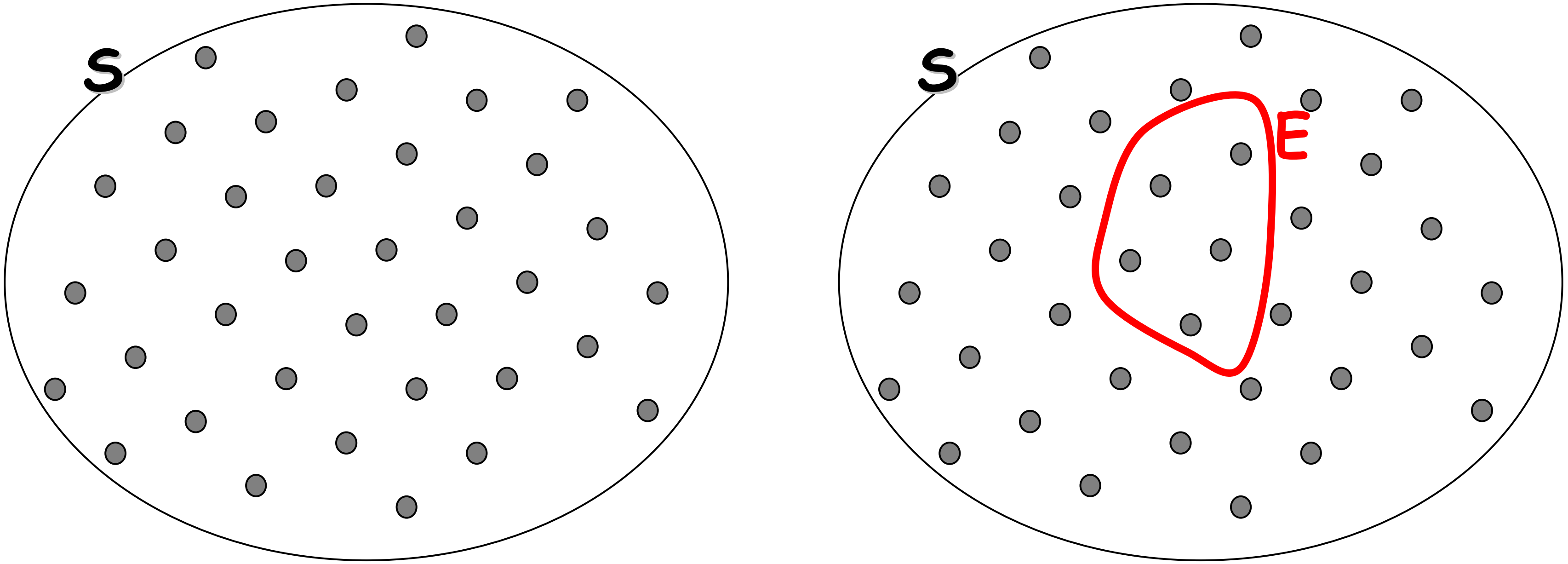
Note sulla Definizione Assiomatica della Probabilita'

La totalità delle varie modalità con cui si può presentare un **fenomeno casuale** sono rappresentate dai punti di uno spazio **S**.

Un sottoinsieme **E** qualunque dello spazio **S** (**E** $\subseteq$ **S**) rappresenta un qualunque **evento casuale**.



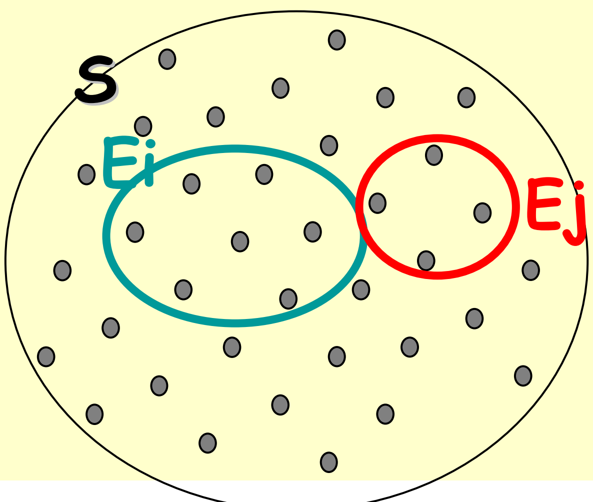
Viene definita **PROBABILITA' dell'evento casuale E, (p(E)),** un numero associato univocamente all'evento E che soddisfi le seguenti 3 proprietà:

