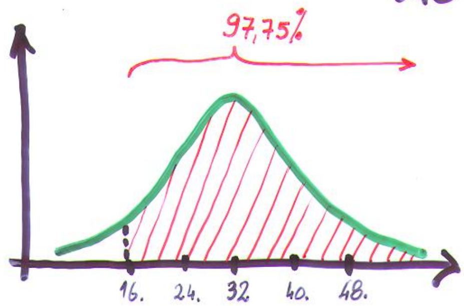


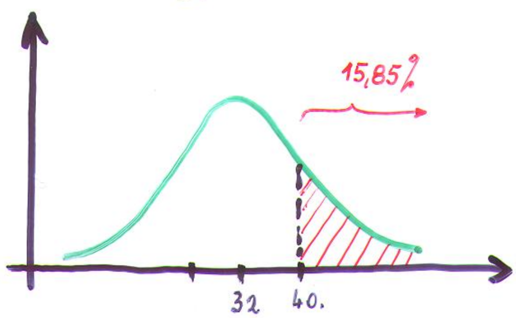


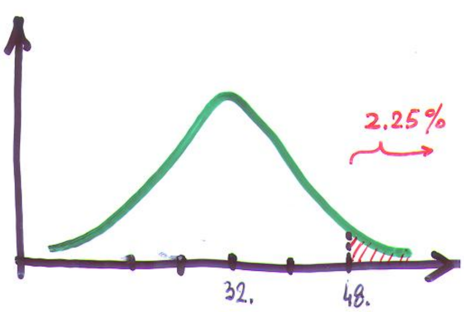
$\chi^2 = \ldots\ldots$ | $\longrightarrow$ $E(\chi^2) = \nu = 32$ | $\longrightarrow$ $32 \mp 8 = \begin{cases} 24 \\ 40 \end{cases}$

$\nu = 32$ | $\sigma(\chi^2) = \sqrt{2\nu} = 8$ | $32 \mp 16 = \begin{cases} 16 \\ 48 \end{cases}$









P.S. Gauss: $P(\mu - 1{,}65\sigma < x < \mu + 1{,}65\sigma) = 90\%$

$\hookrightarrow$ per $\nu = 32$: $32 \mp 13.2 = \begin{cases} 18{,}8 \\ 45{,}2 \end{cases}$

→ Ho **N=147** misure ripetute di lunghezza **ℓ**
la cui variabilità massima è superiore alla sensibilità **δ**
dello strumento usato:

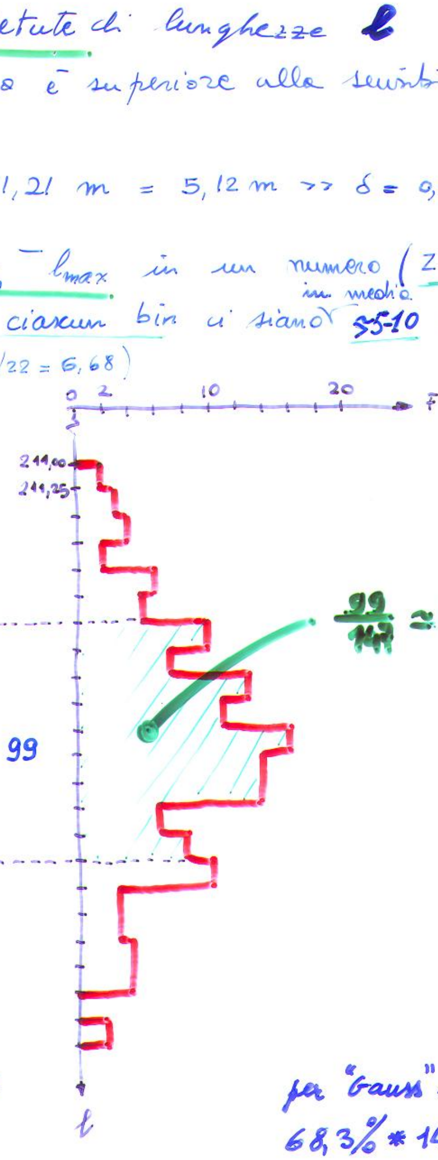
$$\ell_{max} - \ell_{min} = 216,33 - 211,21\ m = 5,12\ m \gg \delta = 0,01\ m$$

