NOTE VARIE:

- MISURE RIPETUTE
- HISTO
- PROPAGAZIONE ERRORE MASSIMO
- MISURA SPESSORE ELENCO PAGINE GIALLE
- MISURA AREA RETTANGOLO
- MISURA AREA CERCHI
- MISURA DENSITA' CUBO
- DETERMINAZIONE GRAFICA DELLA MIGLIORE RETTA

MISURE RIPETUTE

- Presentazione di misure ripetute di una grandezza:
  - tabella
  - grafico (istogramma)

- parametri riassuntivi per una distribuzione di valori:
  - A - valore rappresentativo
  - B - entità dispersione dei valori
  - C - forma distribuzione (livello simmetria/asimmetria della distribuzione)

A

- media aritmetica → $\sum_{i=1}^{N} x_i / N$

- mediana → suddivide l'istogramma dati in due parti di pari area

- moda → individua il massimo nell'istogramma dati

↳ relazione empirica:

$$\left|\bar{x} - \text{moda}(x)\right| \approx 3 \cdot \left|\bar{x} - \text{mediana}(x)\right|$$

B

- deviazione standard → $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N-1}}$

- varianza → σ^2

<u>MOMENTO di ORDINE k</u>

$\mu_k = E[(x - E(x))^k]$ $\quad (\sigma^2 = \mu_2)$

C

- skewness (forma simmetrica rispetto a $\bar{x}$ o prevalenza di una delle 2 code

$(\mu_3 / \sigma^3) = 0$ se popolazione simmetrica rispetto a $\bar{x}$

- kurtosis (indice di quanto sia piccata o "squadrata")

$(\mu_4 / \sigma^4) = 3$ se distribuzione tipo GAUSS

Scarto medio

$$x_1, x_2, \ldots\ldots, x_N$$

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{1}^{N} {}_i\, x_i$$

$$\langle (x - \langle x \rangle) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{1}^{N} {}_i \left(x_i - \left(\frac{1}{N} \sum_{1}^{N} {}_i\, x_i \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{1}^{N} {}_i\, x_i - \cancel{\frac{1}{N}} \cdot \cancel{N} \cdot \left(\frac{1}{N} \sum_{1}^{N} {}_i\, x_i \right) = 0$$

Deviazione standard

a) dati non raggruppati:

$$\sigma(x) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{1}^{N} {}_i (x_i - \langle x \rangle)^2}$$

$$\langle x \rangle = \sum_{1}^{N} {}_i\, x_i / N$$

$$\boxed{\sigma(x) = \sqrt{\frac{N}{N-1} \left(\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \right)}}$$

b) dati raggruppati:

$$\sigma(x) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{1}^{M} {}_k (x_k - \langle x \rangle)^2 P_k}$$

$$\langle x \rangle = \sum_{1}^{M} {}_k\, x_k P_k \Big/ \sum_{1}^{M} {}_k\, P_k$$

$$N = \sum_{1}^{M} {}_k\, P_k$$

Caso di dati non raggruppati (pesi = 1):

$$\bullet\ \sigma^2 = \frac{\sum_1^N{}_i (t_i - \langle t \rangle)^2}{N-1} = \frac{\sum_i \left(t_i^2 + \langle t \rangle^2 - 2\langle t \rangle t_i\right)}{N-1}$$

$$= \frac{\sum_i t_i^2 + N\langle t \rangle^2 - 2\langle t \rangle \sum_i t_i}{N-1} =$$

$$= \frac{\sum_i t_i^2 + N\left(\frac{\sum_i t_i}{N}\right)^2 - 2\frac{\sum_i t_i}{N}\sum_i t_i}{N-1} =$$

$$= \frac{\sum_i t_i^2 + \frac{1}{N}(\sum_i t_i)^2 - 2\frac{1}{N}(\sum_i t_i)^2}{N-1} =$$

$$= \frac{\sum_i (t_i^2) - \frac{1}{N}(\sum_i t_i)^2}{N-1} =$$

$$= \frac{1}{N-1}\left[N\langle t^2 \rangle - N(\langle t \rangle)^2\right] \underset{\text{se } N \gg 1}{\approx} \langle t^2 \rangle - (\langle t \rangle)^2$$

$$\boxed{\sigma = \sqrt{\frac{N}{N-1}\left(\langle t^2 \rangle - \langle t \rangle^2\right)}}$$

N	$N/(N-1)$	$\left[\frac{N}{N-1} - 1\right]$
2	2	1.
11	1,1	0.1
101	1,01	0.01
1001	1,001	0.001

Caso di dati raggruppati (pesi ≠ 1):

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-1}\left(\sum_{i=1}^{N}(t_i - \langle t\rangle)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{N-1}\left(\sum_{k=1}^{M}(t_k - \langle t\rangle)^2 P_k\right) \quad \text{con } N = \sum_{k=1}^{M} P_k$$

$$= \frac{1}{N-1}\left[\sum_{k=1}^{M}\left(t_k^2 + \langle t\rangle^2 - 2\langle t\rangle t_k\right)P_k\right] =$$

$$= \frac{1}{N-1}\left[\sum_{k=1}^{M} P_k t_k^2 + \langle t\rangle^2 N - 2\langle t\rangle \sum_{k=1}^{M} P_k t_k\right]$$

$$= \frac{1}{N-1}\left[\sum_{k=1}^{M} P_k t_k^2 - N\langle t\rangle^2\right] =$$

$$= \frac{1}{N-1}\left[\left(\sum_{k=1}^{M} P_k t_k^2\right) - \frac{1}{N}\left(\sum_{k=1}^{M} P_k t_k\right)^2\right]$$

con: $\langle t\rangle = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} t_i}{N} = \dfrac{\sum_{k=1}^{M} t_k P_k}{\sum_{k=1}^{M} P_k}$

$$\boxed{\sigma = \sqrt{\frac{N}{N-1}\left(\langle t^2\rangle - \langle t\rangle^2\right)}}$$

& M = numero dei canali (bin) dell'istogramma

Se la Distribuzuione Limite e'di GAUSS ...

Estimatore della deviazione standard (std-dev) per un campione con N misure:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \langle x \rangle)^2}{N-1}}$$

La std-dev (σ) permette di definire degli intervalli intorno al valore medio ($\langle x \rangle$) in cui trovare un numero "n" di eventi, utilizzando le
TABELLE della PROBABILITA' di GAUSS

				con N=23	n
$\langle\rangle \pm 1\sigma$	$\longrightarrow$	68.27%		$\longrightarrow$	15.7
$\langle\rangle \pm 2\sigma$	$\longrightarrow$	95,45%		$\longrightarrow$	22.0
$\langle\rangle \pm 3\sigma$	$\longrightarrow$	99,73%		$\longrightarrow$	22.9

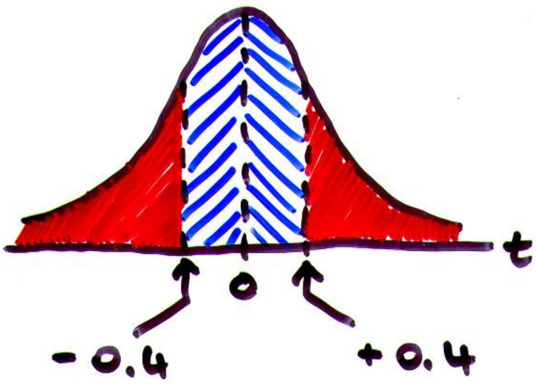
$$\pi_{exp} = 3.136 \pm 0.014 \longleftrightarrow (\pm 0{,}4\%)$$

compatibile con

$$\pi_{th} = 3.14159\ldots\ldots \quad ?$$

$$t = \frac{3.136 - 3.14159}{0.014} = -\frac{0.00559}{0.014} \simeq -0.40$$

$$t = \frac{3.14159 - 3.136}{0.014} = +\frac{0.00559}{0.014} \simeq +\ 0.40$$



$$P(|t| \geq 0.4) = P(t \geq 0.4) + P(t \leq -0.4) =$$

$$= 2 \cdot P(t \geq 0.4) =$$

$$= 2 \cdot \underbrace{(0.5 - 0.1554)}_{0.345} = \underline{0{,}69}$$

Effetto di una **sistematica** Δ su:

i) **valore intermedio** e su **incertezza massima**

$$\begin{cases} x_i \longrightarrow \xi_i = x_i + \Delta \\ x_{int} \pm \delta x \longrightarrow \xi_{int} \pm \delta\xi \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \xi_{int} &= x_{int} + \Delta \\ \delta\xi &= \delta x \end{aligned}}$$

$$\xi_{int} = \frac{\xi_{max} + \xi_{min}}{2} = \frac{(x_{max}+\Delta)+(x_{min}+\Delta)}{2} =$$

$$= \frac{x_{max} + x_{min}}{2} + \Delta = x_{int} + \Delta$$

$$\delta\xi = \frac{\xi_{max} - \xi_{min}}{2} = \frac{(x_{max}+\Delta)-(x_{min}+\Delta)}{2} =$$

$$= \frac{x_{max} - x_{min}}{2} = \delta x$$

ii) **valore medio** e su **deviazione standard**

$$\boxed{\begin{aligned} \langle \xi \rangle &= \langle x \rangle + \Delta \\ \sigma(\xi) &= \sigma(x) \end{aligned}}$$

$$\langle \xi \rangle = \frac{1}{N}\sum_{1i}^{N}\xi_i = \frac{1}{N}\sum_i (x_i + \Delta) =$$

$$= \frac{\sum_i x_i}{N} + \frac{N \cdot \Delta}{N} = \langle x \rangle + \Delta$$

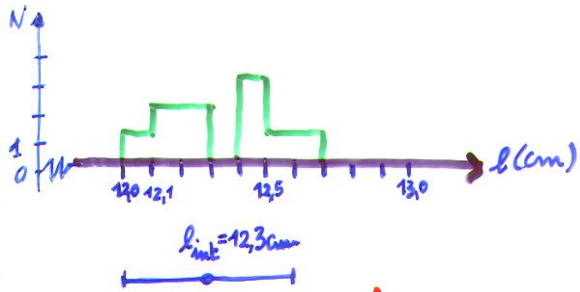
$$\sigma^2(\xi) = \frac{1}{N-1}\sum_{1i}^{N}(\xi_i - \langle \xi \rangle)^2 =$$

$$= \frac{1}{N-1}\sum_{1i}^{N}\Big((x_i+\Delta)-(\langle x \rangle + \Delta)\Big)^2 = \frac{1}{N-1}\sum(x_i - \langle x \rangle)^2 = \sigma^2(x)$$

HISTO

ISTOGRAMMI :

ℓ = 12,1 cm
12,4
12,5
12,1
12,0 ← ℓ_{min}
12,6 ← ℓ_{max}
12,2
12,4
12,4
12,2



BIN = 0.1 cm

- 12.3 ± 0.3 cm
  inc. max
- ⟨ℓ⟩ = 12.290 cm

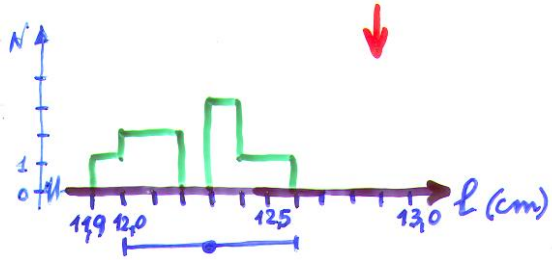
⟨(ℓ − ⟨ℓ⟩)⟩ = 0.02 cm

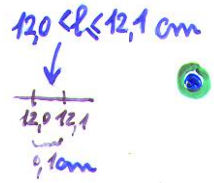
σ(ℓ) = 0.197 cm

σ(⟨ℓ⟩) = 0.062 cm

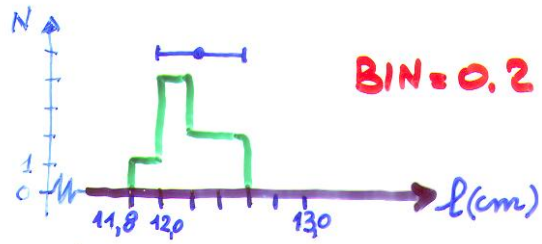
12.29 ± 0.06 cm
inc. statistica

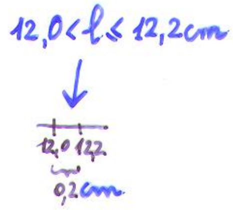
12,290 ± 0,062 cm



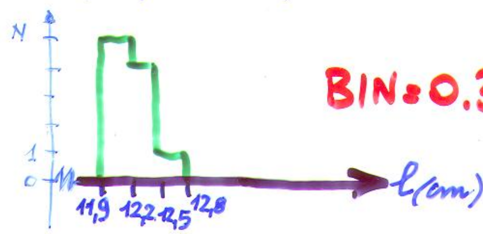


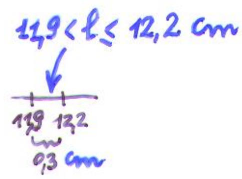
BIN = 0.2



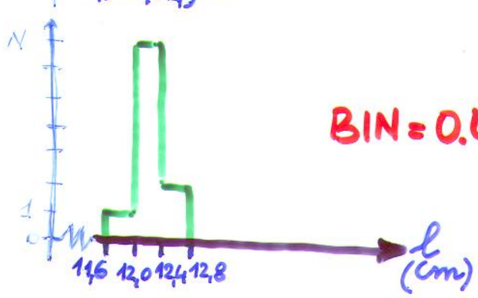


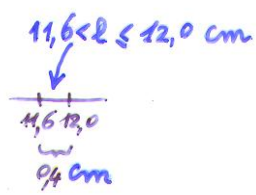
BIN = 0.3

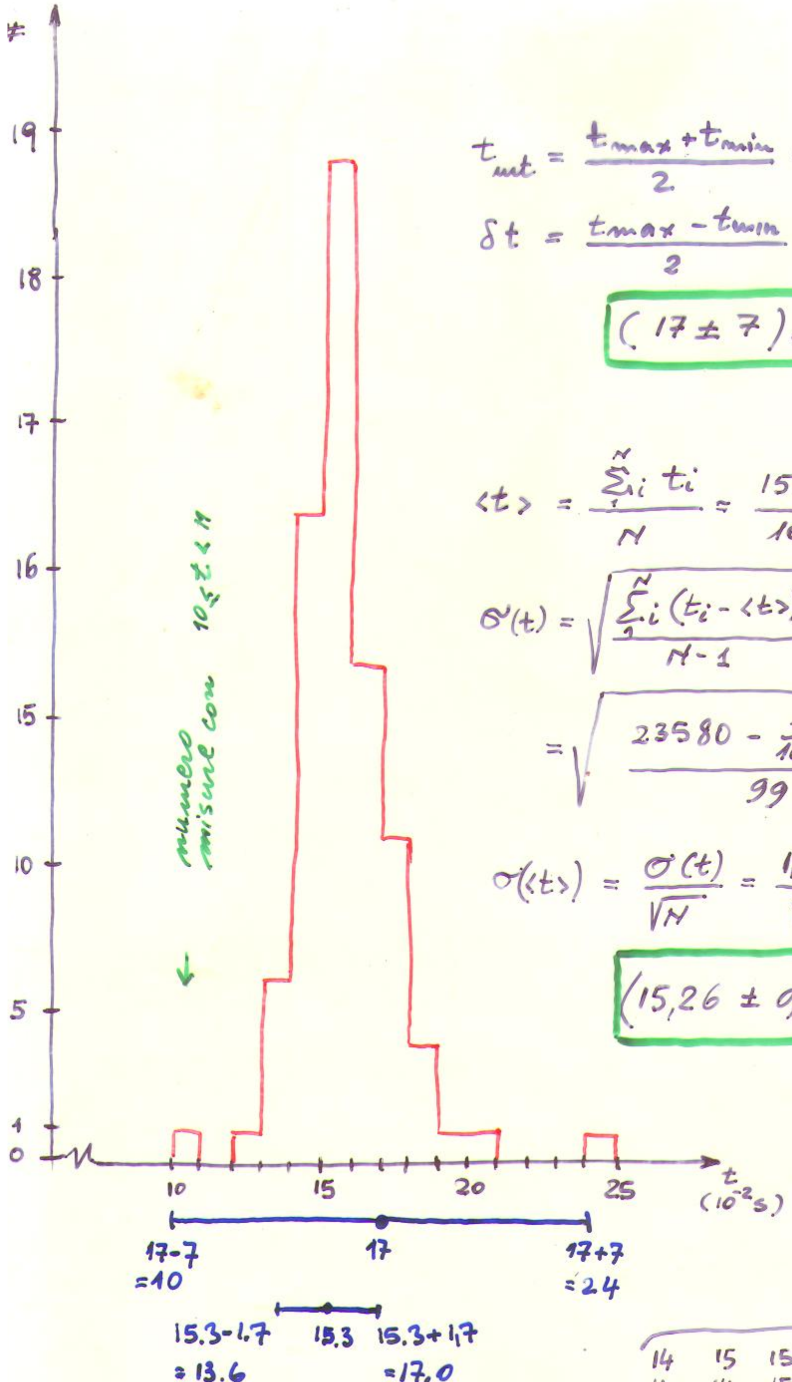




BIN = 0.4







$$t_{mt} = \frac{t_{max} + t_{min}}{2} = \frac{24 + 10}{2} \cdot 10^{-2} s = 17 \times 10^{-2} s$$

$$\delta t = \frac{t_{max} - t_{min}}{2} = \frac{24 - 10}{2} \cdot 10^{-2} s = 7 \times 10^{-2} s$$

$$\boxed{(17 \pm 7) \times 10^{-2} s}$$

$$\langle t \rangle = \frac{\sum_i^N t_i}{N} = \frac{1526}{100} \times 10^{-2} s = 15{,}26 \times 10^{-2} s$$

$$\sigma(t) = \sqrt{\frac{\sum_i^N (t_i - \langle t \rangle)^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{\sum_i^N (t_i^2) - \frac{1}{N}\left(\sum_i^N t_i\right)^2}{N-1}} =$$

$$= \sqrt{\frac{23580 - \frac{1}{100}(1526)^2}{99}} \times 10^{-2} s = 1{,}721 \times 10^{-2} s$$

$$\sigma(\langle t \rangle) = \frac{\sigma(t)}{\sqrt{N}} = \frac{1{,}721 \times 10^{-2} s}{\sqrt{100}} = 0{,}17 \times 10^{-2} s$$

$$\boxed{(15{,}26 \pm 0{,}17) \times 10^{-2} s}$$

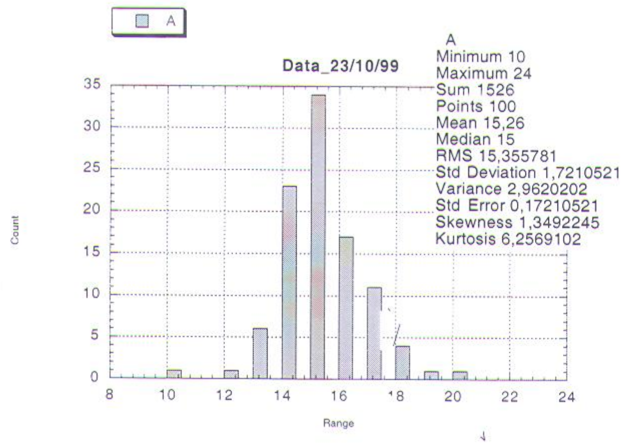
$$\boxed{\frac{\delta t}{\sigma(t)} = \frac{7 \cdot 10^{-2}}{1.7 \cdot 10^{-2}} \sim 4}$$