- $\mathbf{p(E) \geq 0} \quad \forall E;$

- $\mathbf{p(S) = 1}$

- $\mathbf{p(E1 \vee E2 \vee E3 \vee \ldots) = p(E1) + p(E2) + p(E3) + \ldots}$

  per qualsiasi insieme di eventi E1, E2, E3, …
  in numero finito oppure infinito
  e a due a due senza alcun elemento in comune
  $(\{\mathbf{Ei} \wedge \mathbf{Ej}\} = \varnothing \quad \forall\, i \neq j)$

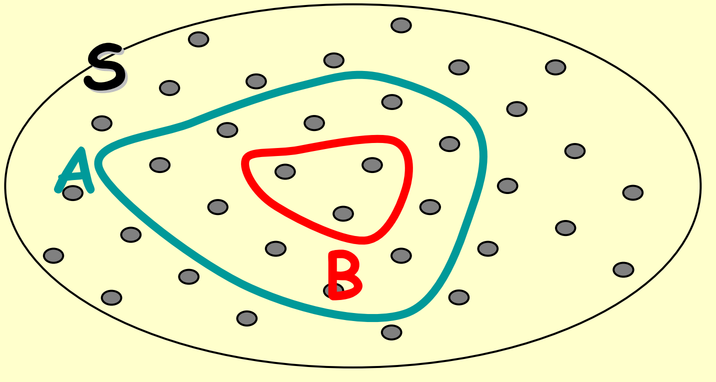


$$
-\left\{
\begin{array}{l}
S \vee \varnothing = S \\
S \wedge \varnothing = \varnothing \\
\boxed{\begin{array}{l} p(E1 \vee E2 \vee E3 \vee \dots) = p(E1) + p(E2) + p(E3) + \dots \\ \text{con a due a due senza alcun elemento in comune} \end{array}}
\end{array}
\right.
$$

$\Rightarrow$ **$p(S \vee \varnothing) = p(S) + p(\varnothing) = p(S)$ e $p(\varnothing) = 0$**

$$
-\left\{
\begin{array}{l}
A \supset B \\
A = B \vee (A \wedge \overline{B}) \\
\boxed{\begin{array}{l} p(E1 \vee E2 \vee E3 \vee \dots) = p(E1) + p(E2) + p(E3) + \dots \\ \text{con a due a due senza alcun elemento in comune} \end{array}}
\end{array}
\right.
$$

$\Rightarrow$ $p(A) = p(B) + p(A \wedge \overline{B})$

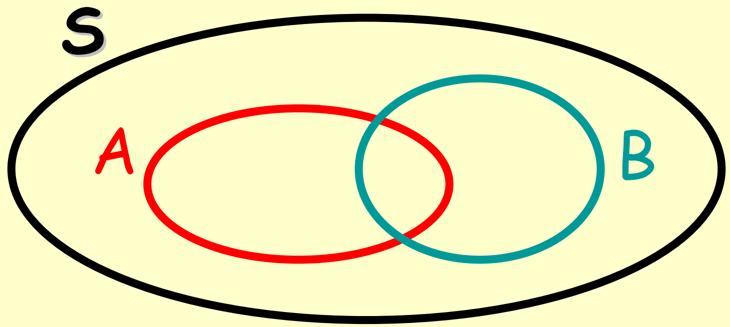


& $\boxed{p(E) \geq 0 \quad \forall E}$

$\Rightarrow$ $p(A) \geq p(B)$

- Per due insiemi A e B qualunque, valgono le seguenti identità:

$$\begin{cases} A = (A \wedge B) \vee (A \wedge \overline{B}) \\ B = (A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge B) \\ A \vee B = (A \wedge B) \vee (A \wedge \overline{B}) \vee (\overline{A} \wedge B) \end{cases}$$



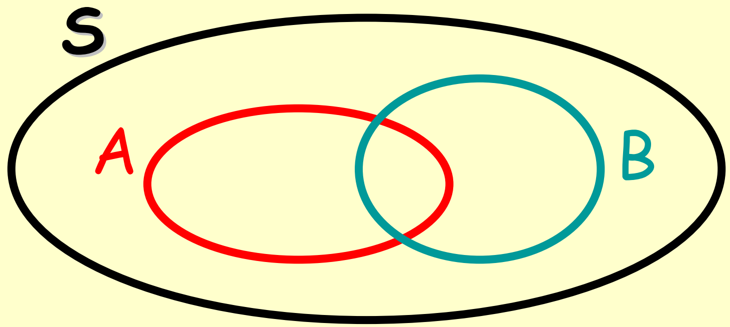
& $\boxed{p(E1 \vee E2 \vee E3 \vee \ldots) = p(E1) + p(E2) + p(E3) + \ldots}$
con a due a due senza alcun elemento in comune