→ Suddivido l'intervallo $\ell_{min} - \ell_{max}$ in un numero (Z = 22 in media) di bin in modo che in ciascun bin ci siano 5-10 misure
$(5,12\ m / 22\ bin \hat{=} 23,27\ cm/bin\ \&\ 147/22 = 6,68)$

ℓ_i	$\ell_{c_i} = \frac{\ell_{i-1}+\ell_i}{2}$	F_i
211,00		
25	211,125	2
50	375	3
75	625	4
212,00	875	2
25	212,125	6
50	375	5
75	625	10
213,00	875	7
25	213,125	13
50	375	11
75	625	16
214,00	825	14
25	214,125	14
50	375	6
75	625	8
215,00	875	10
25	215,125	3
50	375	3
75	625	4
216,00	875	4
25	216,125	0
50	375	2

$$\left.\begin{matrix}10\\7\\13\\11\\16\\14\\14\\6\\8\end{matrix}\right\} 99$$

$$\sum_1^{22} {}_i F_i = N = 147$$



$\frac{99}{147} \simeq 67,3\%$

per "Gauss" entro ±1σ:
68,3% * 147 = **100**

↓

$$\boxed{\text{calcolo il valore atteso in ogni bin delle } F \text{ secondo Gauss usando } \langle\ell\rangle, \sigma \ldots\ \text{test del } \chi^2}$$

$$\langle\ell\rangle = \frac{\sum_1^{22} {}_i (\ell_{c_i} \cdot F_i)}{\sum_1^{22} {}_i F_i} \cong 213,66\ m$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_1^{22} {}_i (\ell_{c_i} - \langle\ell\rangle)^2 \cdot F_i}{\left(\sum_1^{22} {}_i F_i\right) - 1}} \simeq 1,2\ m$$

$$\sigma(\langle\ell\rangle) = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \cong 0,098\ m$$

$$F_{G_i} = p_i \cdot \boxed{N} \leftarrow 147$$

$$\underbrace{p_i}_{\displaystyle f_G(x = \ell_{c_i}) \cdot \boxed{\Delta \ell}} \qquad \Delta\ell \leftarrow 0{,}25\ \mathrm{m\ ogni\ bin}$$

$$\underbrace{f_G(x=\ell_{c_i})}_{\displaystyle \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left[- \frac{(\ell_{c_i} - \langle \ell \rangle)^2}{2\sigma^2} \right]}$$

in media 213,66 m

1,19 m

$$\boxed{F_{G_i} = 12{,}32 \cdot \exp\left(- 0{,}353 \cdot (\ell_{c_i} - 213{,}66)^2 \right)}$$

ℓ_{c_i}	F_{G_i}
208,875	0,004
209,125	0,01
375	0,02
625	0,04
209,875	0,08
210,125	0,15
375	0,27
625	0,48
ℓ_{c_i} = 210,875	F_{G_i} = 0,80

i	ℓ_{c_i}	F_i	F_{G_i}
i = 1	ℓ_{c_i} = 211,125	F_i = 2	F_{G_i} = 1,27
2	375	3	1,95
3	625	4	2,86
4	875	2	4,00
5	212,125	6	5,36
6	375	5	6,88
7	625	10	8,44
8	875	7	9,91
9	213,125	13	11,14
10	375	11	11,97
11	625	16	12,31
12	875	14	12,12
13	214,125	14	11,41
14	375	6	10,29
15	625	8	8,87
16	875	10	7,32
17	215,125	3	5,78
18	375	3	4,36
19	625	4	3,15
20	875	4	2,18
21	216,125	0	1,44
22	375	2	0,91
		147	143,92