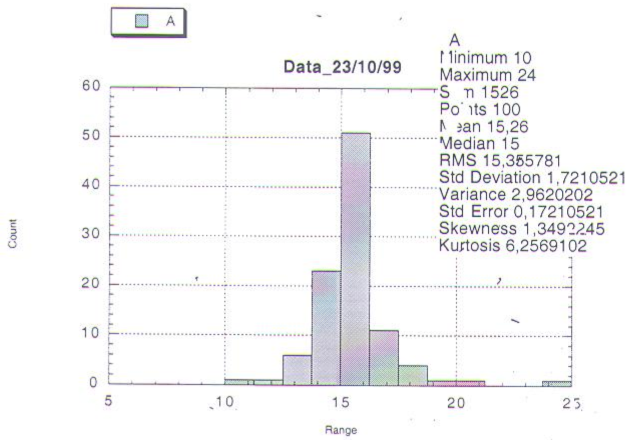
$$\boxed{\text{BIN: } 1 \times 10^{-2} s}$$

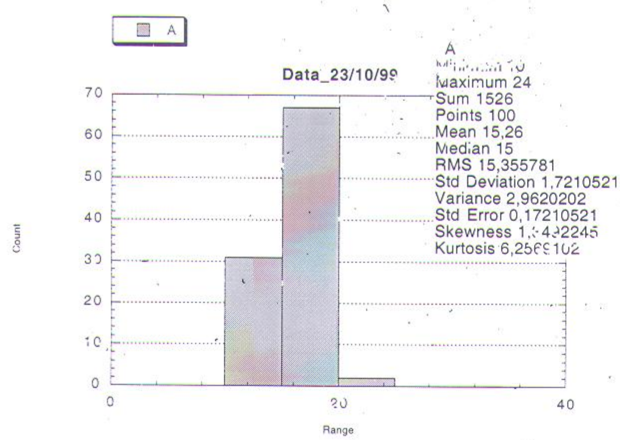
in 10^{-2} s

14	15	15	15	15	17	18	15	17	15
14	14	15	13	14	17	14	15	15	14
16	10	15	15	16	17	13	15	14	15
16	15	13	20	12	18	14	15	14	15
17	15	14	15	14	15	15	16	14	16
16	17	14	16	15	13	14	16	15	15
18	15	14	16	14	15	16	15	15	17
15	16	15	16	16	14	15	15	14	16
15	17	15	16	14	14	15	14	17	13
19	16	17	18	14	17	14	16	24	13

$0.17|21 \times 10^{-2} s$







Ticks Major	Ticks Minor	bin
8	5	0,4
4	5	1,0
2	5	4,0

$$\langle\rangle \pm \sigma_{\langle\rangle} = 15.3 \pm 1.7$$

PROPAGAZIONE ERRORE MASSIMO

Propagazione incertezze massime nelle misure indirette

G.F. x : $x_{int} \pm \delta x \rightarrow$ G.F. $q = q(x)$

$q_{int} \pm \delta q$

$\left(h(t) = \frac{1}{2} g t^2 \right)$

$$q(x_{int} + \Delta_x) \simeq q(x_{int}) + \left(\frac{dq}{dx}\right)_{x_{int}} \Delta x$$

$$q_{max} \simeq q(x_{int}) + \left|\frac{dq}{dx}\right| \delta_x \qquad \Delta_x = +\delta_x$$

$$q_{min} \simeq q(x_{int}) - \left|\frac{dq}{dx}\right| \delta_x \qquad \Delta_x = -\delta_x$$

..... δx deve essere piccolo!

$$\boxed{\begin{aligned} q_{int} &= \frac{q_{max} + q_{min}}{2} \simeq q(x_{int}) \\ \delta q &= \frac{q_{max} - q_{min}}{2} \simeq \left|\frac{dq}{dx}\right|_{x_{int}} \delta x \end{aligned}}$$

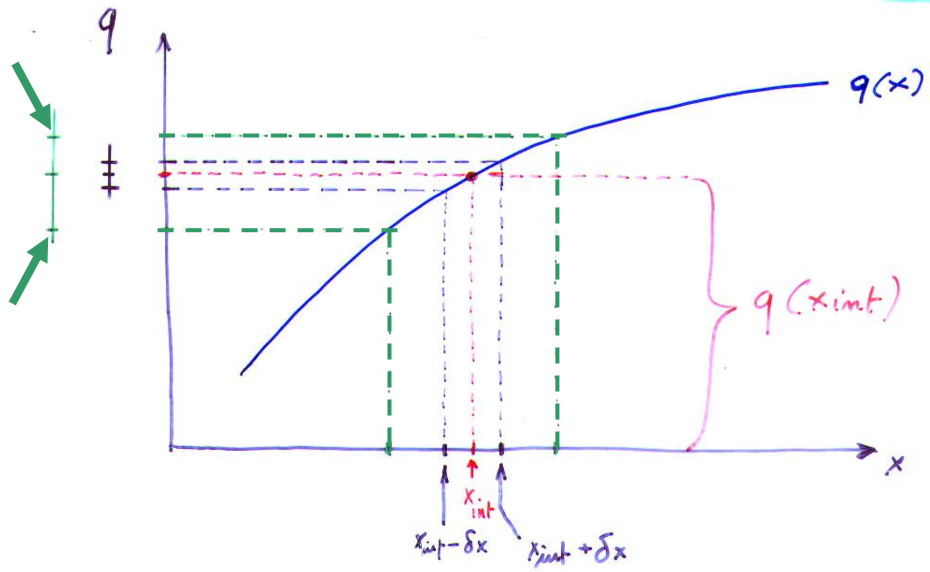
$h(t) = (1/2)\, g t^2 \Rightarrow \Delta h = g\, t\, \Delta t \Rightarrow (\Delta h/h) = 2\, \Delta t/t$

(Pur essendo δt costante, δh aumenta con t)
...., oltre che con δt.—

Osservazione sulla propagazione dell'incertezza massima nelle misure indirette

G.F. x: $x_{int.} \pm \delta x \longrightarrow$ G.F. $q(x)$

$$q_{int} \pm \delta q$$



Solo se δx piccolo:

1. approssimazione lineare ok per $q(x)$ nell'intervallo
$$x_{int} - \delta x < x < x_{int} + \delta x$$

2. incertezza su $q(x_{int})$ simmetrica

$$\underbrace{q(x_{int} + \delta x) - q(x_{int})}_{\delta q_+} = \underbrace{q(x_{int}) - q(x_{int} - \delta x)}_{\delta q_-}$$

$$\boxed{q = q(x) = B \cdot x}$$

$\boxed{q}$ ↔ grandezza misurata direttamente

$\boxed{x}$ ↔ grandezza misurata indirettamente

$\boxed{B}$ ↔ numero esatto , non è oggetto di misura!

1) Processo di misura della grandezza q :

$$q_{best} \pm \Delta q$$

2) Da un modello ricavo la legge che descrive :

$$q = q(x) = B x$$

3) Ricavo dalla misura di q e dal modello una stima per x e per la sua incertezza :

$$\boxed{x_{best} \pm \Delta x}$$

Prodotto di una grandezza misurata per un numero esatto

- $\left.\begin{array}{l} x \pm \delta x \\ B \pm \underbrace{\cancel{\delta B}}_{=0} \end{array}\right\}$ $q = B \cdot x$ $\boxed{\delta q = B \cdot \delta x}$ $\boxed{\dfrac{\delta q}{q} = \dfrac{\delta x}{x}}$

- $$\frac{\delta q}{q} = \cancel{\frac{\delta B}{B}} + \frac{\delta x}{x} = \frac{\delta x}{x}$$

$$\hookrightarrow \delta q = q \cdot \frac{\delta x}{x} = B \cdot x \cdot \frac{\delta x}{x} = B \cdot \delta x$$

l'incertezza nella G.F. derivata q è B volte quella in x mentre quella percentuale è la stessa

- misuro spessore T di un pacco di N fogli ($N=100$) per avere quello di un foglio solo h

$T = (3.3 \pm 0.1)$ cm (3%) $T = N \cdot h$

$$\hookrightarrow h = \frac{T}{N} = \frac{3.3}{100} = 0.033 \text{ cm}$$

$$\delta h = \frac{\delta T}{N} = \frac{0.1}{100} = 0.001 \text{ cm}$$

$$\longrightarrow h = (0.033 \pm 0.001) \text{ cm} \quad (3\%)$$

Altrimenti avrei dovuto usare uno strumento con $\delta h = 10\ \mu m$!!
OK .... se tutti i fogli hanno lo stesso spessore.

- voglio misurare il periodo T di un "fenomeno periodico"

pendolo
molla
⋮

↳ misuro la durata τ di N oscillazioni

$(\tau \pm \delta\tau)$

$$\Rightarrow \quad N\,T = \tau$$

↳ $T = \frac{\tau}{N}$; $\delta T = \frac{\delta\tau}{N}$

$$\left(\frac{\tau}{N} \pm \frac{\delta\tau}{N}\right)$$

Propagazione incertezze massime nelle misure indirette

G.F. x : $x_{int} \pm \delta x$
G.F. y : $y_{int} \pm \delta y$ $\Big\}$ G.F. $q = q(x, y)$: $q_{int} \pm \delta q$

$(V = R \cdot I)$

$$q(x_{int} + \Delta_x ; y_{int} + \Delta y) \approx q(x_{int} ; y_{int}) + \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)_{\substack{x_{int} \\ y_{int}}} \Delta_x + \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)_{\substack{x_{int} \\ y_{int}}} \Delta y$$

ma! $\Delta x = \pm \delta x$
$\Delta y = \pm \delta y$

$$\hookrightarrow q_{max} \approx q(x_{int} ; y_{int}) + \left|\frac{\partial q}{\partial x}\right| \delta x + \left|\frac{\partial q}{\partial y}\right| \delta y$$

$$q_{min} \approx q(x_{int} ; y_{int}) - \left|\frac{\partial q}{\partial x}\right| \delta x - \left|\frac{\partial q}{\partial y}\right| \delta y$$

..... δx, δy devono essere piccoli!!

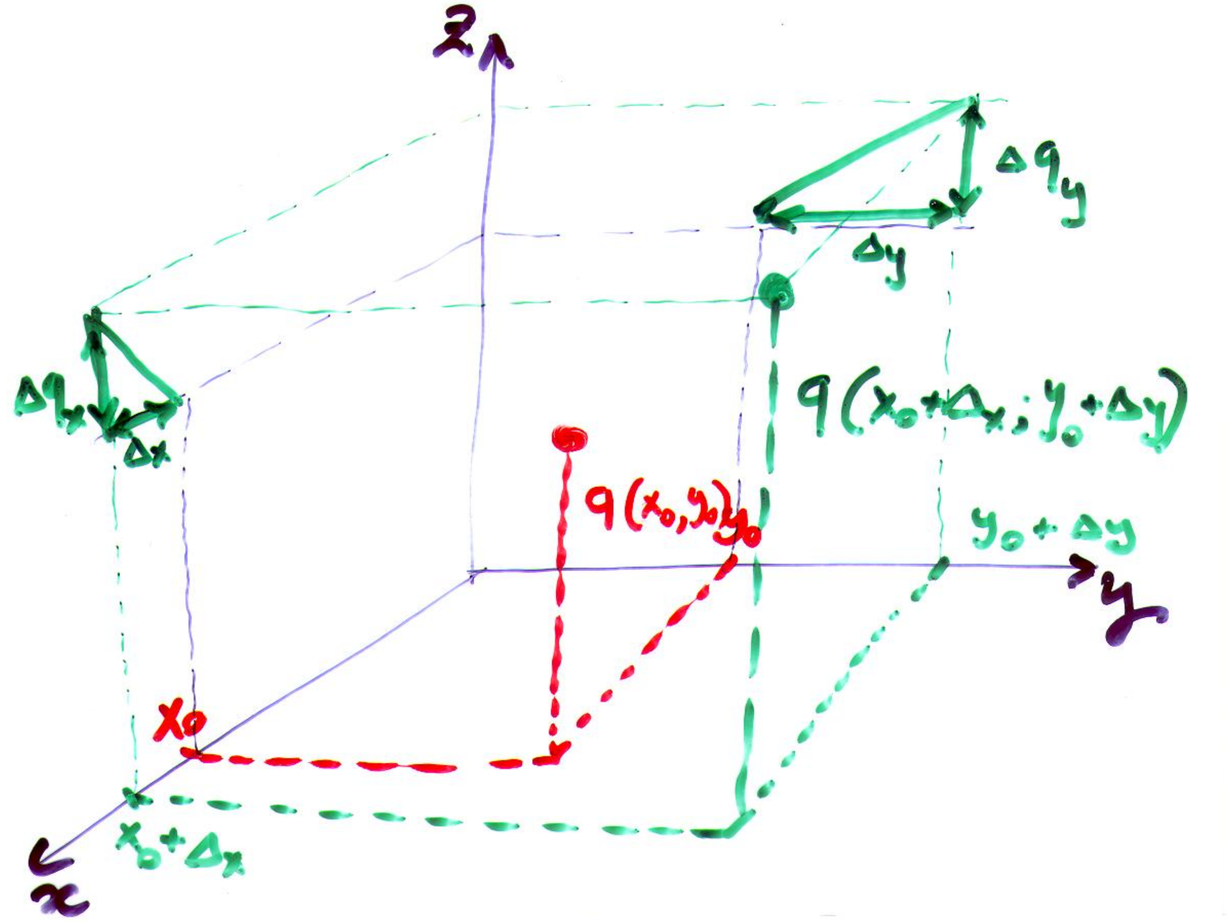
$$\hookrightarrow \boxed{\begin{aligned} q_{int} &= \frac{q_{max} + q_{min}}{2} = q(x_{int} ; y_{int}) \\ \delta q &= \frac{q_{max} - q_{min}}{2} = \left|\frac{\partial q}{\partial x}\right| \delta x + \left|\frac{\partial q}{\partial y}\right| \delta y \end{aligned}}$$