➔ **Legge della probabilità totale** nella sua forma più generale:

$$p(A \vee B) = p(A) + p(B) - p(A \wedge B) \quad \ldots$$

… Infatti:

$$p(A) = \boxed{p(A \wedge B)} + p(A \wedge \overline{B})$$



$$p(B) = p(A \wedge B) + \boxed{p(\overline{A} \wedge B)}$$

$$p(A \vee B) = \boxed{p(A \wedge B)} + p(A \wedge \overline{B}) + \boxed{p(\overline{A} \wedge B)}$$

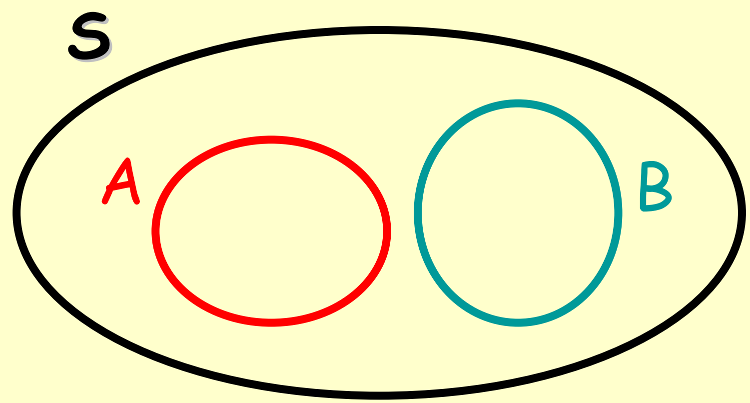
$$p(A \vee B) = [p(A) - \cancel{p(A \wedge \overline{B})}] + \cancel{p(A \wedge \overline{B})} + [p(B) - p(A \wedge B)]$$

$$\boxed{p(A \vee B) = p(A) + p(B) - p(A \wedge B)}$$

CVD

Nel caso particolare di insiemi **A e B disgiunti**, si ottiene per la **probabilità totale** (**$p(A \vee B)$**) , la relazione semplificata:

$$p(A \vee B) = p(A) + p(B)$$



$A \wedge B = \varnothing$

Definisco la **probabilità condizionata** che si verifichi l'evento E nel caso in cui si sia già verificato l'evento A con la simbologia:

$$\boxed{p(E|A) = p(E \wedge A) \,/\, p(A) \qquad \text{con} \qquad p(A) \neq 0}$$

… infatti, **la p(E|A) soddisfa le 3 proprietà base della definizione assiomatica della probabilità**, quindi e' corretto "parlare" di una probabilità per la p(E|A) così definita.

- $p(E \wedge A) \geq 0$ & $p(A) > 0$ ➔ $p(E|A) > 0$

- $S \wedge A = A$ ➔ $p(S|A) = p(S \wedge A) \,/\, p(A) = p(A) \,/\, p(A) = 1$

…

…

- Per insiemi E1, E2, E3, … a due a due disgiunti

➔ $p(\mathbf{E1} \vee \mathbf{E2} \vee \mathbf{E3} \vee \ldots \,|\, \mathbf{A}) =$

$= p((\mathbf{E1} \vee \mathbf{E2} \vee \mathbf{E3} \vee \ldots \mathbf{)} \wedge A) \,/\, p(A) =$

$= [p(E1 \wedge A) + p(E2 \wedge A) + p(E3 \wedge A) + \ldots] \,/\, p(A) =$

$= p(E1 \mid A) + p(E2 \mid A) + p(E3 \mid A) + \ldots$

Tramite la probabilità condizionata, si ricava la
legge della probabilità composta
nella sua forma più generale:

$$\rightarrow p(A \wedge B) = p(A|B)\, p(B) = P(B|A)\, p(A)$$

Nel caso particolare di
eventi casuali statisticamente indipendenti,
cioè tali che il verificarsi o meno dell'uno non alteri la probabilità di presentarsi dell'altro,

$\rightarrow$ $p(A \mid B) = P(A)$ & $p(B \mid A) = p(B)$

$$p(A \wedge B) = p(A)\, p(B)$$