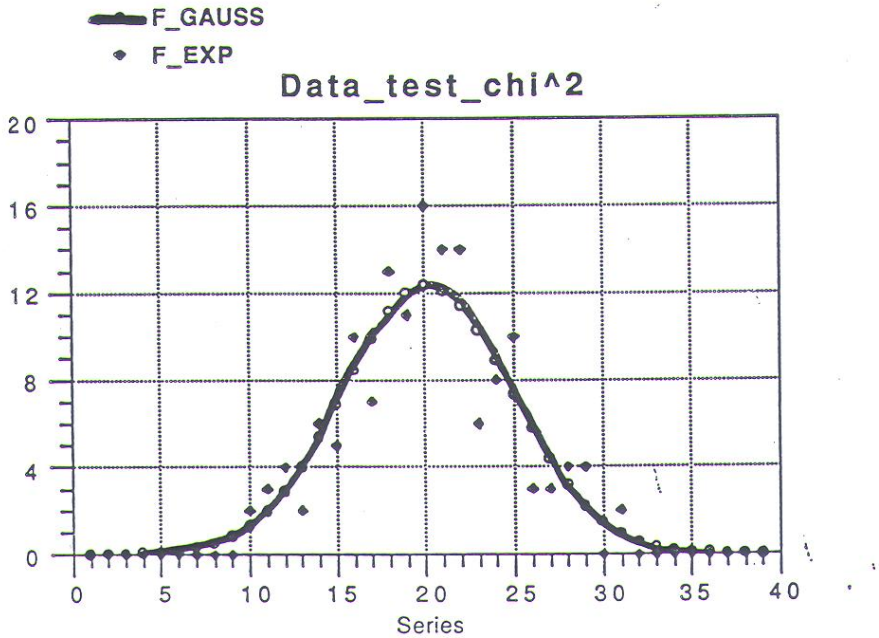
$$\frac{147 - 143{,}92}{147} \simeq 2\%$$

ℓ_{c_i}	F_{G_i}
ℓ_{c_i} = 216,625	F_{G_i} = 0,55
875	0,32
217,125	0,18
375	0,09
625	0,05
875	0,02
218,125	0,01
375	0,0048

$$\chi^2 = \sum_{i}^{37\,\mathrm{bin}} \left(\frac{F_i - F_{G_i}}{\sqrt{F_{G_i}}} \right)^2 = \sum_{i}^{37\,\mathrm{bin}} \frac{(F_i - F_{G_i})^2}{F_{G_i}} = 1{,}85 + 15{,}66 + 1{,}22 = 18{,}73$$

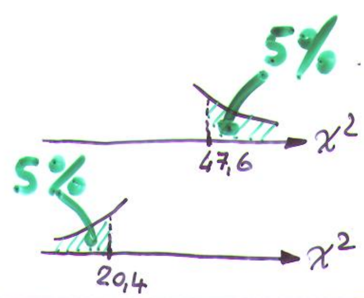
8 + 22 + 7 = 37

$$\nu = 37 - \underset{\langle \ell \rangle,\, \sigma}{2} - \underset{\Sigma F_i = N}{1} = 34 \qquad P(\chi^2 > 17{,}7,\ \nu = 34) = 99\% \qquad P(\chi^2 > 21{,}7,\ \nu = 34) = 95\%$$



$$\left(\chi^2_{\geq 5\%}\right)_{\approx GAUSS} = \nu + 1{,}65\sqrt{2\nu}$$

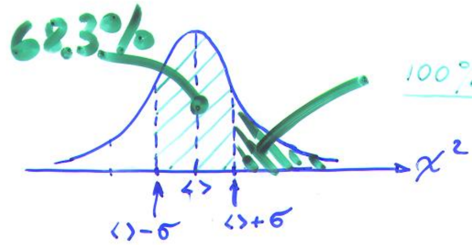
per $\nu = 34$: $\begin{cases} \nu + 1{,}65\sqrt{2\nu} = 47{,}6 \\ \nu - 1{,}65\sqrt{2\nu} = 20{,}4 \end{cases}$



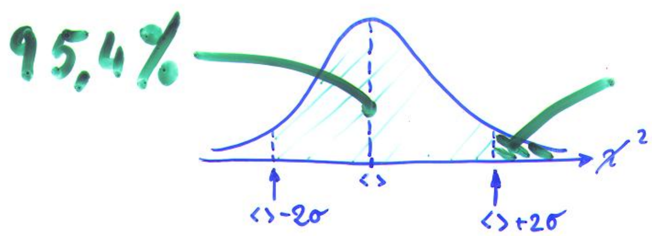
$\chi^2 = 18.73 \quad , \quad \nu = 34$

$\rightarrow$ poiché $\nu \gtrsim 30$: $f(\chi^2) \approx$ Gauss

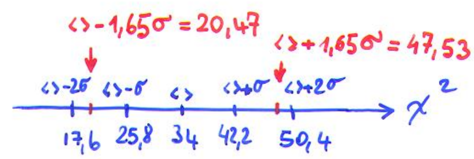
$$\langle \chi^2 \rangle = \nu = 34$$
$$\sigma(\chi^2) = \sqrt{2\nu} = \sqrt{68} = 8{,}2$$