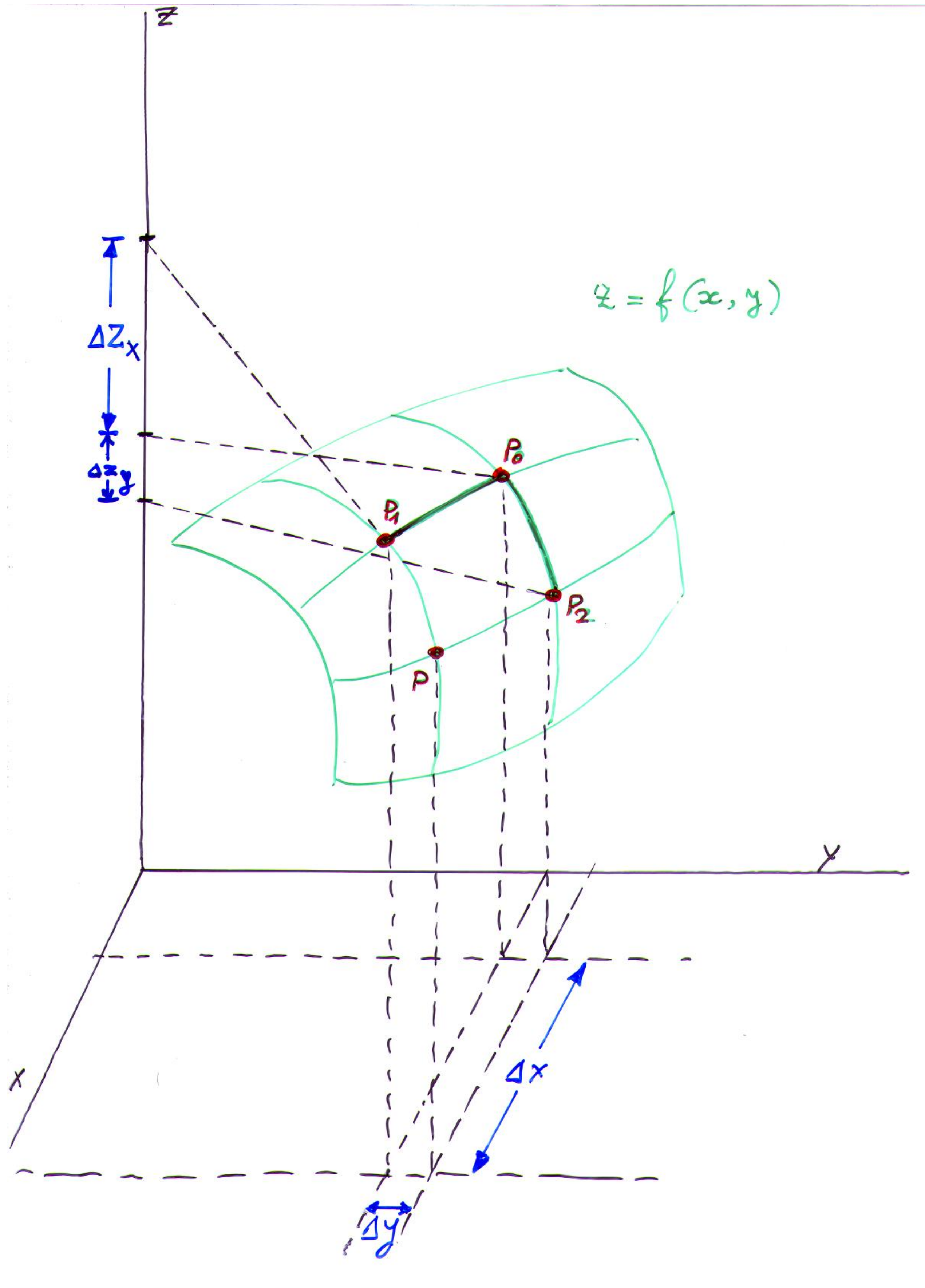
$(\delta V = I \cdot \delta R + R\, \delta I)$

$$q(x,y)$$

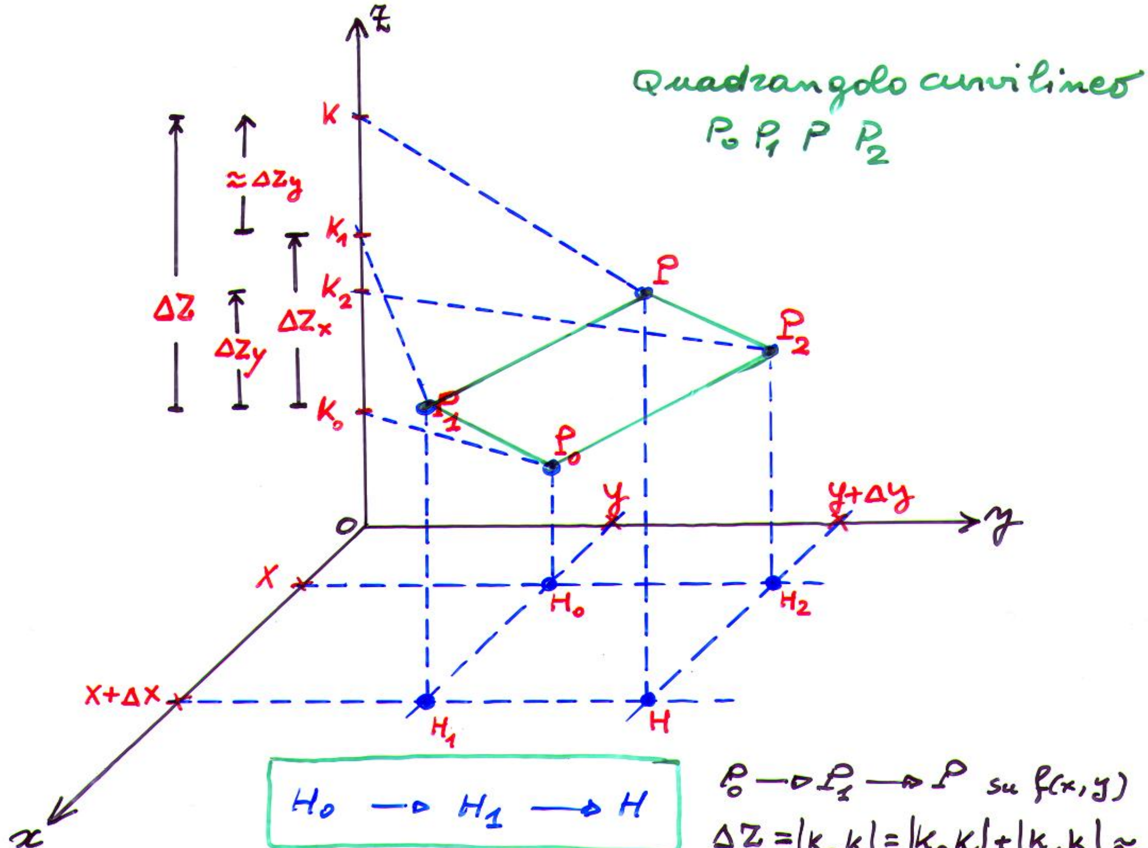
$$\Delta q_{tot} \approx \Delta q_x + \Delta q_y$$

$$\approx \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \Delta x + \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \Delta y$$




z
ΔZ_x
Δz_y
$z = f(x, y)$
P_0
P_1
P_2
P
y
x
Δx
Δy

$\Delta Z = \dfrac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial f}{\partial y}\Delta y$; $Z = f(x, y)$;



$P_0 \to P_1 \to P$ su $f(x,y)$

$\Delta Z = |K_0K| = |K_0K_1| + |K_1K| \approx$

$\approx \Delta Z_x + \Delta Z_y$

$\boxed{H_0 \to H_1}$

$x \to x + \Delta x$ @ y fissata

$P_0 \to P_1 \iff f(x,y) \to f(x+\Delta x, y)$

$f(x+\Delta x, y) = f(x,y) + \dfrac{\partial f}{\partial x}\Delta x$

$\Delta Z_x = |K_0K_1| = \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x$

$\boxed{H_0 \to H_2}$

$y \to y + \Delta y$ @ x fissata

$P_0 \to P_2 \iff f(x,y) \to f(x, y+\Delta y)$

$f(x, y+\Delta y) = f(x,y) + \dfrac{\partial f}{\partial y}\Delta y$

$\Delta Z_y = |K_0K_2| = \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y$

A.9.3 Le derivate parziali

Fintanto che si opera con un'unica variabile la rapidità di variazione di una funzione è un concetto ben chiaro perché c'è un unico asse lungo cui ci si può spostare, ed il grafico è una linea la cui pendenza rispetto all'asse x è univoca. Ciò non è invece vero per una funzione di più variabili, p.es. $z = f(x,y)$, il cui grafico è una superficie nello spazio 3D, oppure $f = f(x,y,z)$, il cui grafico è una ipersuperficie: su queste superfici la pendenza dipende dalla direzione in cui ci si muove, e questa si può scegliere a volontà.

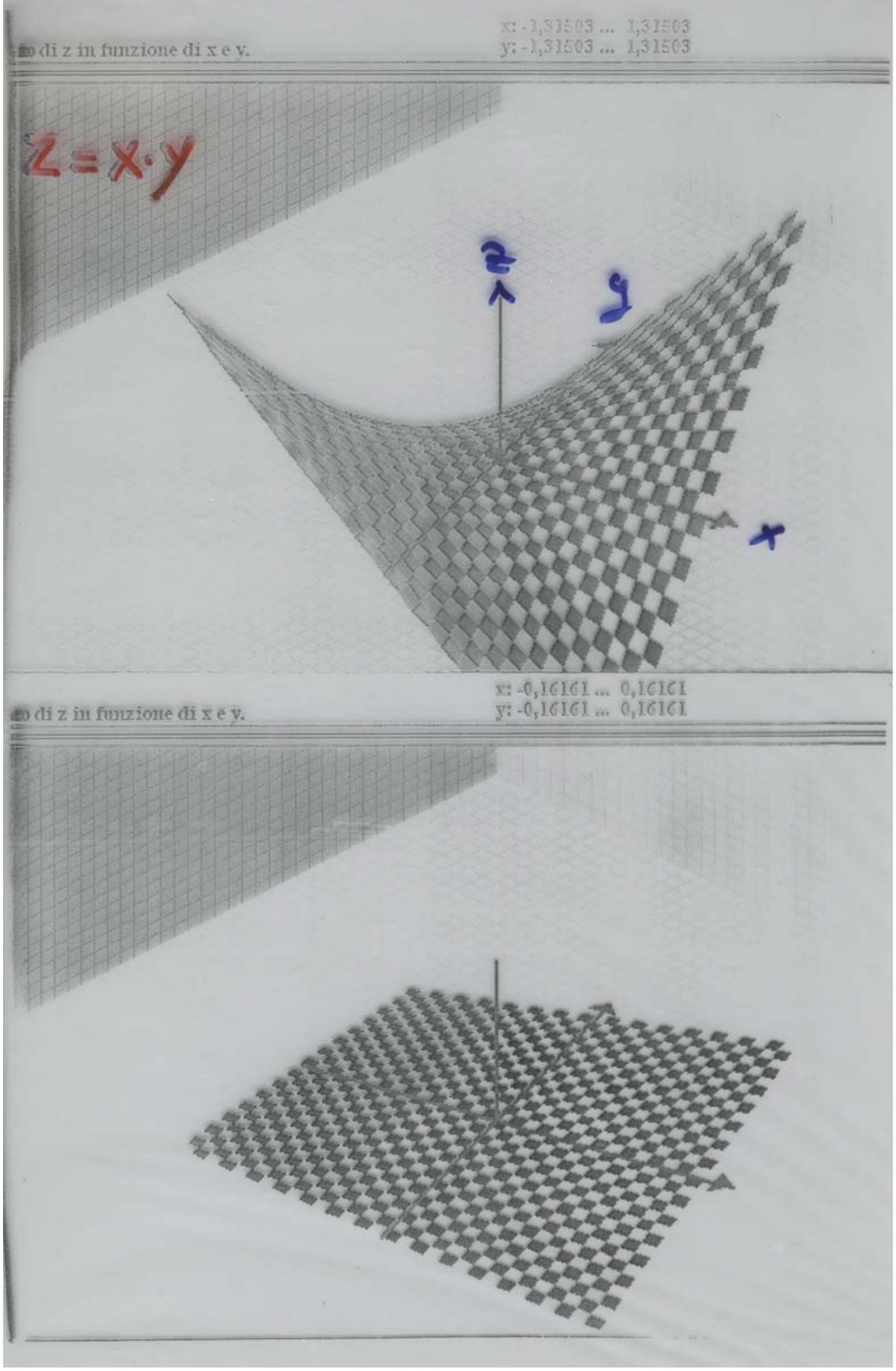
Se ci si muove lungo uno degli assi coordinati (p.es. x) la rapidità di variazione della funzione in quella direzione è chiamata la *derivata parziale* rispetto a tale variabile (p.es. rispetto a x). La derivata parziale è riconoscibile per il simbolo "d-storto", ∂.

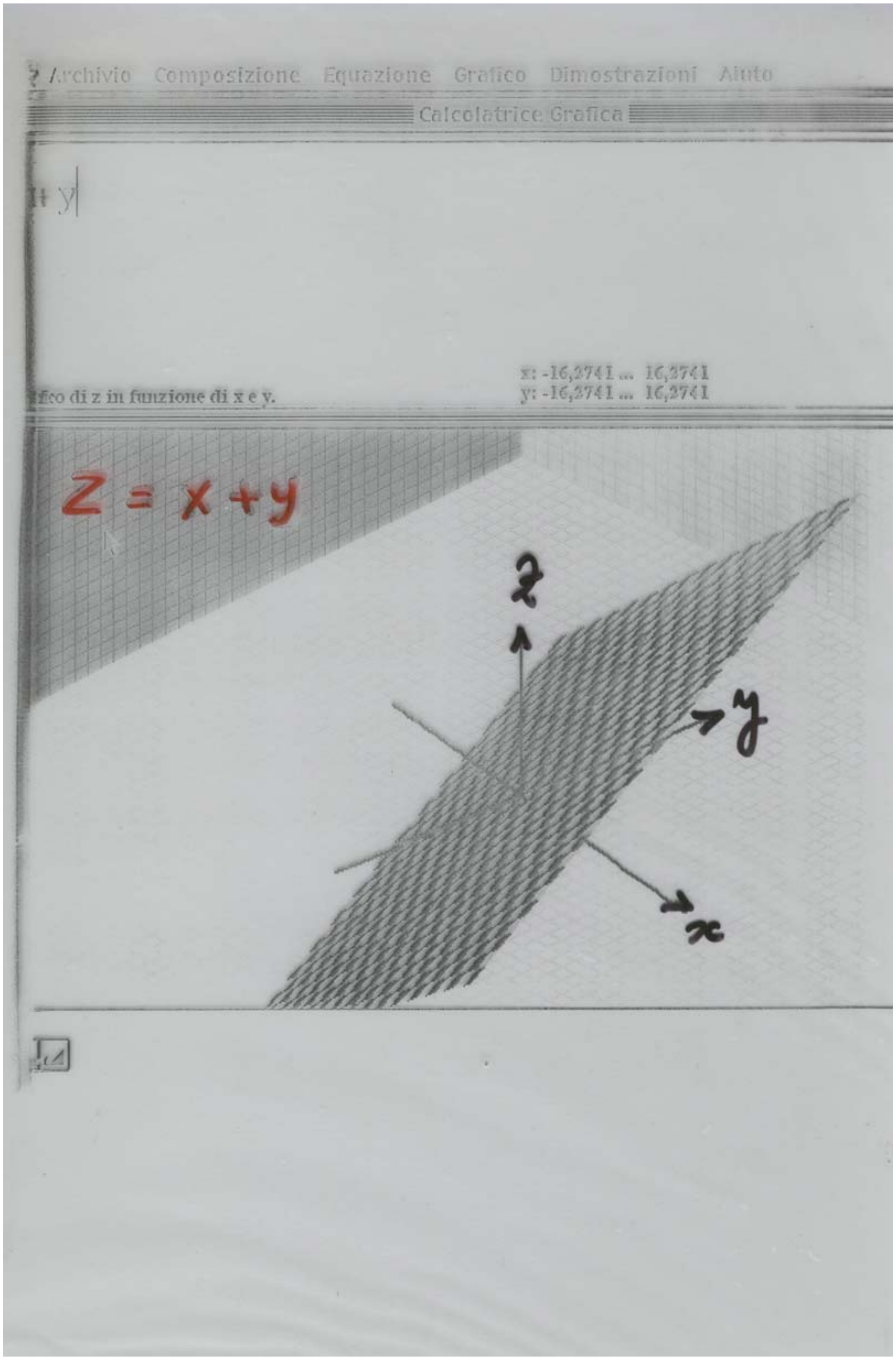
Muoversi lungo uno degli assi significa tener ferme tutte le altre variabili, congelarle, cioè considerare la $f(x,y,z)$ come se fosse funzione dell'unica variabile rispetto alla quale si sta derivando;

la derivata parziale si esegue come una normale derivata in una variabile, ignorando le altre, come se fossero delle costanti: p.es.

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x,y,z+\Delta z) - f(x,y,z)}{\Delta z} = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y}$$

L'ultima scrittura con gli indici viene spesso usata (p.es. in termodinamica, al §10.7.1) per ricordare esplicitamente quali siano le altre variabili, quelle tenute ferme.


x: -1,31503 ... 1,31503
y: -1,31503 ... 1,31503
di z in funzione di x e y.
Z = X·Y
z
y
x
x: -0,16161 ... 0,16161
y: -0,16161 ... 0,16161
di z in funzione di x e y.