$$\frac{100\% - 68{,}3\%}{2} = 15{,}85\%$$



$$\frac{100\% - 95{,}4\%}{2} = 2{,}3\%$$

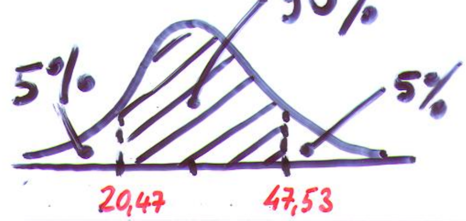


$\rightarrow$ $100\% - 15{,}85\% = 84{,}15\%$ $\quad P(\chi^2 > 25{,}8)$

$\rightarrow$ $100\% - 5\% = 95\% = P(\chi^2 > 20{,}47)$

$\rightarrow$ $100\% - 2{,}3\% = 97{,}7\%$ $\quad P(\chi^2 > 17{,}6)$

P.S.



$$P(\chi^2 < 20{,}47) = 5\%$$
$$P(\chi^2 < 17{,}6) = 2{,}3\%$$

...... cosa avrei ottenuto considerando solo i 22 canali centrali?

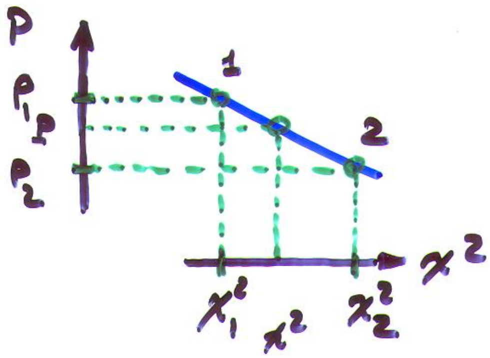
$$\chi^2 = \sum_{i,\ 22\,bin} \left(\frac{F_i - F_{Gi}}{\sqrt{F_{Gi}}}\right)^2 = 15.66$$

$$\nu = 22 - 2 - 1 = 19$$

$$\left(\left(\chi^2_{\geq 5\%}\right)_{\approx GAUSS} = \begin{cases} \nu + 1{,}65\sqrt{2\nu} = 29{,}2 \\ \nu - 1{,}65\sqrt{2\nu} = 8{,}8 \end{cases} \right)$$

$$P_1\left(\chi_1^2 > 14.56\,;\ \nu = 19\right) = 75\ \%$$

$$P_2\left(\chi_2^2 > 18.34\,;\ \nu = 19\right) = 50\ \%$$



$$\frac{P_1 - P_2}{\chi_2^2 - \chi_1^2} = \frac{P_1 - P}{\chi^2 - \chi_1^2}$$

$$P(\chi^2) = P_1 - \frac{P_1 - P_2}{\chi_2^2 - \chi_1^2}\left(\chi^2 - \chi_1^2\right)$$

$$\simeq 0{,}75 - \frac{0{,}75 - 0{,}50}{18{,}34 - 14{,}56} \cdot \left(15{,}66 - 14{,}56\right)$$

$$\simeq 0.68$$

$$\longrightarrow\ P\left(\chi^2 > 15.66;\ \nu = 19\right) = 68\ \%$$

$$P\left(\chi^2 < 15.66\ ;\ \nu = 19\right) = 32\ \%$$

→ Test del χ^2 su una distribuzione di frequenze ma con banda statistica!

	x_{c_i}		m_i
4.0	4.25	4.5	1
4.5	4.75	5.0	2
5.0	5.25	5.5	1
5.5	5.75	6.0	3
6.0	6.25	6.5	6
6.5	6.75	7.0	6
7.0	7.25	7.5	5
7.5	7.75	8.0	15
8.0	8.25	8.5	5
8.5	8.75	9.0	8
9.0	9.25	9.5	7
9.5	9.75	10.0	6
10.0	10.25	10.5	1

.... uso il numero minimo di "bin" in maniera che $\nu \geq 1$ ....

$$N = \sum m_i = 66$$

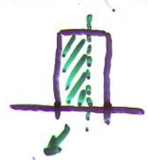
$$\langle x \rangle = \frac{\sum (x_{c_i} \cdot m_i)}{\sum m_i} = 7,75$$

$$\sigma(x) = \sqrt{\frac{\sum \left[(x_{c_i} - \langle x \rangle)^2 \cdot m_i \right]}{N-1}} = \cancel{1.38} \quad 1,4$$

$$\sigma(\langle x \rangle) = \frac{\sigma(x)}{\sqrt{N}} = 0.17$$

$$\hookrightarrow \left(7,75 \pm 0,17 \right)$$

↓



$$x < \left[\langle x \rangle - \sigma(x) = 6.37 \right]$$

$$\mathcal{O}_1 = 1+2+1+3+6\left(\frac{6,37-6,0}{6.5-6.0}\right) \simeq 11 \qquad P_1(\text{GAUSS}) \cong 16\% \qquad E_1(\text{GAUSS}) \cong 10.56$$

$$\left[\langle x \rangle - \sigma(x) = 6.37 \right] < x < \left[\langle x \rangle = 7.75 \right]$$

$$\mathcal{O}_2 = 6\left(\frac{6.50-6.37}{6.5-6.0}\right) + 6 + 5 + 15\left(\frac{7.75-7.5}{8.0-7.5}\right) \simeq 20 \qquad P_2 \simeq 34\% \qquad E_2 \simeq 22.44$$

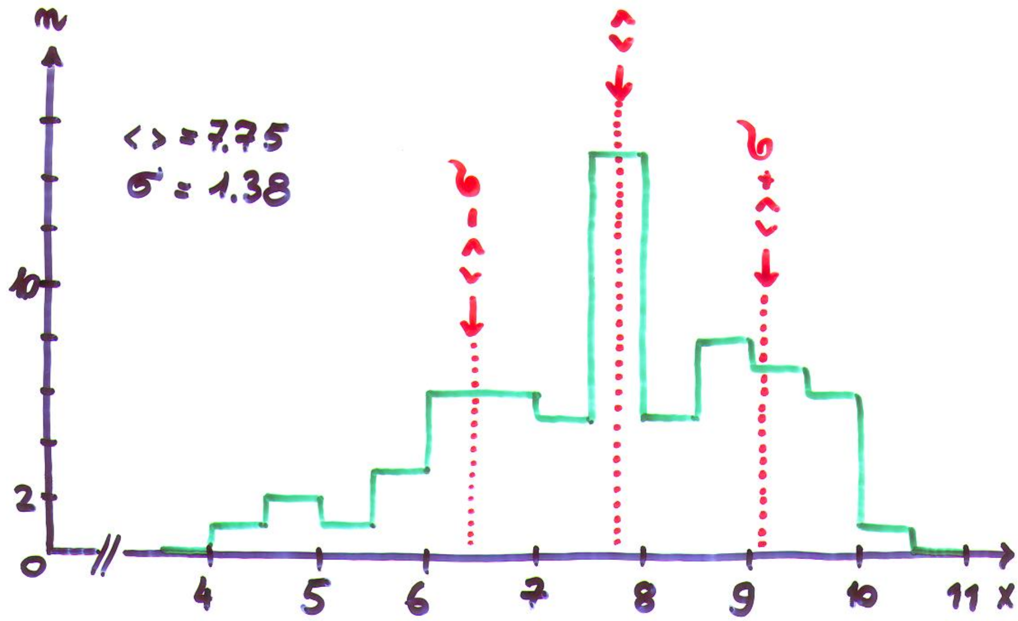
$$\left[\langle x \rangle = 7.75 \right] < x < \left[\langle x \rangle + \sigma(x) = 9.13 \right]$$

$$\mathcal{O}_3 = 15\left(\frac{8.0-7.75}{8.0-7.5}\right) + 5 + 8 + 7\left(\frac{9.13-9.0}{9.5-9.0}\right) \simeq 22 \qquad P_3 \simeq 34\% \qquad E_3 \simeq 22.44$$

$$x > \left[\langle x \rangle + \sigma(x) = 9.13 \right]$$

$$\mathcal{O}_4 = 7\left(\frac{9.50-9,13}{9.5-9.0}\right) + 6 + 1 \simeq 12 \qquad P_4 \simeq 16\% \qquad E_4 \simeq 10.56$$

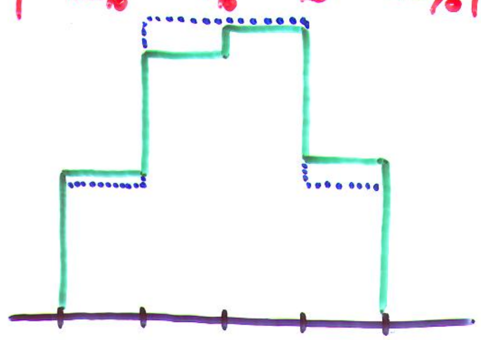
%



F^{exp}	11	20	22	12
F^{G}	10.56	22.44	22.44	10.56

$\left| \sum \frac{F^{exp} - F^{G}}{F^{G}} \right| \longrightarrow \left| +4.2\% \; -10.9\% \; -2.0\% \; +13.6\% \right| = 4.9\%$