Archivio Composizione Equazione Grafico Dimostrazioni Aiuto
Calcolatrice Grafica
x: -16,2741 ... 16,2741
y: -16,2741 ... 16,2741
Z = X + y
z
y
x

$$\boxed{\pi = \frac{C}{D}}$$

$$\Delta\pi = \left|\frac{\partial\pi}{\partial C}\right|\Delta C + \left|\frac{\partial\pi}{\partial D}\right|\Delta D =$$

$$= \frac{1}{D}\Delta C + \frac{C}{D^2}\Delta D$$

1€ : $C = (71.5 \pm 0.5)$ mm

$D = (23.5 \pm 0.5)$ mm

$$\pi_{best} = \frac{C_{best}}{D_{best}} = 3.042|55\ldots$$

$$\Delta\pi = \frac{0{,}5}{23.5} + \frac{71.5 \times 0{,}5}{(23.5)^2} = 0.086|012\ldots$$

$$\boxed{(3.043 \pm 0{,}086)}$$

Propagazione incertezza relativa max

- $\underline{q(x,y) = A \cdot x^{\alpha} \cdot y^{\beta}}$ & $\begin{matrix} x \pm \delta x \\ y \pm \delta y \end{matrix}$

- $$\delta q = \left|\frac{\partial q}{\partial x}\right| \delta x + \left|\frac{\partial q}{\partial y}\right| \delta y =$$
$$= \left|A \cdot \alpha \cdot x^{\alpha-1} \cdot y^{\beta}\right| \delta x + \left|A \cdot x^{\alpha} \cdot \beta \cdot y^{\beta-1}\right| \delta y$$

- $$\frac{\delta q}{q} = \left|\frac{\cancel{A}\, \alpha\, x^{\alpha-1} \cancel{y^{\beta}}\, \delta x}{\cancel{A}\, x^{\alpha}\, \cancel{y^{\beta}}}\right| + \left|\frac{\cancel{A}\, \cancel{x^{\alpha}}\, \beta\, y^{\beta-1}\, \delta y}{\cancel{A}\, \cancel{x^{\alpha}}\, y^{\beta}}\right| =$$
$$= \left|\alpha \cdot \frac{\delta x}{x}\right| + \left|\beta \cdot \frac{\delta y}{y}\right|$$

- $$\ln q = \ln\left(A x^{\alpha} y^{\beta}\right) = \ln A + \alpha \ln x + \beta \ln y$$
$$\frac{\delta q}{q} = \left|\alpha \frac{\delta x}{x}\right| + \left|\beta \frac{\delta y}{y}\right|$$

Incertezza relativa in una $q(x)$:

$$h(t) = \frac{1}{2} g t^{2}$$

$$\Delta h = g t \Delta t$$

$$\frac{\Delta h}{h} = 2 \cdot \frac{\Delta t}{t}$$

$$V = \ell^{3}$$

$$\Delta V = 3 \ell^{2} \Delta \ell$$

$$\frac{\Delta V}{V} = 3 \frac{\Delta \ell}{\ell}$$

$$\boxed{q(x,y)}$$

- $$\Delta q = \left|\frac{\partial q}{\partial x}\right|\Delta x + \left|\frac{\partial q}{\partial y}\right|\Delta y$$ Propagazione L

- $$\sigma_q^2 = \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2\sigma_x^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)^2\sigma_y^2 + 2\,\frac{\partial q}{\partial x}\,\frac{\partial q}{\partial y}\,\sigma_{xy}$$ Q

$$|\sigma_{xy}| \leq \sigma_x \sigma_y$$

$$\sigma_q^2 \leq \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2\sigma_x^2 + \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)^2\sigma_y^2 + 2\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)\sigma_x\sigma_y =$$

$$= \left[\left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)\sigma_x + \left(\frac{\partial q}{\partial y}\right)\sigma_y\right]^2$$

$$\sigma_q < \frac{\partial q}{\partial x}\sigma_x + \frac{\partial q}{\partial y}\sigma_y$$ "σ_q-Q" < "σ_q-L"

$$\sigma_x^2 = \frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{N-1} \;;\quad \sigma_y^2 = \frac{\Sigma(y-\bar{y})^2}{N-1} \;;$$

$$\sigma_{xy}^2 = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{N-1} \;;$$

$$\boxed{q(x,y) = A\cdot x^{\alpha}\cdot y^{\beta}}$$

$$\left(\frac{\Delta q}{q}\right) = \left|\alpha\,\frac{\Delta x}{x}\right| + \left|\beta\,\frac{\Delta y}{y}\right|$$ "L"

$$\left(\frac{\sigma_q}{q}\right)^2 = \alpha^2\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \beta^2\left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2 + 2\alpha\beta\frac{\sigma_{xy}}{x\cdot y}$$ "Q"

MISURA SPESSORE ELENCO PAGINE GIALLE

MISURA "PAGINE GIALLE CASA 2000/2001 ROMA A-L" : $\begin{cases} T = Nt \\ \delta T = N \cdot \delta t \end{cases}$

- Utilizzo un righello con sensibilità 1mm

40mm < T < 41mm : 1392 pagine

$\boxed{(40.5 \pm 0.5)\,\text{mm} \quad : \quad 696 \text{ fogli}}$

- $\delta t = \dfrac{0.5\,\text{mm}}{696} = 0.00071839\ldots\,\text{mm}$

$t = \dfrac{40.5\,\text{mm}}{696} = 0.05818965\ldots\,\text{mm}$

$$\boxed{\begin{gathered}(0.05819 \pm 0.00072)\,\text{mm} \\ (58.19 \pm 0.72)\,\mu\text{m}\end{gathered}} \qquad \pm 1.2\,\%$$

$57.47 < t < 58.91\,\mu\text{m}$

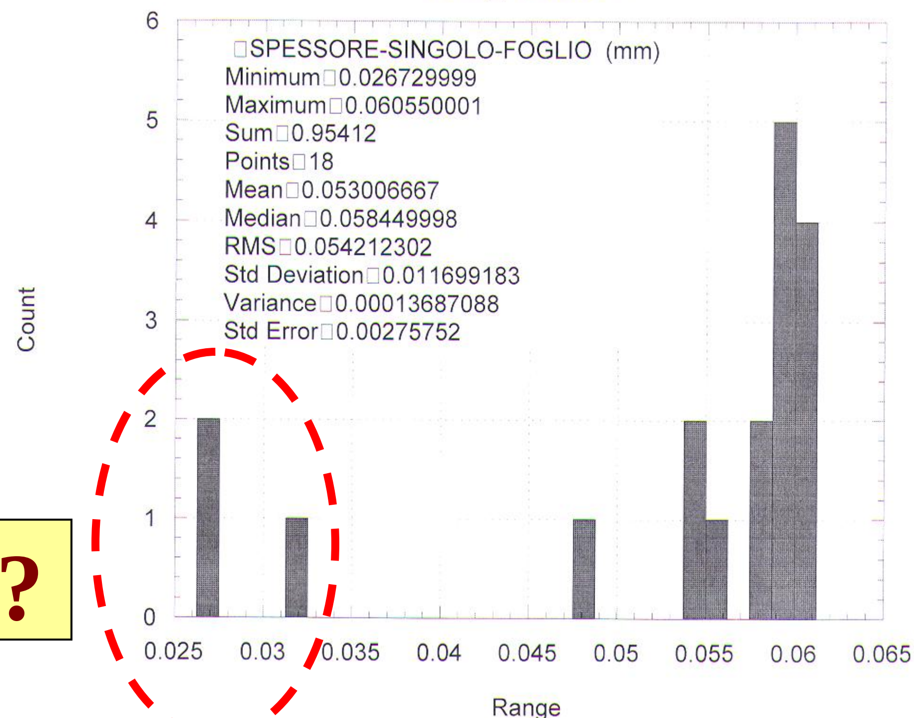
Page #1 - "Data_13ott2001 17.31.24 13/10/01" Sunday , October 14 6:28 PM 2001

	SPESSORE-TOTALE (mm)	NUMERO-FOGLI	SPESSORE-SINGOLO-FOGLIO (mm)
0	40.000	836.00	0.047850
1	41.500	696.00	0.059630
2	41.500	696.00	0.059630
3	41.500	696.00	0.059630
4	35.500	1328.0	0.026730
5	15.500	256.00	0.060500
6	15.500	256.00	0.060500
7	15.500	256.00	0.060550
8	15.500	256.00	0.060500
9	45.000	1392.0	0.032300
10	50.000	860.00	0.058140
11	37.500	1392.0	0.026900
12	20.000	364.00	0.055000
13	43.000	708.00	0.060000
14	39.000	696.00	0.056000
15	37.000	696.00	0.054000
16	40.000	696.00	0.057500
17	40.900	696.00	0.058760

SPESSORE-SINGOLO-FOGLIO (mm)

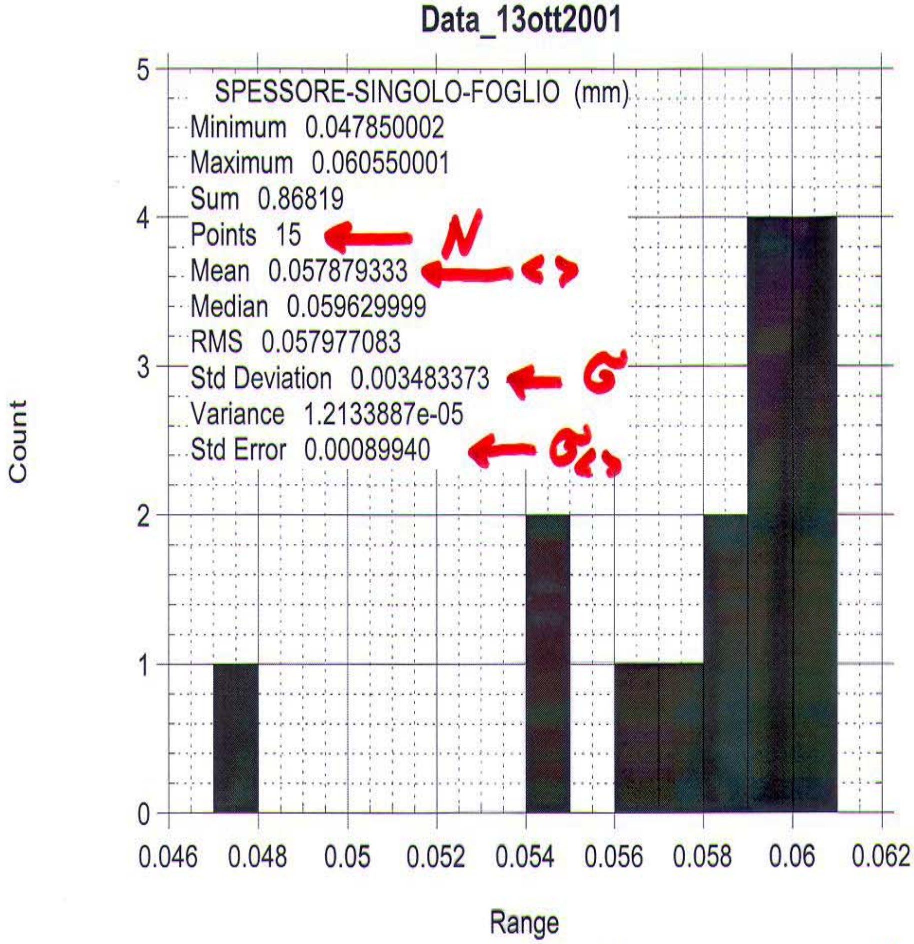
N = 18

Data_13ott2001



?

N = 18 – 3 = 15



scartate 3 misure ...."sbagliate"

$N = 15$

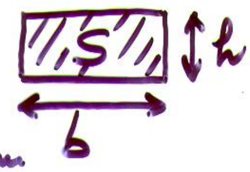
$\sigma = 0.0035$ mm

$\sigma_{\langle\rangle} = \sigma/\sqrt{N} = 0.00090$ mm

$\langle\rangle = 0.05788$ mm $\quad (57.88 \pm 0.90)\,\mu m$

MISURA AREA RETTANGOLO

area di un rettangolo



- $b_{int} \pm \delta b \quad \leftarrow \quad b = (98.0 \pm 0.5)\,\text{cm}$

  $h_{int} \pm \delta h \quad \leftarrow \quad h = (45.5 \pm 0.5)\,\text{cm}$

- $\boxed{S = S(b,h) = b \cdot h}$

- $$\delta S = \left|\frac{\partial S}{\partial b}\right|_{int} \delta b + \left|\frac{\partial S}{\partial h}\right|_{int} \delta h = h_{int}\,\delta b + b_{int}\,\delta h$$

  $$= 45.5 \times 0{,}5 + 98.0 \times 0{,}5 = \underbrace{71.75}_{\to 70,\ \to 72}\,\text{cm}^2$$

- $$S_{int} = b_{int} \times h_{int} = 98.0 \times 45.5\ \text{cm}^2$$

  $$= \underbrace{4459}_{\to 4460,\ \to 4459}\,\text{cm}^2$$

  $\to S = (4460 \pm 70)\,\text{cm}^2 \quad \to 1{,}6\%$

- $$\frac{\delta S}{S_{int}} = \frac{\delta b}{b_{int}} + \frac{\delta h}{h_{int}} = \underbrace{\frac{0{,}5}{98.0}}_{0{,}5\%} + \underbrace{\frac{0.5}{45.5}}_{1{,}1\%} = 1{,}6\%$$

$$\boxed{S = b \cdot h}$$

$$S_{max} = b_{max} \cdot h_{max} = (b_{int} + \delta b) \cdot (h_{int} + \delta h) =$$

$$= b_{int} \cdot h_{int} + b_{int} \cdot \delta h + h_{int} \cdot \delta b + \delta b \cdot \delta h \cong$$

$$\cong b_{int} \cdot h_{int} + b_{int} \cdot \delta h + h_{int} \cdot \delta b$$

$$S_{min} = b_{min} \cdot h_{min} = (b_{int} - \delta b) \cdot (h_{int} - \delta h) =$$

$$= b_{int} h_{int} - b_{int} \delta h - h_{int} \delta b + \delta b \cdot \delta h \cong$$

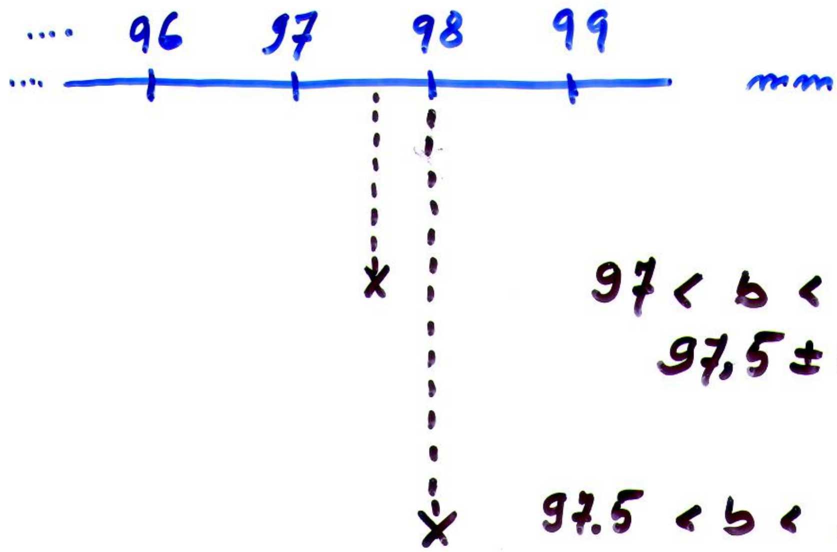
$$\cong b_{int} h_{int} - b_{int} \delta h - h_{int} \delta b$$

$$\delta S = \frac{S_{max} - S_{min}}{2} = b_{int} \cdot \delta h + h_{int} \cdot \delta b$$

$$S_{int} = \frac{S_{max} + S_{min}}{2} = b_{int} \cdot h_{int}$$

$$\boxed{S_{int} \pm \delta S = b_{int} \cdot h_{int} \pm (b_{int} \cdot \delta h + h_{int} \cdot \delta b)}$$

$$\boxed{\frac{\delta S}{S} = \frac{b \cdot \delta h + h \cdot \delta b}{b \cdot h} = \frac{\delta h}{h} + \frac{\delta b}{b}}$$

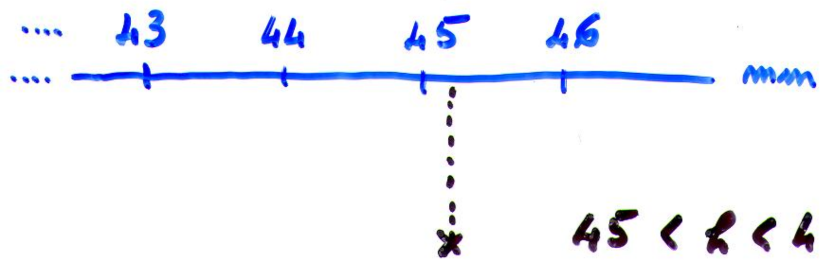


$97 < b < 98$ mm

$97{,}5 \pm 0{,}5$ mm

$97.5 < b < 98.5$ mm

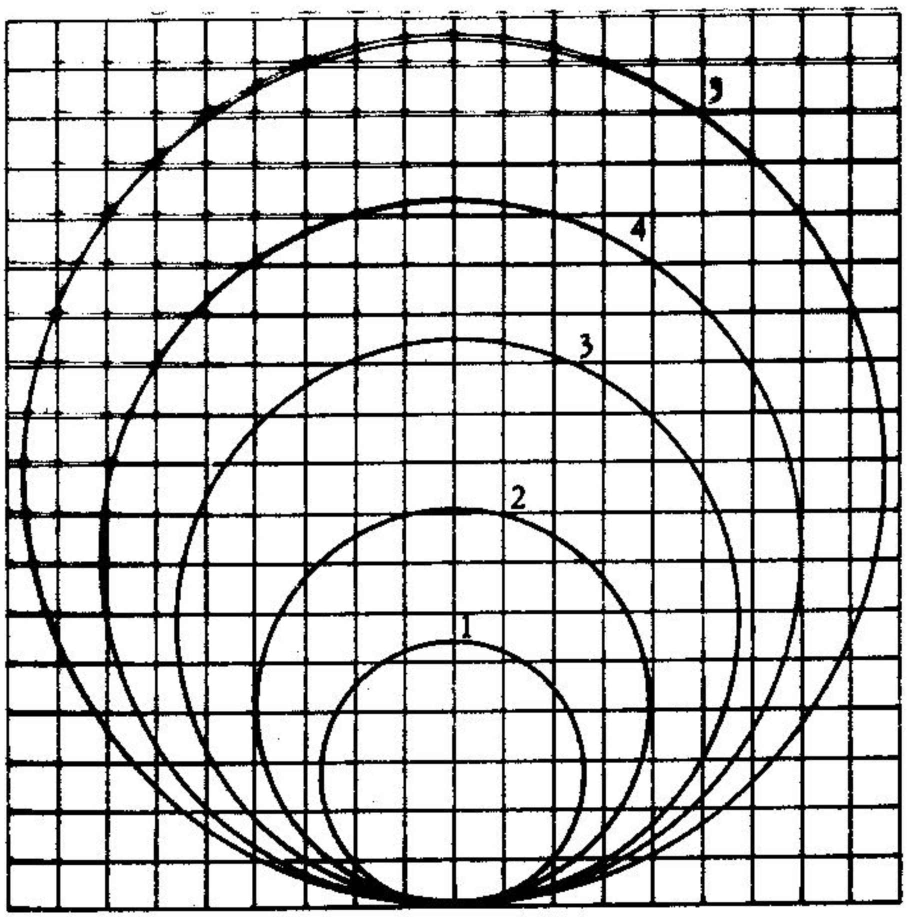
98.0 ± 0.5 mm



$45 < \ell < 46$ mm

45.5 ± 0.5 mm

MISURA AREA CERCHI



5
4
3
2
1

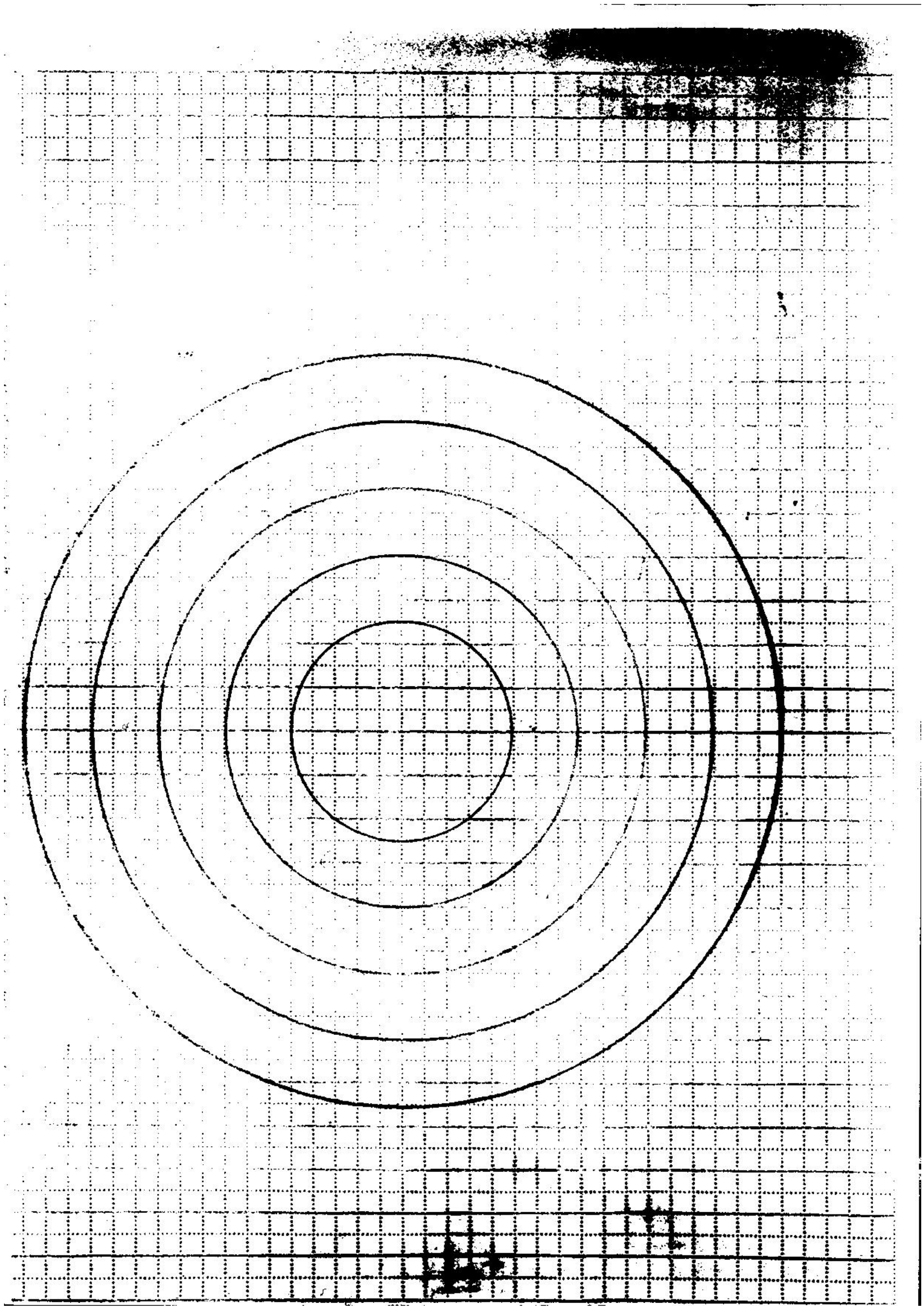
Determinare per ogni cerchio il valore piu' attendibile per l'area e ricavare l'incertezza massima sull'area in base alla differenza tra area minima ed area massima.

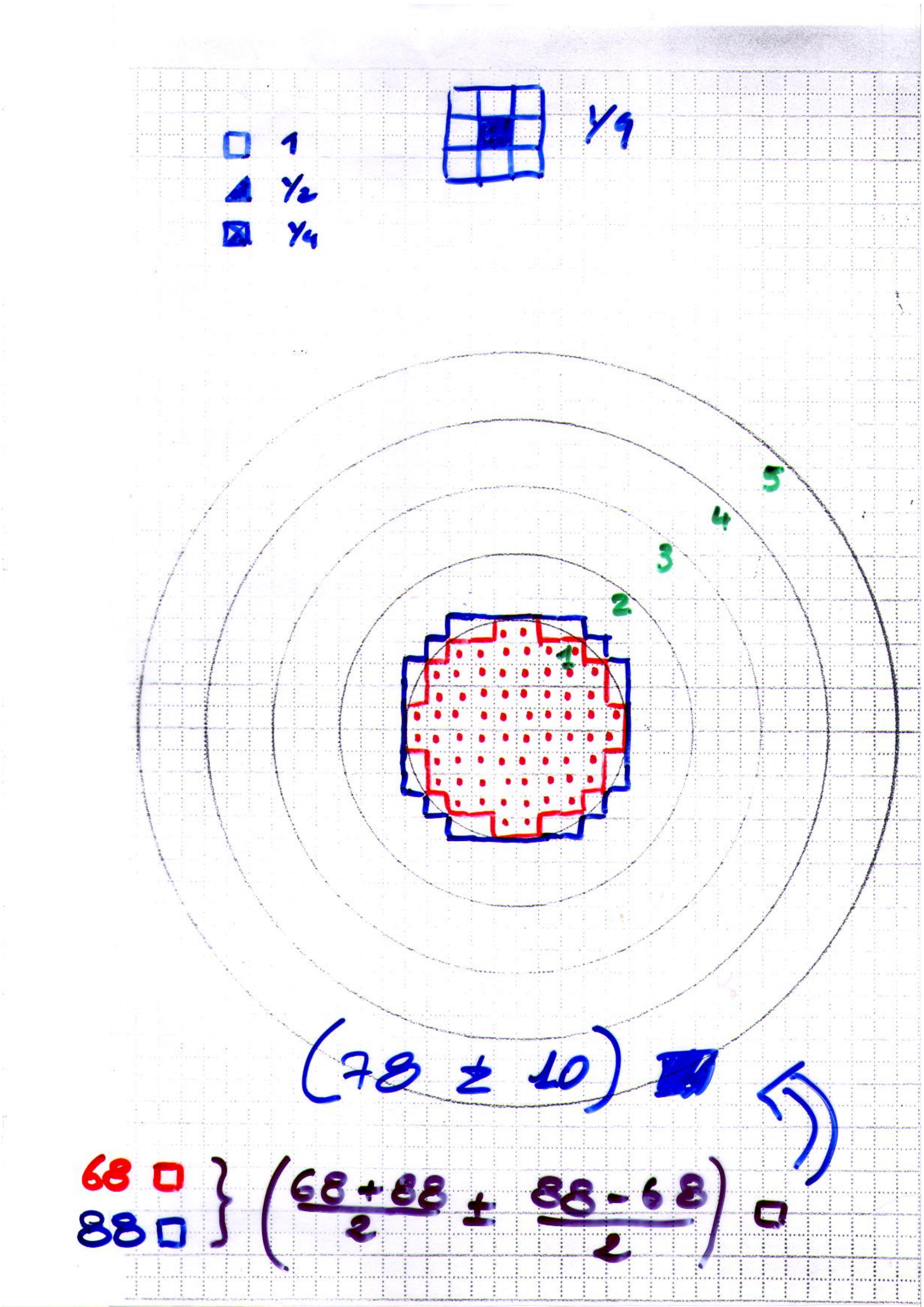
Rappresentare su di un grafico l'andamento delle aree in funzione del raggio.

Utilizzare il metodo dei minimi quadrati per determinare il valore di π e la sua incertezza. Applicando il metodo dei minimi quadrati, si determinino sia i coefficienti della migliore retta che le relative incertezze.

Si assuma trascurabile l'incertezza sui raggi e si assegni un unico valore alla deviazione standard delle aree. Infine, si assuma per deviazione standard un valore pari ad un terzo della media delle incertezze massime sulle aree.

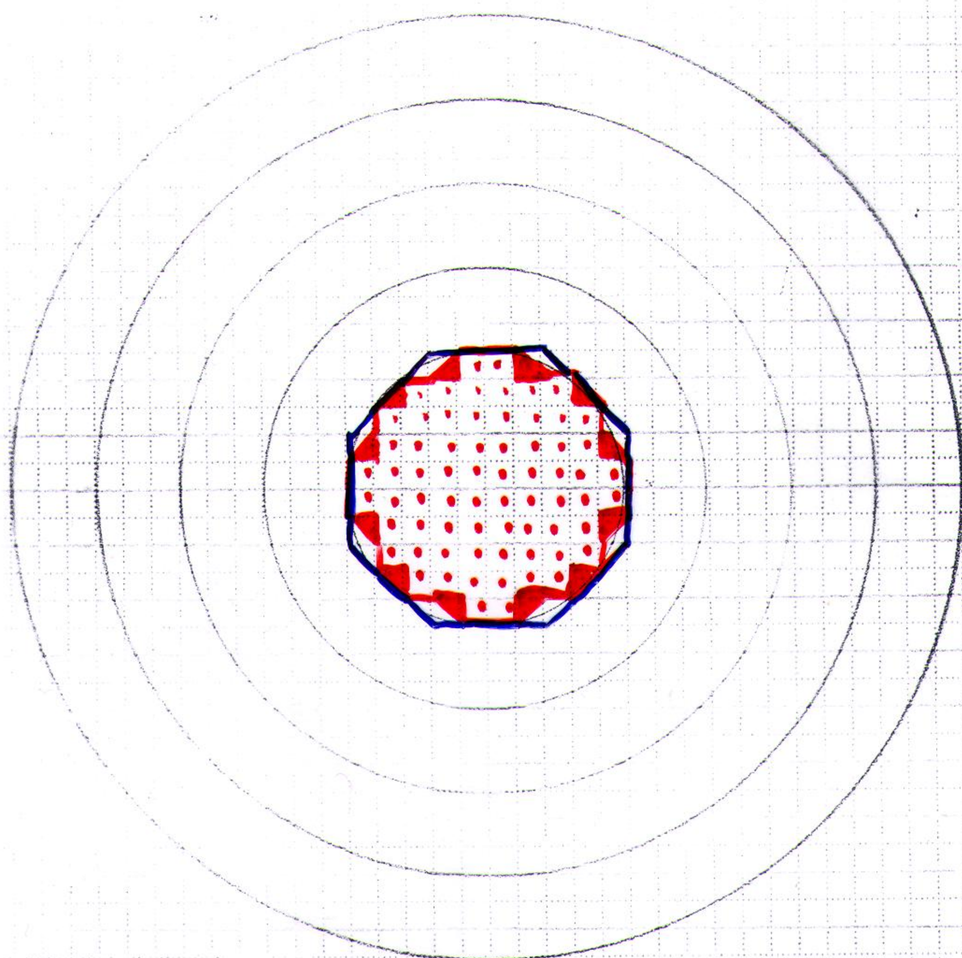
$\pi = 3,141592654$ ......





1
1/2
1/4
1/9
5
4
3
2
1
(78 ± 10)
68
88
((68+88)/2 ± (88−68)/2)

$$(77 \pm 3)\,\blacksquare \Leftarrow \left(\frac{80+74}{2} \pm \frac{80-74}{2}\right)\blacksquare$$

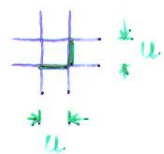


$$68\,\blacksquare + 12\,\blacktriangle = (68+6)\,\blacksquare = 74\,\square$$

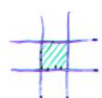
$$68\,\blacksquare + 12\,\blacksquare = 80\,\blacksquare$$

Hp.: Nessuna suddivisione nei "quadratini" del foglio

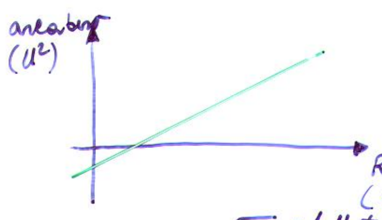
→ unità di misura delle lunghezze u



→ unità di misura delle aree $u \cdot u = u^2$



CERCHIO N°	R (u)	R^2 (u^2)	area min. (u^2)	area max (u^2)	area best (u^2)	Δarea best (u^2)
1	5	25	73	83	78.0	5.0
2	8	64	192	211	201.5	9.5
3	11	121	365	390	377.5	12.5
4	14	196	600	633	614.0	16.5
5	17	289	890	928	909.0	19.0



$y = a \cdot x + b$

b ← $-1,11 \pm 1,37$ ⇒ zero entro 1σ

a ← $3,145 \pm 0,008$ ⇒ $\frac{0,008}{3,145} = 0,3$ ‰

$\sigma(\text{area best}) \approx$

$\approx \frac{1}{3} \langle \Delta\text{area best} \rangle$

$= \frac{12,5}{3} = 4,2\ u^2$

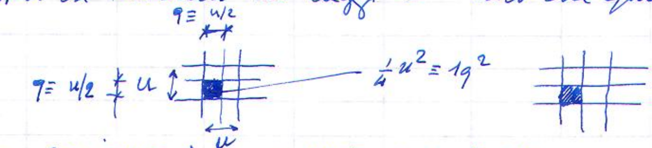
Errori Sistematici

① La fotocopiatrice ha generato copie con deformazione ad arco di tutte le rette passanti per le circonferenze e quindi anche dei quadretti.

② Le circonferenze sarebbero dovute essere concentriche ma via via che si sono disegnate la punta del compasso ha allargato il "buco centrale".

unità di misura delle aree $= \frac{1}{4}$ del quadretto della griglia

unità di misura dei raggi = lato del quadretto



cerchio #	raggio (q)	raggio² (q^2)	area per difetto (q^2)	area per eccesso (q^2)	areabest (q^2)	Δ(areabest) (q^2)
1	10	100	286	336	311,0	25,0
2	16	256	749	843	796,0	47,0
3	22	484	1466	1591	1528,5	62,5
4	28	784	2366	2558	2462,0	96,0
5	34	1156	3562	3728	3645,0	83,0

$\rightarrow \boxed{S = a\cdot(r^2) + b}$

$b = -6.86 \ q^2$

$a = 3{,}157118$ è adimensionato, come deve!

$\sigma_S \simeq \frac{1}{3}\langle \Delta(\text{areabest})\rangle = 20.9 \ q^2 \longrightarrow \begin{cases} \sigma_b = 16.62 \ q^2 \\ \sigma_a = 0.025 \end{cases}$

$\sigma_{fit} = 6{,}2 \ q^2 \longrightarrow \begin{cases} \sigma_b = 4.93 \ q^2 \\ \sigma_a = 0.0073 \end{cases}$

uso σ_{fit} poiché c'è un fattore ≈ 3 tra σ_S e σ_{fit}.

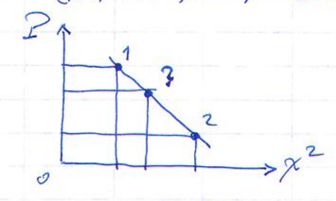
$\rightarrow \begin{cases} a = 3.1571 \pm 0.0073 \\ b = \cancel{-6.86} \ (-6.9 \pm 4.9) \ q^2 \end{cases}$

$$\chi^2 = \left(\frac{\pi_{exp} - \pi_{fit}}{\sigma_{fit}}\right)^2 = \left(\frac{3.1571 - 3.1416}{0.0073}\right)^2 \simeq 4.508 \quad \text{con } \nu = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} P(\chi^2 \geq 3.84, \nu = 1) = 5\% \\ P(\chi^2 \geq 5.02, \nu = 1) = 2.5\% \end{array}\right\} \ P(\chi^2 \geq 4.508, \nu = 1) =$$

$$= 0.05 - (0.05 - 0.025)\frac{4.508 - 3.84}{5.02 - 3.84} =$$

$$= 0.0358 \ \hat{=} \ 3.6\%$$



$$\frac{P_1 - P_2}{\chi_2^2 - \chi_1^2} = \frac{P_1 - P_?}{\chi_?^2 - \chi_1^2} \rightarrow P_? = P_1 - (P_1 - P_2)\left(\frac{\chi_?^2 - \chi_1^2}{\chi_2^2 - \chi_1^2}\right)$$

Se non usassi il σ_{fit} ma il $\sigma_s = \frac{1}{3} \langle \Delta(\text{area bin}) \rangle$ ottieni determinazioni dei parametri del fit con incertezza superiore al caso dell'uso del σ_{fit} (**sovrastima** dell'incertezza statistica!).
Conseguentemente il colcolo del χ^2 verrebbe erroneamente forza corretto dal σ a denominatore (**illusione** di accordo perfetto tra π_{exp} e π_{th}).
Naturalmente anche l'analisi del termine noto per evidenziare eventuali errori sistematici, verrebbe **masherato**!