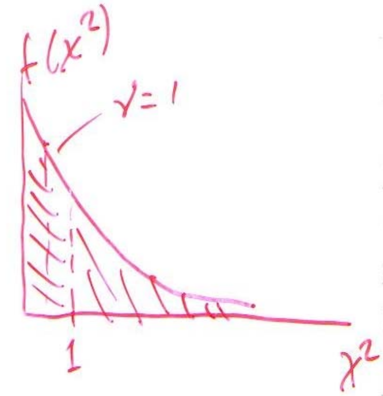
$\sum \left| \frac{F^{exp} - F^{G}}{F^{G}} \right| \longrightarrow$ 30.7%



→ "DISACCORDO" < 31%

→ "ACCORDO" > 69%

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{k=4} \left[\frac{(O_k - E_k)^2}{E_k} \right] = 0.487$$

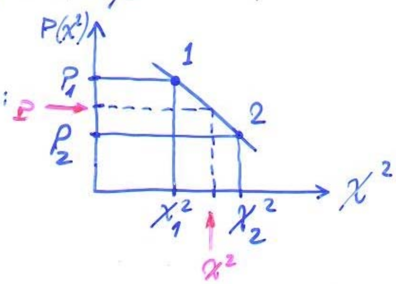


$$\nu = \underbrace{4}_{\text{Numero dei bin}} - \underbrace{2}_{\text{Numero dei parametri}} - \underbrace{1}_{\text{Condizione di normalizzazione}} = 1$$

$$P_1 (\chi^2 \geq 0.45 \;;\; \nu = 1) = 50\%$$

$$P_2 (\chi^2 \geq 0.50 \;;\; \nu = 1) = 48\%$$

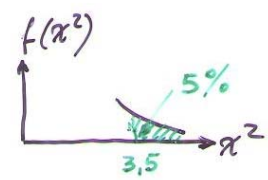
Interpolazione lineare:



$$\frac{P_1 - P_2}{\chi_2^2 - \chi_1^2} = \frac{P_1 - P}{\chi^2 - \chi_1^2}$$

$$P = P_1 - \frac{P_1 - P_2}{\chi_2^2 - \chi_1^2} (\chi^2 - \chi_1^2) = 0,5 - \left(\frac{0,5 - 0,48}{0,50 - 0,45} \right) (0,487 - 0.450) = 48.5\%$$

$$\chi^2_{\geq 5\%} \cong \nu + 1,8 \sqrt{2\nu} \overset{\nu = 1}{=} 3,5$$



→ **confronto tra x_{exp} e x_{th} :**

$x_{exp} = 3.25 \pm 0.06$

$x_{th} = 3.14159$

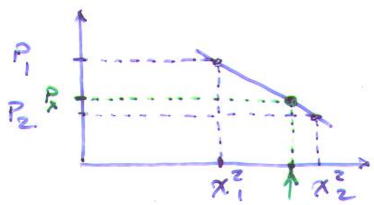
sono in accordo ?

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(x_{exp} - x_{th})_i^2}{\sigma_i^2} = \frac{(3.25 - 3.14159)^2}{(0.06)^2} = 3{,}26$$

$\nu = 1$ non ho ricavato alcun parametro dai dati

$P_1(\chi^2 \geq 2{,}71,\ \nu = 1) = 10\%$

$P_2(\chi^2 \geq 3{,}84,\ \nu = 1) = 5\%$



$$\frac{P_1 - P_2}{\chi_2^2 - \chi_1^2} = \frac{P_1 - P_x}{\chi_x^2 - \chi_1^2}$$

$$P_x = P_1 - (P_1 - P_2)\frac{\chi_x^2 - \chi_1^2}{\chi_2^2 - \chi_1^2} \simeq$$

$$\simeq 0.10 - (0.10 - 0.05)\frac{3{,}26 - 2{,}71}{3.84 - 2{,}71} \simeq$$

$$\simeq 0{,}076$$

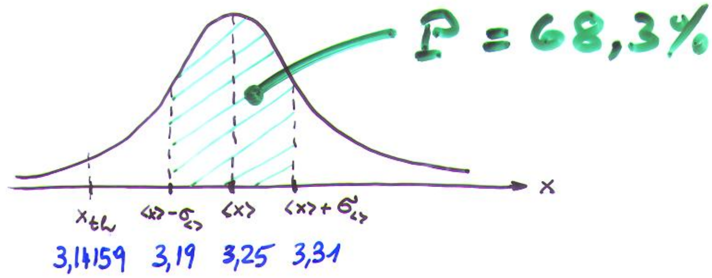
$$\chi^2/\nu = 3.3/1$$

$$\left(\chi^2_{\geq 5\%} \simeq \nu + 1{,}8 \times \sqrt{2\nu} \simeq 1 + 1{,}8 \times 1{,}4 \simeq 3{,}5 > \chi^2_{trovato} \simeq 3{,}3 \right)$$

→ La decisione "c'è accordo" ha una probabilità pari a 7,6% di essere corretta e del 92,4% di essere sbagliata.

→ Se invece diciamo che non c'è accordo tra dato sperimentale x_{exp} e valore predetto dalla Teoria x_{th}, avrei una probabilità pari al 7,6% di sbagliare e del 92,4% di prendere la giusta decisione.

.... utilizzando semplicemente "GAUSS":



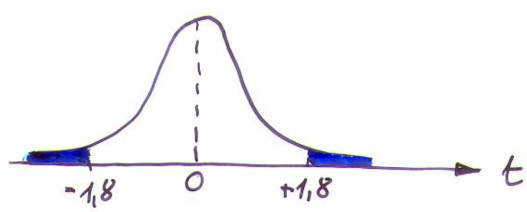
$$t = \frac{\langle x\rangle - x_{th}}{\sigma_{\langle\rangle}} = \frac{3{,}25 - 3{,}14159}{0{,}06} \cong +1{,}8$$

e perchè non anche il caso "simmetrico"?

$$t = \frac{x_{th} - \langle x\rangle}{\sigma_{\langle\rangle}} = \frac{3{,}14159 - 3{,}25}{0{,}06} \cong -1{,}8$$

$$P\left(t \geq +1{,}8 \text{ oppure } t \leq -1{,}8\right) =$$

$$= P\left(|t| \geq 1{,}8\right) = 100\% - 92{,}8\% = 7{,}2\%$$



caso del Test di verosimiglianza di un **modello matematico** nella descrizione del fenomeno .... cioè di un "**best-fit**"

$$\boxed{\chi^2_{fit} = \sum_{1}^{N}{}_i \frac{(y_i^{exp} - y_i^{fit})^2}{\sigma_i^2}}$$

$\nu = N°$punti $- N°$par. del fit

1° caso $\rightarrow \sigma_i$ non dal "fit" ma da misure ripetute ..... dev. standard di y_i^{exp}

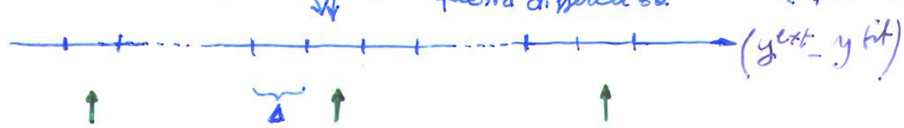
ok!

2° caso $\rightarrow \sigma_i$ dal "fit" ..... $\rightarrow$ $$\boxed{\chi^2_{fit} = \sum_{1}^{M}{}_i \frac{(N \cdot f_{G_i} \cdot \Delta - F_i^{exp})^2}{N \cdot f_{G_i} \cdot \Delta}}$$

Istogramma dei residui :

$$\text{parte intera}\left\{\frac{\max(y_i^{exp} - y_i^{fit})}{\Delta}\right\} = M \qquad \forall\, i = 1, 2, \dots, N$$

F_i^G $\quad$ F_i^{exp} numero di volte che ho questa differenza $\quad \left(\sum_{1}^{M}{}_i F_i = N\right)$



$(y^{ext} - y^{fit})$

1° intervallo $\quad$ i-esimo intervallo $\quad$ M-esimo intervallo

$$f_{G_i} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_{fit}} \exp\left[-\frac{(y_i^{exp} - y_i^{fit})^2}{2\sigma_{fit}^2}\right] \quad ; \quad F_i^G = N \cdot f_{G_i} \cdot \Delta$$