<u>Cerchi</u> fit: $y = C + Bx$

$\pi = 3.17 \pm 0.03$

$C = -1,0 \pm 1,1$

$\frac{\chi^2}{\nu} = \frac{1,071}{3} = 0,4$

→ π_{exp} in accordo con π_{th} chiedendo $3 \cdot \sigma_\pi$, dunque ci potrebbe essere un errore sistematico che provoca una "rotazione" della retta del fit dando un π "troppo alto".
Forse è stato introdotto al momento della conta dei quadretti di confine: effetto crescente con il diametro della circonferenza.
Eliminando il 5° cerchio, il più esterno, ripetendo il fit, vediamo se π_{exp} rientra con π_{th} per meno di 3σ.

$y = C + Bx$

$\sigma_{fit} = 1,10$

$\sigma_\pi = 0,01$, $\sigma_C = ?$ ← $\sigma_{fit}\sqrt{\frac{\Sigma x^2}{\Delta}} = 1,10\sqrt{\frac{57778}{66276}} = 1,03$

$\pi = 3,16$, $C = -0,63$

Ora bastano $2\sigma_\pi$ <u>CVD</u>

MISURA DENSITA' CUBO

$$m = (80.0 \pm 0,1)\,g \longrightarrow \frac{\Delta m}{m} = \pm 0,13\%$$

$$l = (3.00 \pm 0.01)\,cm \longrightarrow \frac{\Delta l}{l} = \pm 0,33\%$$

$$\longrightarrow \rho = \frac{m}{l^3} = 2,9629....\ g/cm^3$$

$$\Delta\rho = \left(\frac{\Delta m}{m} + 3\frac{\Delta l}{l}\right) * \rho = 0,033\ g/cm^3$$

$$\boxed{(2,963 \pm 0,033)\ g/cm^3} \longrightarrow \frac{\Delta\rho}{\rho} = 1,11\%$$

→ compatibile con $2.7\ g/cm^3$?

$$2.963 - 2.7 = 0,263\ g/cm^3 > 0,033\ g/cm^3$$

La discrepanza è maggiore dell'errore quotato

oppure

l'errore è sottostimato

c'è anche un errore sistematico

.... qual'è l'errore associato al valore nominale della ρ_{Al} ?

densita' media di un cubo

- $m \pm \delta m \leftarrow (8.0 \pm 0.1)\,g$
  $\ell \pm \delta\ell \leftarrow (3.00 \pm 0.01)\,cm$

- $\boxed{\rho = \rho(m,\ell) = m \cdot \ell^{-3}}$

- $\delta\rho = \left|\frac{\partial\rho}{\partial m}\right|\delta m + \left|\frac{\partial\rho}{\partial\ell}\right|\delta\ell = \frac{\delta m}{\ell^3} + 3m\ell^{-4}\delta\ell$

$$= \underbrace{\frac{0.1}{27}}_{0.0037|037} + \underbrace{\frac{3\times 8.0}{81}\times 0.01}_{0.0029|629} = 0.0067\ g/cm^3$$

- $\rho = \frac{m}{\ell^3} = \frac{8.0}{\underbrace{27}_{0,2962|962}} = 0.2963\ g/cm^3$

$$\longrightarrow \rho = (296 \pm 7)\times 10^{-3}\ g/cm^3 \qquad \longrightarrow 2.4\%$$

$$\left(\frac{6,7}{296,3} = 2.3\%\right)$$

- $\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{\delta m}{m} + 3\,\frac{\delta\ell}{\ell} =$

$$= \underbrace{\frac{0.1}{8.0}}_{0.012|5} + 3\,\underbrace{\frac{0.01}{3.00}}_{0.010} = 0.023 = 2.3\%$$

È plausibile ?

$$(296 \pm 7) \times 10^{-3}\ g/cm^3$$

Hp) legname secco all'aria → abete rosso

$$440\ \frac{Kg}{m^3} \doteq 440 \times \frac{10^3\ g}{10^6\ cm^3} = 440 \times 10^{-3}\ g/cm^3$$

$$\rightarrow \frac{440-296}{7} = 20.6 \quad !$$

Hp) aria (20°C, 1 atm)

$$1{,}29\ kg/m^3 \doteq 1{,}29 \times 10^{-3}\ g/cm^3$$

$$\rightarrow \frac{296-1{,}29}{7} = 42.1 \quad !$$

Hp) acqua (4°C)

$$1{,}000 \times 10^3\ Kg/m^3 \doteq 1\ g/cm^3$$

$$\rightarrow \frac{296-1}{7} = 42{,}1 \quad !$$

Hp) alluminio

$$2700\ Kg/m^3 \doteq 2{,}7\ g/cm^3$$

$$\rightarrow \frac{296-2{,}7}{7} = 41{,}9 \quad !$$

→ SAPENDO CHE ERA **ALLUMINIO** RICONOSCIAMO UNO **SBAGLIO** DI UN ORDINE DI GRANDEZZA NEL COPIARE m : ERANO 80,0g E NON 8,0g !

$$\boxed{x = 296 \pm 7 \quad \overset{?}{\longleftrightarrow} \quad y = 440 \pm 1}$$

1) In termini di valore intermedio e di errore massimo:

$$\text{diff.} = x - y = 296 - 440 = -144$$

$$\Delta(\text{diff.}) = \left|\frac{\partial}{\partial x}(\text{diff})\right| \Delta x + \left|\frac{\partial}{\partial y}(\text{diff})\right| \Delta y =$$

$$= \Delta x + \Delta y = 7 + 1 = 8$$

$$\text{diff} = -144 \pm 8$$

2) In termini di valore medio e deviazione standard:

$$\text{diff} = x - y = 296 - 440 = -144$$

$$\sigma(\text{diff}) = \sqrt{\left(\frac{\partial}{\partial x}(\text{diff})\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}(\text{diff})\right)^2 \sigma_y^2} =$$

$$= \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} = \sqrt{49 + 1} \cong 7.071\ldots$$

$$\text{diff.} = -144 \pm 7.$$

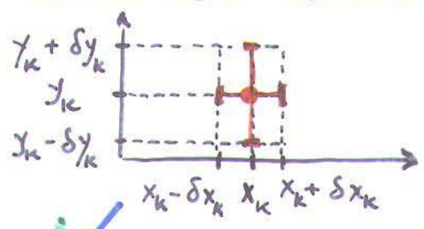
Determinazione Grafica della Migliore Retta

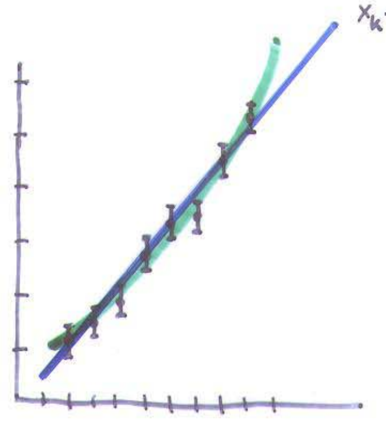
Misura di 2 G.F. che variano durante "l'esperimento"

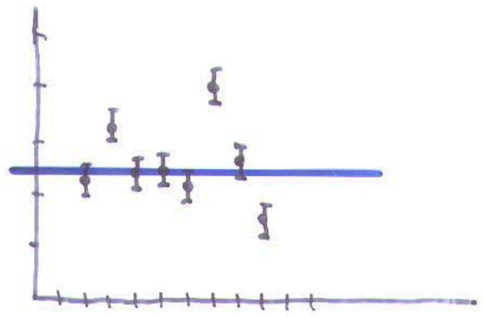
→ verifica esistenza di un legame funzionale tra le due G.F. misurate

La relazione lineare è la più semplice:
si cerca perciò di "linearizzare" mediante un opportuno cambiamento delle scale sugli assi.

→ rappresentazione delle misure con le incertezze







Metodo delle rette di massima e di minima pendenza: per G.F. note con incertezze massime

→ Stima grafica dei coefficienti a, b in $y(x) = a + bx$ nonché delle loro incertezze massime δa, δb

→ strategia:

- determinare le 2 rette che raccolgono i "rettangoli" di incertezza massima (almeno in parte)

- da queste 2 rette di minima e massima pendenza ricavare la retta intermedia

→ valori interpolati o estrapolati

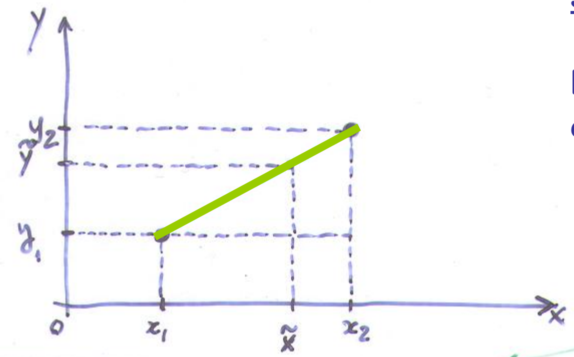
retta intermedia + 2 rette ad essa parallele che abbracciano tutti i punti sperimentali, altrimenti potrei avere incertezza nulla nel punto di intersezione tra le rette di massima e minima pendenza

o almeno le 2 rette non si devono intersecare nel "range" d'uso.

Interpolazione lineare tra due punti misurati, noti con incertezze massime.

Scale compresse:

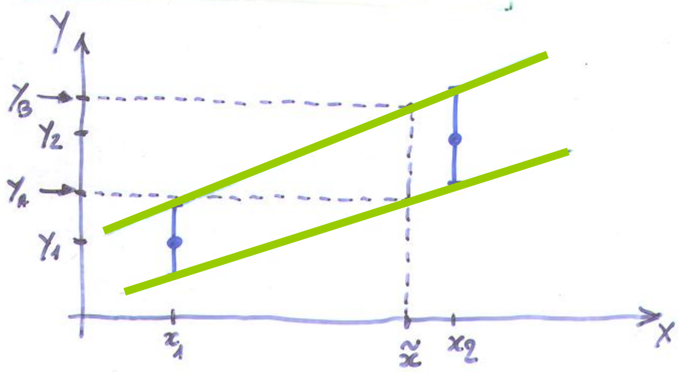
l'incertezza è più piccolo della dimensione del "punto"



$$\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} = \frac{\tilde{y} - Y_1}{\tilde{x} - X_1}$$

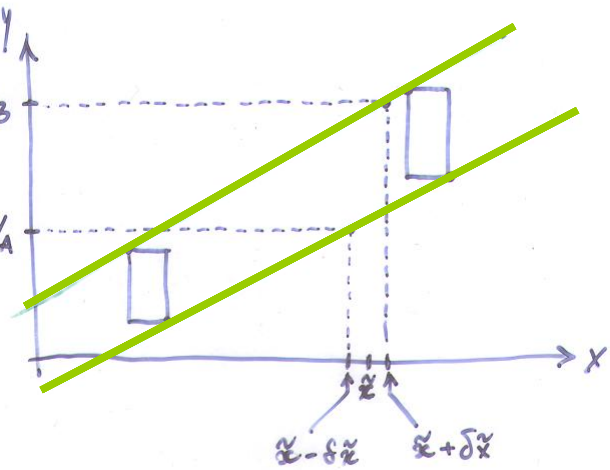
$$\boxed{\tilde{Y} = Y_1 + (\tilde{x} - X_1) \cdot \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}}$$

Scale espanse:



$\tilde{x} \rightarrow Y_A, Y_B \rightarrow \tilde{y} \pm \delta \bar{y}$

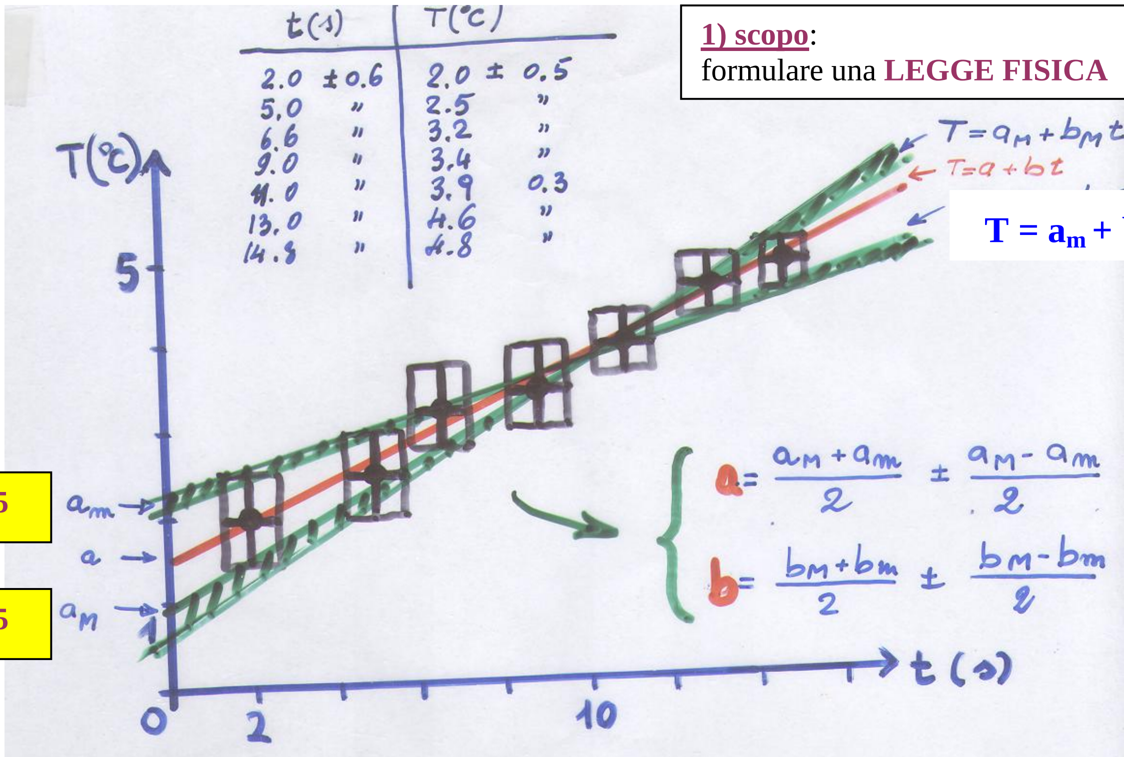
$$\boxed{\begin{array}{l} \tilde{y} = \dfrac{y_A + y_B}{2} \\ \delta \tilde{y} = \dfrac{y_B - y_A}{2} \end{array}}$$



$\tilde{x} \pm \delta \tilde{x} \rightarrow Y_A, Y_B \rightarrow \tilde{y} \pm \delta \bar{y}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \tilde{y} = \dfrac{Y_A + Y_B}{2} \\ \delta \tilde{y} = \dfrac{Y_B - Y_A}{2} \end{array}}$$

1) scopo:
formulare una **LEGGE FISICA**

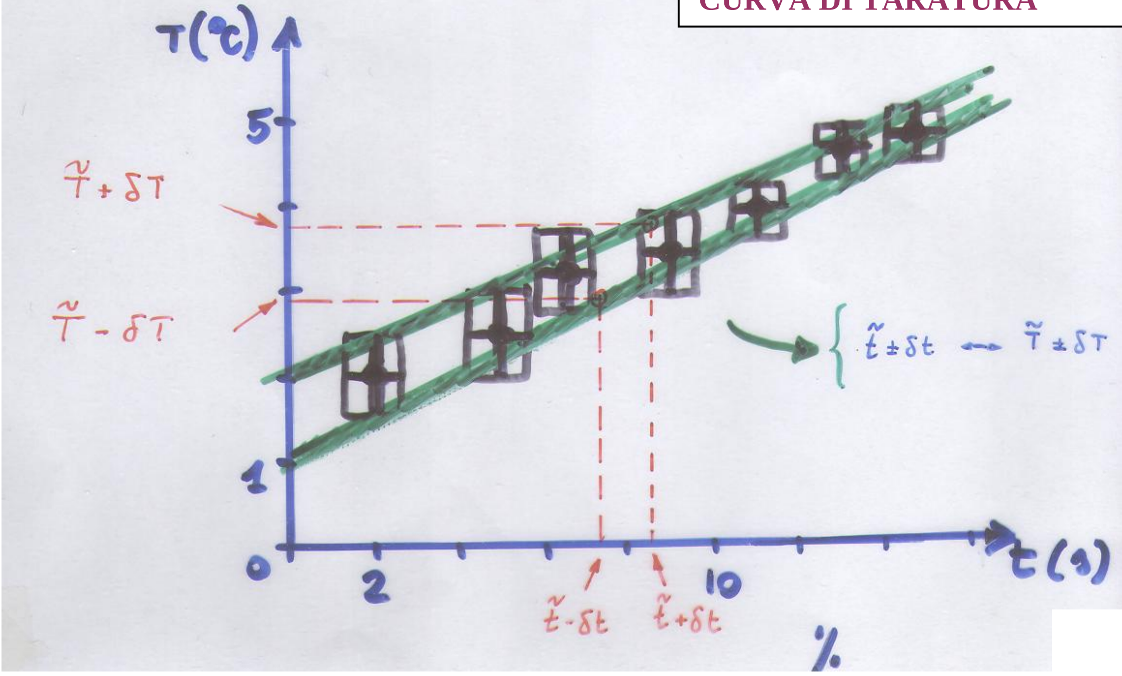


$T = a_m + b_m t$

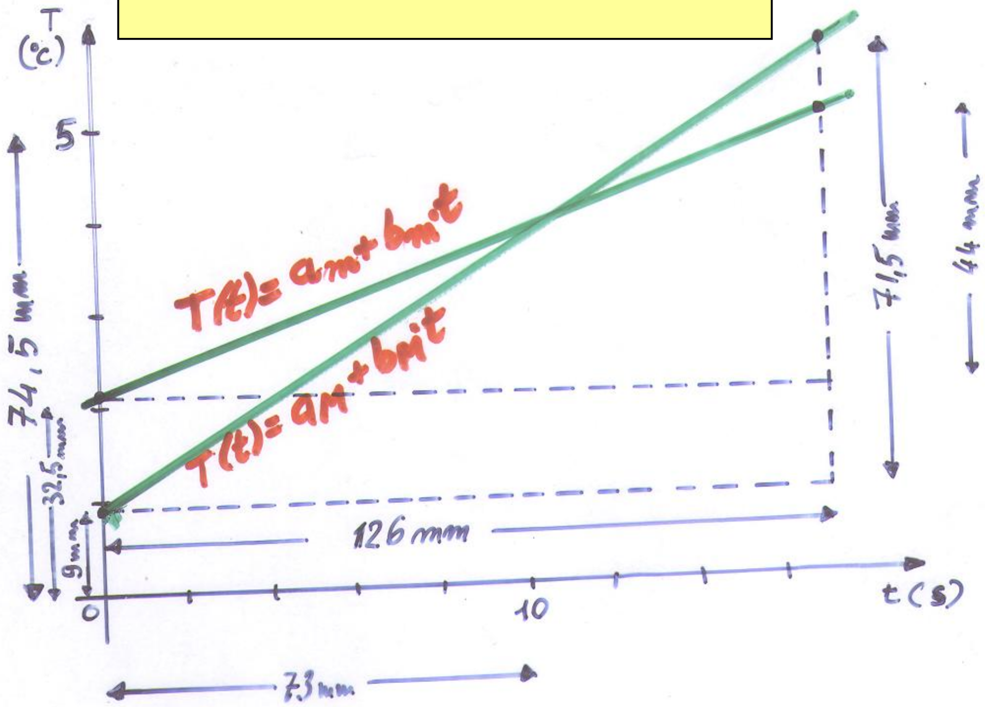
2.15

0.95

2) scopo: potere ricavare **T** dal grafico “dando” **t**, oppure ricavare **t** “dando” **T**.
CURVA DI TARATURA