$\nu = \underset{\substack{\text{numero dei "bin"}\\ \text{usati nell'istogramma}\\ \text{dei residui}}}{M}$ $-$ numero dei parametri ricavati dalla distribuzione dei residui $- 1$ per la condizione di normalizzazione

N=24 VALORI MEDI ESTRATTI DA N=24 CAMPIONI DI LANCI RIPETUTI DI 2 DADI ESTRENDO OGNI VOLTA LA SOMMA

6.855	6.8
7.1	7.3
7.06	6.96
6.7	7.09
6.9	6.93
7.03	6.96
6.96	7.14
6.94	6.988
6.54	6.6
6.76	6.1
7.4	6.8
6.732	7.4

TEST DEL χ^2

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\langle x\rangle)^2}{2\sigma^2}\right] \approx$$

6.919

0.28

$$\approx 1{,}4248 \exp\left[-\frac{(x-6.919)^2}{0.1568}\right] ;$$

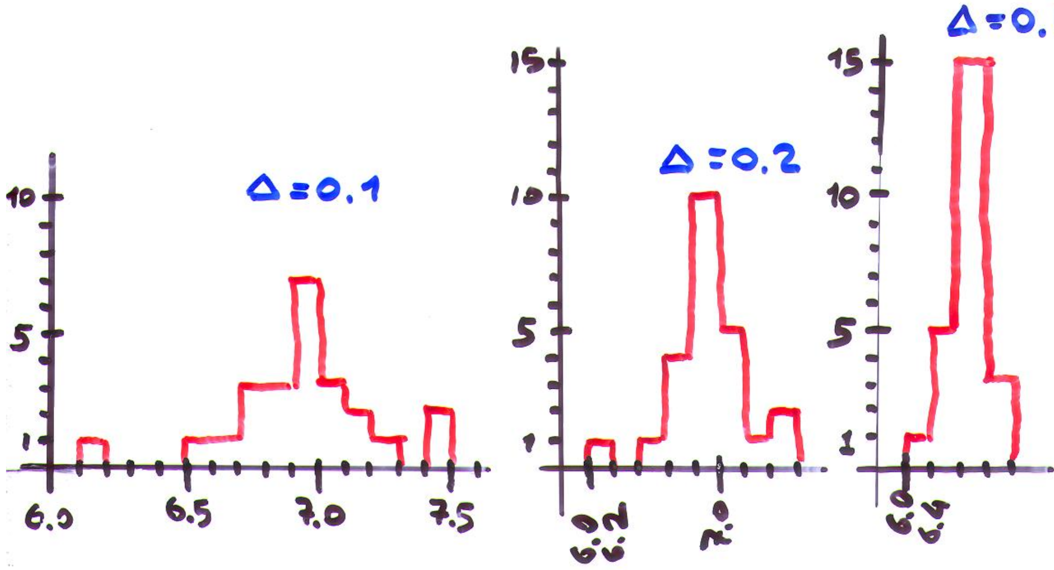
BIN: $\Delta = 0.4$; $N = 24$;

Aspettazione nei diversi bin calcolata nel centro dell'intervallo di ciascun bin (x_{ck}):

x_{ck}	$f(x_{ck}) * \Delta * N$
6.2	0.506
6.6	7.148
7.0	13.118
7.4	3.128

$\nu = 4 - 1 - 2 = 1$

"LANCIO DI DUE DADI"



$N = 24$

$\sigma_{n-1} = 0.28$

$\frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{N}} = 0.057$

$\langle x \rangle = 6.919$

$\sum x = 166,045$

$\sum x^2 = 1150,6077$

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{4} \frac{\left(F_k^{exp} - F_k^{gauss}\right)^2}{F_k^{gauss}} =$$

$$= \frac{(1-0{,}506)^2}{0{,}506} + \frac{(5-7{,}148)^2}{7{,}148} +$$

$$+ \frac{(15-13{,}118)^2}{13{,}118} + \frac{(3-3.128)^2}{3.128} =$$

$$= 0.482 + 0{,}645 + 0{,}270 + 0.005 =$$

$$= 1{,}402$$

$$P(\chi^2 \geq 1{,}402\ ;\ \nu = 1) = 0.24$$

SOGLIA PER LA DECISIONE = 0.05

$$\frac{\chi^2}{\nu} = \frac{1.402}{1}$$