<u>1) scopo</u>: … formulare una **LEGGE FISICA**



- $T(t) = a_m + b_m\, t$: retta di minima pendenza

$$a_m = \frac{32{,}5\ mm}{\frac{74{,}5\ mm}{5\ °C}} = 2{,}1812\ °C$$

$$b_m = \frac{\frac{44\ mm}{74{,}5\ mm / 5°C}}{\frac{126\ mm}{\frac{73\ mm}{10\ s}}} = 0{,}1711\ °C/s$$

- $T(t) = a_M + b_M\, t$: retta di massima pendenza

$$a_M = \frac{9.0\ mm}{74{,}5\ mm / 5°C} = 0.6040\ °C$$

$$b_M = \frac{71.5\ mm / (74.5\ mm / 5°C)}{126\ mm / (73\ mm / 10\ s)} = 0{,}2780\ °C/s$$

- $\delta a = \dfrac{2{,}1812 - 0{,}6040}{2} = 0{,}78|86\ °C \rightarrow 0.79\ °C$

$a = \dfrac{2.1812 + 0{,}6040}{2} = 1{,}39|26\ °C \rightarrow 1{,}39\ °C$

- $\delta b = \dfrac{0{,}2780 - 0{,}1711}{2} = 0{,}053|45\ °C/s \rightarrow 0{,}053\ °C$

$b = \dfrac{0{,}2780 + 0{,}1711}{2} = 0{,}224|55\ °C/s \rightarrow 0{,}225\ °C/s$

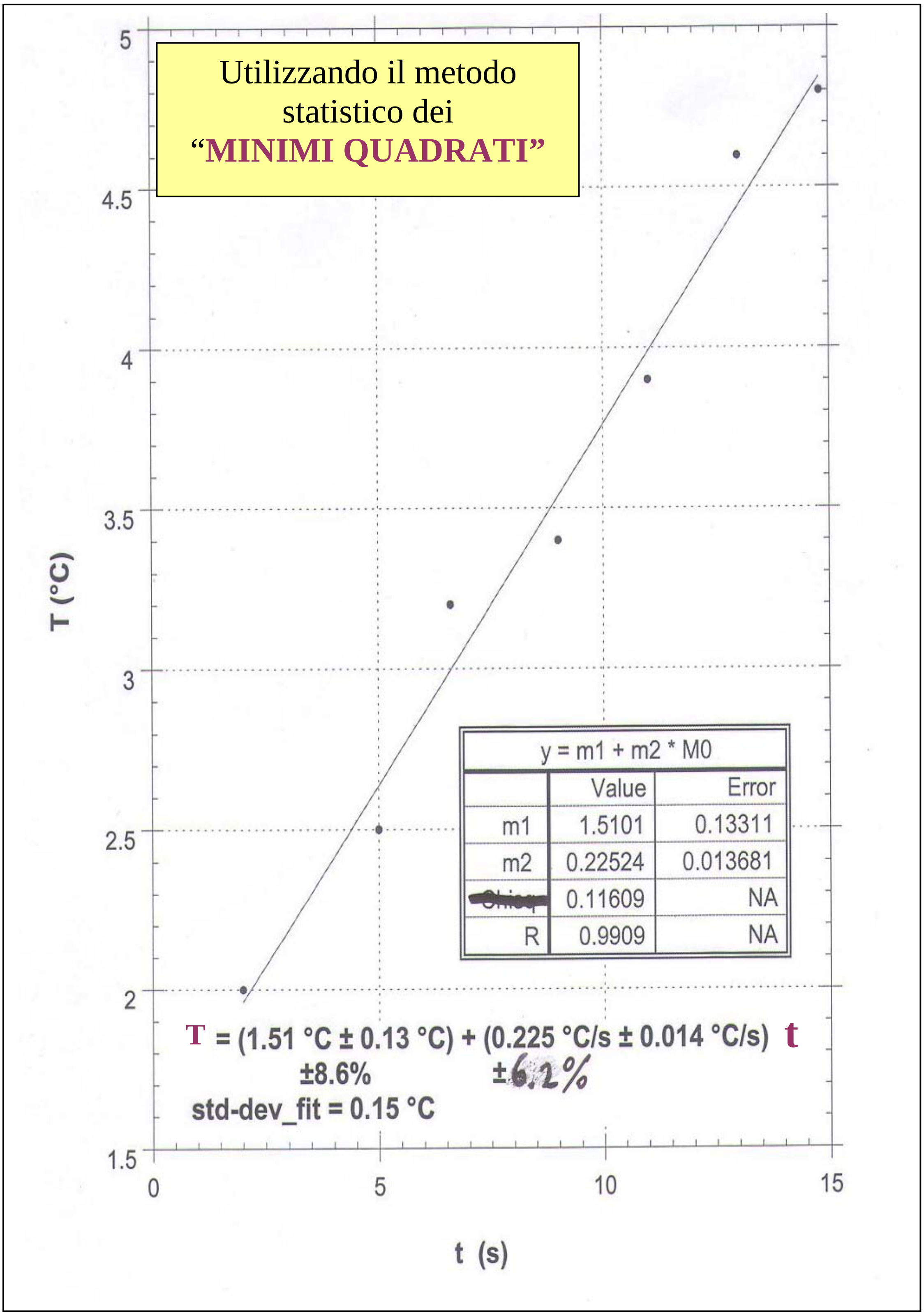
- $\boxed{T(t) = a + bt}$

$$\begin{cases} a = (1.39 \pm 0.79)\ °C \\ b = (0.225 \pm 0.053)\ °C/s \end{cases}$$

$\rightarrow \dfrac{\delta a}{a} = \dfrac{0{,}79}{1{,}39} \simeq 57\%$

$\rightarrow \dfrac{\delta b}{b} = \dfrac{0{,}053}{0{,}225} \simeq 24\%$

!!!

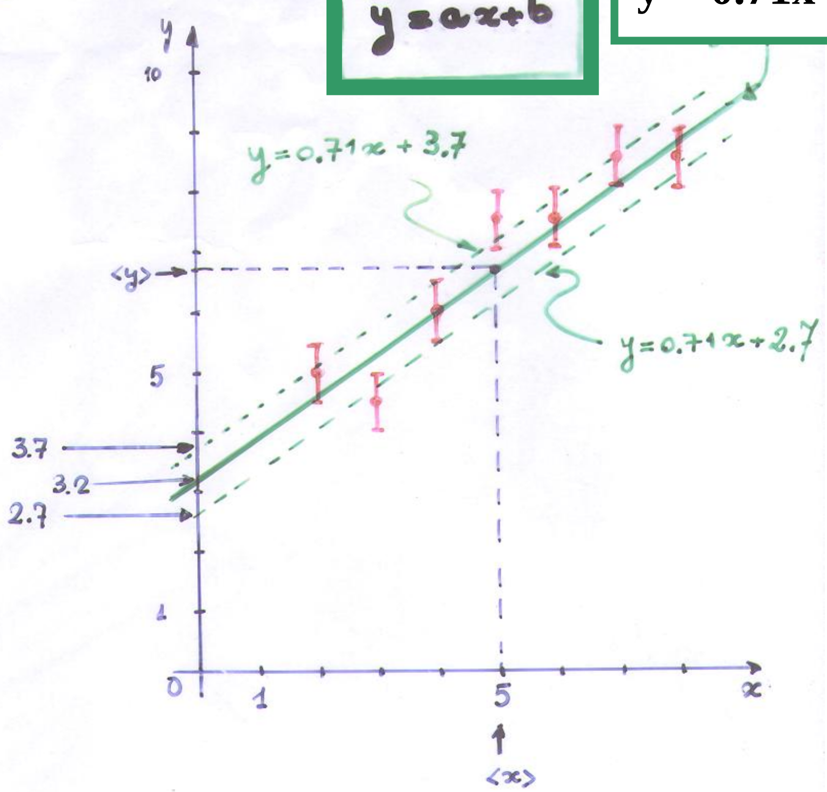

Utilizzando il metodo statistico dei
“MINIMI QUADRATI”
y = m1 + m2 * M0
Value
Error
m1 1.5101 0.13311
m2 0.22524 0.013681
[redacted] 0.11609 NA
R 0.9909 NA
T = (1.51 °C ± 0.13 °C) + (0.225 °C/s ± 0.014 °C/s) t
±8.6%
±6.2%
std-dev_fit = 0.15 °C
T (°C)
t (s)
5
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
0
5
10
15

Un altro esempio di utilizzo del metodo statistico dei“**MINIMI QUADRATI**”

$y = ax + b$

y = 0.71x + 3.2

i	x_i	$y_i \pm \sigma(y_i)$	
1	2	5.0	0.5
2	3	4.5	0.5
3	4	6.0	0.5
4	5	7.5	0.5
5	6	7.5	0.5
6	7	8.5	0.5
7	8	8.5	0.5



→ $\sum_1^7 x_i = 35$; $\sum_1^7 y_i = 47,5$; $\sum_1^7 x_i y_i = 257,5$; $\sum_1^7 x_i^2 = 203$;

→ la retta dei minimi quadrati passa per il punto medio $(\langle x\rangle ; \langle y\rangle)$

$$\begin{cases} \langle x\rangle = \sum_1^7 x_i / N = 35/7 = 5 \\ \langle y\rangle = \sum_1^7 y_i / N = 47,5/7 \cong 6,79 \end{cases}$$

→ $$\begin{cases} a = \dfrac{N\cdot(\Sigma xy) - (\Sigma x)(\Sigma y)}{N\cdot(\Sigma x^2) - (\Sigma x)^2} = \dfrac{7\cdot 257,5 - 35\cdot 47,5}{7\cdot 203 - (35)^2} = \dfrac{140}{196} \cong 0,7143 \\ b = \dfrac{(\Sigma x^2)(\Sigma y) - (\Sigma x)(\Sigma xy)}{N\cdot(\Sigma x^2) - (\Sigma x)^2} = \dfrac{203\cdot 47,5 - 35\cdot 257,5}{196} = \dfrac{630}{196} \cong 3,2143 \end{cases}$$

→ $$\begin{cases} \sigma(a) = \sqrt{\dfrac{N}{N(\Sigma x^2) - (\Sigma x)^2}} \cdot \sigma(y) = \sqrt{\dfrac{7}{196}} \cdot 0,5 \cong 0,0945 \\ \sigma(b) = \sqrt{\dfrac{\Sigma x^2}{N(\Sigma x^2) - (\Sigma x)^2}} \cdot \sigma(y) = \sqrt{\dfrac{203}{196}} \cdot 0,5 \cong 0,5089 \end{cases}$$

⇒ $\boxed{y = (0,71 \pm 0,09)\,x + (3,2 \pm 0,5)}$

1 cifra significativa per σ :

$a = 0.7143 \qquad \sigma(a) = 0.0945$

$b = 3.2143 \qquad \sigma(b) = 0.5089$

$$\boxed{y = (0.71 \pm 0.09)\, x + (3.2 \pm 0.5)}$$

2 cifre significative per σ :

$a = 0.7143 \qquad \sigma(a) = 0.0945$

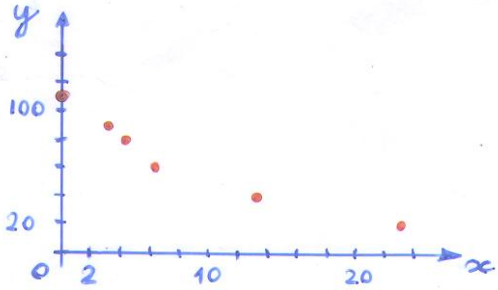
$b = 3.2143 \qquad \sigma(b) = 0.5089$

$$\boxed{y = (0.714 \pm 0.095)\, x + (3.21 \pm 0.51)}$$

Grafico in carta semi-log
(logaritmica - lineare)

x	y
0.0	110
2.6	90
4.2	80
8.2	60
13.6	40
23.0	20

→



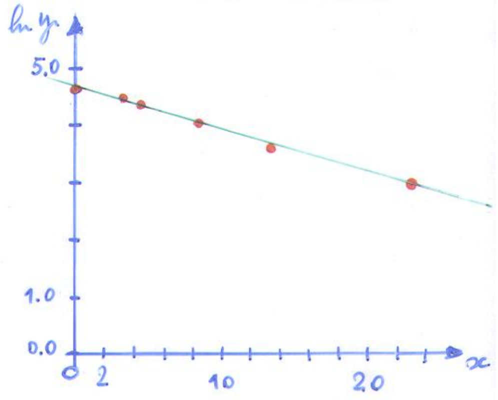
→ Assumo incertezze trascurabili su x e su y.

→ Suppongo un andamento di tipo esponenziale del tipo

$$\boxed{y(x) = k \cdot \exp(\lambda x)}$$

Calcolo perciò il "$\ln y$" e riporto su un foglio millimetrato doppio lineare "$\ln y$ vs. x"

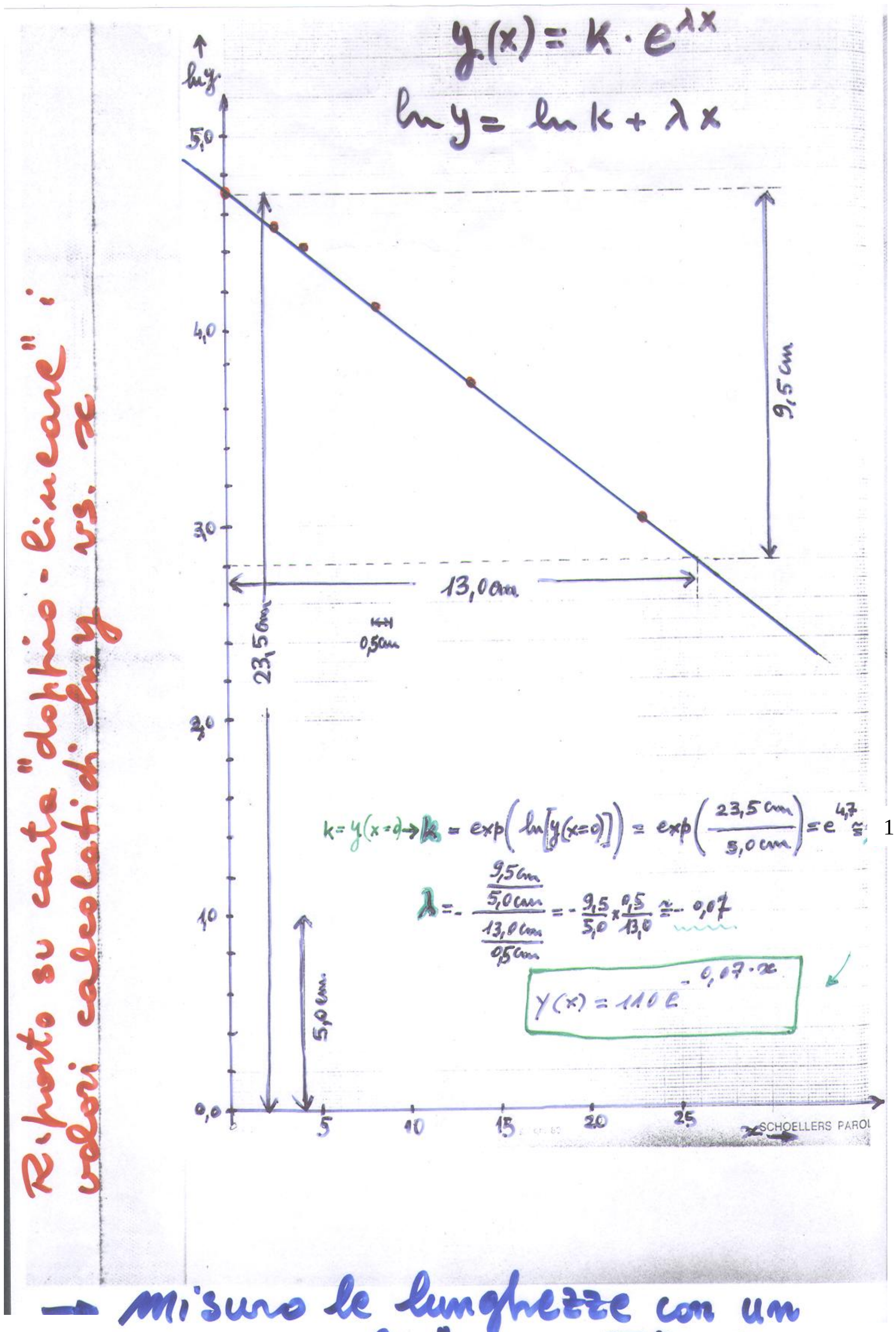
x	$\ln y$
0.0	$\ln(110) \simeq 4.7$
2.6	$\ln(90) \simeq 4.5$
4.2	$\ln(80) \simeq 4.4$
8.2	$\ln(60) \simeq 4.1$
13.6	$\ln(40) \simeq 3.7$
23.0	$\ln(20) \simeq 3.0$



→ Il problema è ora quello di valutare i due parametri K, λ:

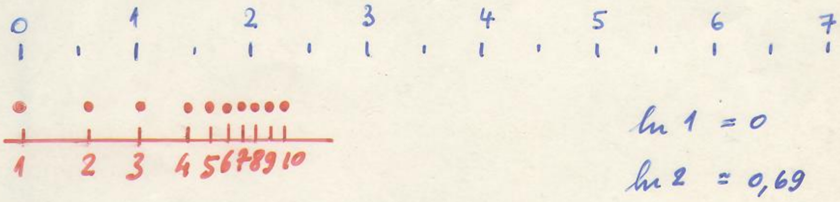
$$y(x) = k \exp(\lambda x)$$

$$\ln y = \ln k + \ln[\exp(\lambda x)] = \overset{?}{\ln k} + \overset{?}{\lambda} x$$



→ misuro le lunghezze con un righello e le "rapporto" alle lunghezze unitarie misurate col righello

→ Anziché calcolare effettivamente ln y ed usare un usuale foglio di carta millimetrata "doppio lineare" riportando ln y calcolato vs. x, si usa la carta "semi-logaritmica" in cui un asse è lineare mentre l'altro ha le suddivisioni spaziate tra di loro secondo il logaritmo di y ed è suddiviso in decadi: pertanto vi si riporteranno direttamente i valori di y e x
la "visione grafica" che se ne ha è perciò ancora ln y vs x



$\ln 1 = 0$

$\ln 2 \simeq 0{,}69$

$\ln 3 \simeq 1{,}10$

$\ln 4 \simeq 1{,}39$

$\ln 5 \simeq 1{,}61$

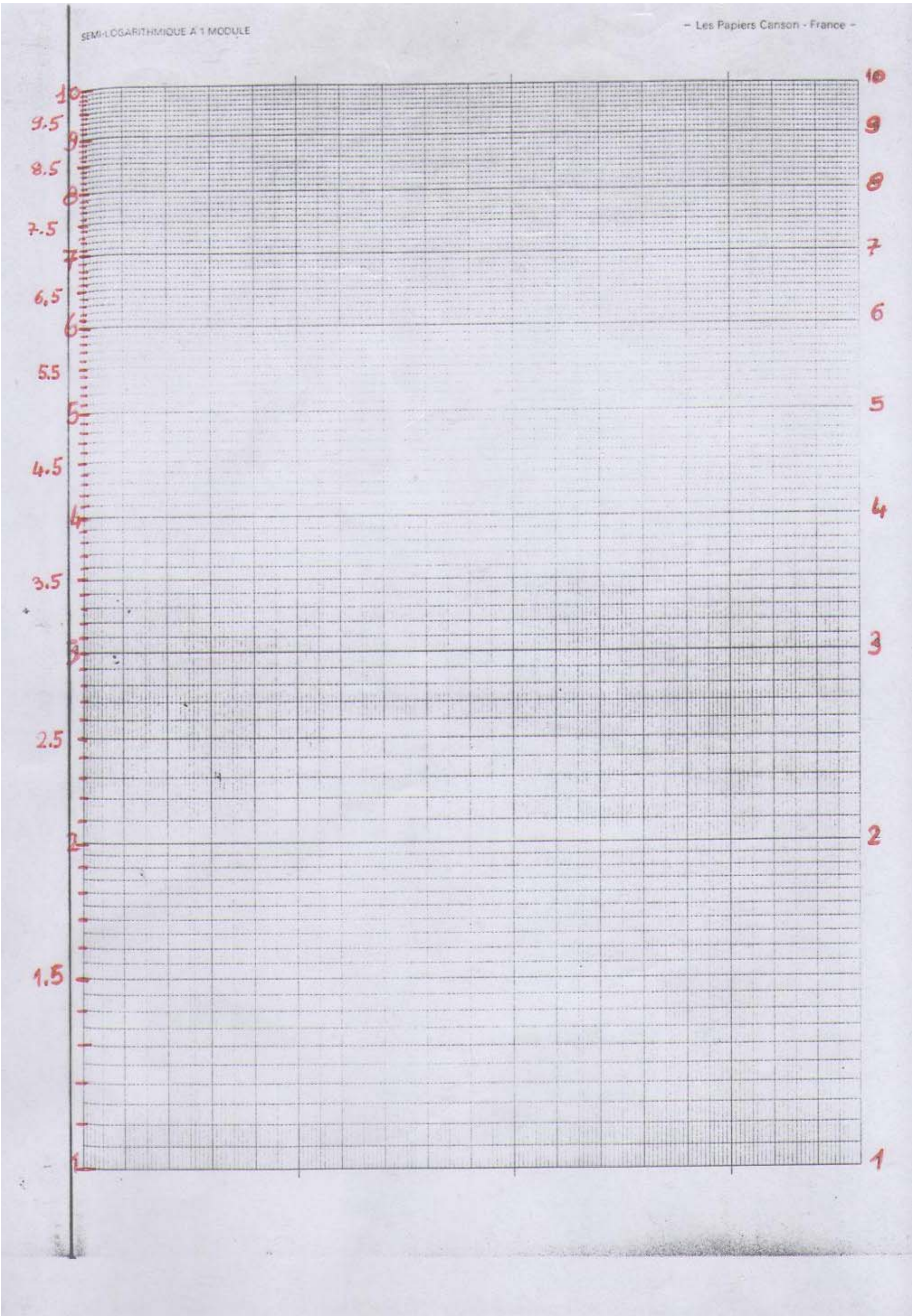
$\ln 6 \simeq 1{,}79$

$\ln 7 \simeq 1{,}95$

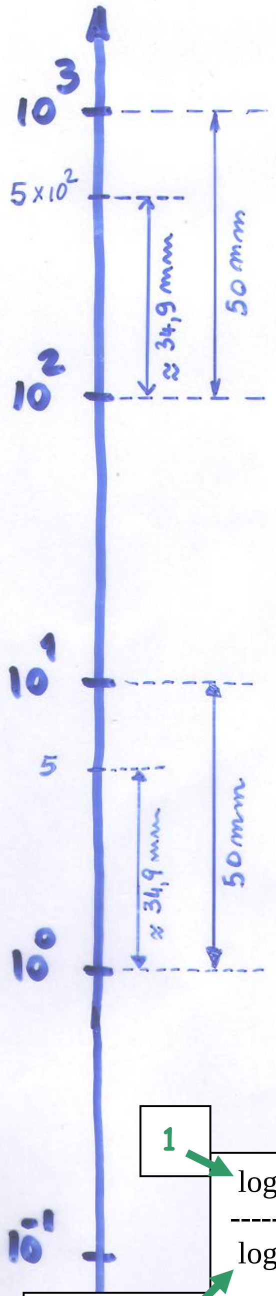
$\ln 8 \simeq 2{,}08$

$\ln 9 \simeq 2{,}20$

$\ln 10 \simeq 2{,}30$


SEMI-LOGARITHMIQUE À 1 MODULE
– Les Papiers Canson - France –
10
9.5
9
8.5
8
7.5
7
6.5
6
5.5
5
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1

Lettura per interpolazione su scala logaritmica



ln(10) = 2.303

$$\frac{\boxed{\ln(1000) - \ln(100)}}{\boxed{\ln(500) - \ln(100)}} = \frac{50\ mm}{x\ mm}$$

ln(5) = 1.609

$\hookrightarrow x \simeq 34,933$ mm

2.303

$$\frac{\ln(10)}{\ln(5)} = \frac{50\,mm}{x\ mm} \rightarrow x \simeq 34,933\ m$$

1.609

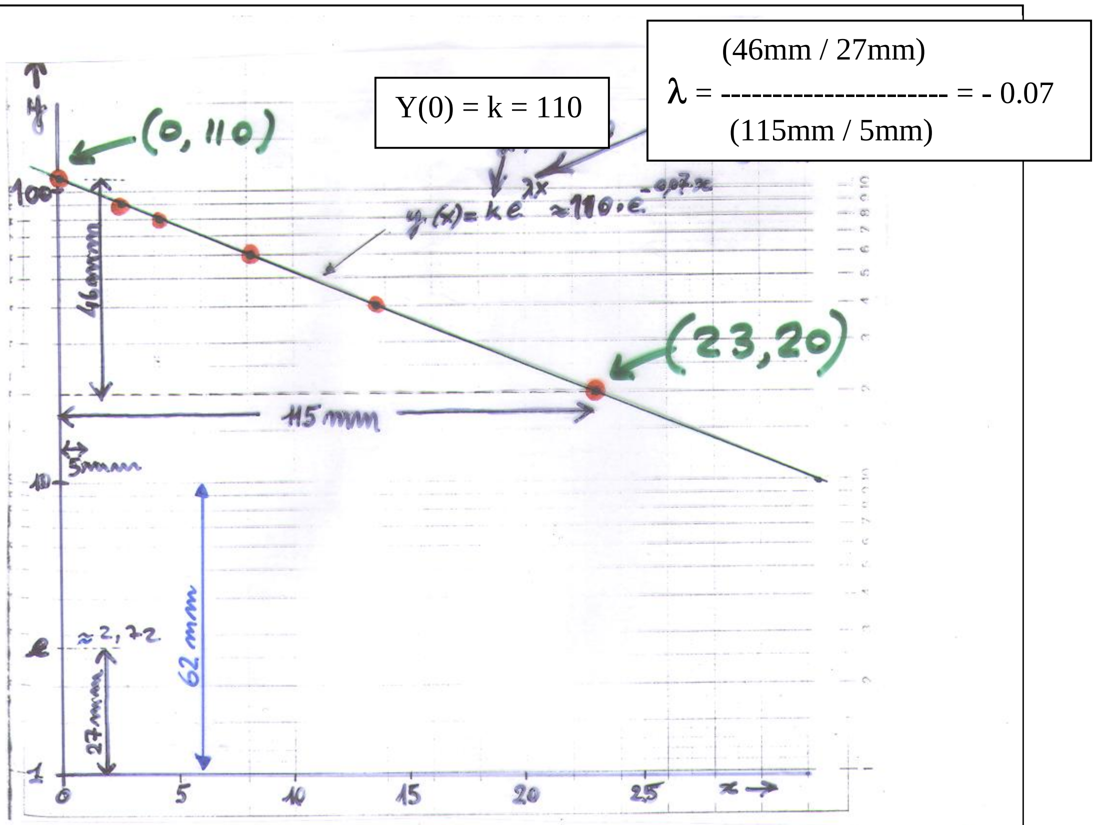
1

0.69887

$$\frac{\log_{10}(10)}{\log_{10}(5)} = (50.0\ mm / x\ mm) \rightarrow x = 34.9485\ mm$$

$$\frac{\log_{10}(10)}{\log_{10}(x)} = (50.0\ mm / 34.9\ mm) \rightarrow \log_{10}(x) = (34.9\ mm / 50.0\ mm) = 0.698$$

$$\rightarrow x = 10^{0.698} = 4.989 \sim 5$$



→ Attenzione alla lunghezza delle unità sull'asse vertical

$1 = \ln e \simeq \ln(2{,}71828..)$ ← 27 mm

$1 = \log_{10} 10$ ← 62 mm

- $y(x) = k \cdot e^{\lambda x}$ $\qquad \lambda = -\dfrac{\frac{46\,mm}{27\,mm}}{\frac{115\,mm}{5\,mm}} \simeq -0.07$

- $y(x) = k \cdot 10^{\mu x}$ $\qquad \mu = -\dfrac{\frac{46\,mm}{62\,mm}}{\frac{115\,mm}{5\,mm}} \simeq -0.03$

- & $k = y(x=0) = 110$ in entrambi i casi

→ $\boxed{y(x) = 110\, e^{-0.07x}}$

→ $\boxed{y(x) = 110 \cdot 10^{-0.03x}}$

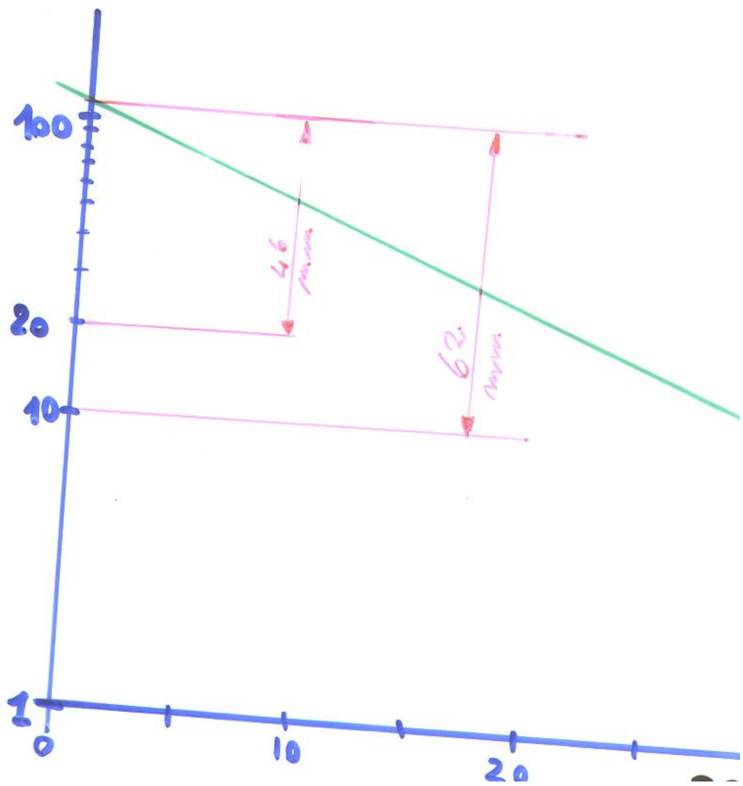
$$y = k\cdot e^{\lambda x}, \quad k = y(x=0) = ?$$

$$\frac{\ln k - \ln 20}{\ln 100 - \ln 10} = \frac{46.\,\text{mm}}{62.\,\text{mm}}$$

$$\ln k = \underbrace{\ln 20}_{2.99573} + \underbrace{\frac{46}{62}\cdot \ln\frac{100}{10}}_{1.70837} = 4.70410$$

$$k = \exp(4.70410) = 110.31109$$

$$\Rightarrow k \simeq 110.$$



→ Sommario sui minimi quadrati

$$\boxed{y = a + bx}$$

con solo σ_y di tipo costante per ogni y

- $$a = \frac{(\sum x^2)(\sum y) - (\sum x)(\sum xy)}{N(\sum x^2) - (\sum x)^2} \equiv \frac{\langle x^2\rangle\langle y\rangle - \langle x\rangle\langle xy\rangle}{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}$$

- $$b = \frac{N(\sum xy) - (\sum x)(\sum y)}{N(\sum x^2) - (\sum x)^2} \equiv \frac{\langle xy\rangle - \langle x\rangle\langle y\rangle}{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}$$

$$\Delta = N(\sum x^2) - (\sum x)^2 \equiv N^2(\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2)$$

- $$\sigma_{fit} = \sqrt{\frac{1}{N-2}\sum_{1}^{N}{}_i\left[y_i - (a + bx_i)\right]^2}$$

- $$\sigma_a = \sigma_y\sqrt{\frac{\sum x^2}{\Delta}} \equiv \frac{\sigma_y}{\sqrt{N}}\cdot\sqrt{\frac{\langle x^2\rangle}{(\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2)}}$$

- $$\sigma_b = \sigma_y\sqrt{\frac{N}{\Delta}} \equiv \frac{\sigma_y}{\sqrt{N}}\cdot\frac{1}{\sqrt{(\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2)}}$$

- $$\sigma_{(a,b)} = -\frac{\sigma^2(y)\cdot\sum_1^N{}_i\, x_i}{N\cdot\sum_1^N{}_i\, x_i^2 - \left(\sum_1^N{}_i\, x_i\right)^2} = -\frac{\sigma^2(y)}{N}\cdot\frac{\langle x\rangle}{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}$$

$$|\sigma_{(a,b)}| < \sigma_a \cdot \sigma_b$$

- $$\sigma(y = a + bx) = \sqrt{x^2\cdot\sigma_b^2 + \sigma_a^2 + 2x\sigma_{(a,b)}}$$