Note sulla Definizione Empirica della Probabilita'

Definizione Empirica della probabilita' (von Mises: 1883-1953)

- **Frequenza relativa** $F(E)$ di un evento casuale E che si presenta un numero di volte $n(E)$, detto **frequenza assoluta**, in un numero totale N di prove:

$$F(E) = n(E) / N$$

- definizione euristica della probabilita' $p(E)$ per l'evento casuale E, come estensione del concetto di frequenza relativa $F(E)$ su di un numero grandissimo N di prove:

$$(n(E) / N) \Rightarrow p(E) \text{ per } N \Rightarrow \infty$$

Esempio: esperimento "complesso" costituito dal verificarsi di 2 eventi simultanei, anziche' da 1 solo evento.

1-mo evento **E**: lancio di 1 moneta

"testa" = E

"croce" = $\overline{E}$

2-do evento **F**: estrazione di 1 carta da un mazzo di carte

"carta rossa" = F

"carta nera" = $\overline{F}$

Effettuo N prove: sono possibili 4 eventi esclusivi

$E\,F$, $E\,\overline{F}$, $\overline{E}\,F$, $\overline{E}\,\overline{F}$

n11, n12, n21, n22

	F	$\overline{F}$
E	n11	n12
$\overline{E}$	n21	n22

Frequenze assolute …

… Frequenza relativa = Frequenza assoluta / N

	F	$\bar{F}$
E	$F(E\,F)$	$F(E\,\bar{F})$
$\bar{E}$	$F(\bar{E}\,F)$	$F(\bar{E}\,\bar{F})$

	F	$\bar{F}$
E	n11/N	n12/N
$\bar{E}$	n21/N	n22/N

$F(E) = F(EF) + F(E\bar{F}) \rightarrow p(E) = p(EF) + p(E\bar{F})$

$F(F) = F(FE) + F(F\bar{E}) \rightarrow p(F) = p(FE) + p(F\bar{E})$

$F(\bar{E}) = F(\bar{E}F) + F(\bar{E}\bar{F}) \rightarrow p(\bar{E}) = p(\bar{E}F) + p(\bar{E}\bar{F})$

$F(\bar{F}) = F(\bar{F}E) + F(\bar{F}\bar{E}) \rightarrow p(\bar{F}) = p(\bar{F}E) + p(\bar{F}\bar{E})$

…

… definizione empirica per l'**evento complesso**

"somma logica degli eventi semplici E e F"

	F	$\overline{F}$
E	n11	n12
$\overline{E}$	n21	n22

Frequenza relativa per l'evento complesso:

$$F(E + F) = (n11 + n12 + n21) / N = [(n11 + n12) + (n11 + n21) - n11] / N =$$

$$= F(E) + F(F) - F(EF) \quad \rightarrow \boxed{p(E + F) = p(E) + p(F) - p(EF)}$$

… se gli eventi E e F sono mutuamente esclusivi: $p(EF) = 0$, $n11=0$

$$\rightarrow \boxed{p(E + F) = p(E) + p(F)}$$

Legge della probabilita' totale

- **Probabilità Condizionata p(E|F)** che si verifichi l'evento E nel caso in cui si sa già che si è verificato l'evento F.

	F	$\bar{F}$
E	n11	n12
$\bar{E}$	n21	n22

$$F(E|F) = \frac{n11}{n11+n21} = \left(\frac{n11}{N}\right)\frac{1}{\left(\frac{n11+n21}{N}\right)} = \frac{F(EF)}{F(F)} \Rightarrow p(E|F) = \frac{p(EF)}{p(F)}$$

- **Probabilità Condizionata p(F|E)** che si verifichi l'evento F nel caso in cui si sa già che si è verificato l'evento E.

	F	$\bar{F}$
E	n11	n12
$\bar{E}$	n21	n22

$$F(F|E) = \frac{n11}{n11+n12} = \left(\frac{n11}{N}\right)\frac{1}{\left(\frac{n11+n12}{N}\right)} = \frac{F(EF)}{F(E)} \Rightarrow p(F|E) = \frac{p(EF)}{p(E)}$$

→ **p(EF) = p(F) p(E|F) = p(E) p(F|E)**

➔ $p(EF) = p(F)\, p(E|F) = p(E)\, p(F|E)$

… nel caso particolare che i **2 eventi** E e F siano **statisticamente indipendenti**: $p(E|F) = p(E)$, $p(F|E) = p(F)$

Quindi,

il verificarsi di uno dei 2 eventi non cambia la probabilità di verificarsi dell'altro evento:

➔ $\boxed{p(EF) = p(E)\, p(F)}$ **Legge della Probabilità composta**

Teorema di Bayes:

Un **1-mo fenomeno casuale** **A** può dare luogo ad **N** eventualità mutuamente esclusive **Aj** che esauriscono la totalità delle possibilità.

Un **2-ndo fenomeno casuale** può condurre o al verificarsi o al non verificarsi di un evento casuale **E**.

Se consideriamo la realizzazione di entrambi questi 2 fenomeni allora se si verifica l'evento E, insieme ad esso si dovrà verificare anche una ed una sola delle eventualità mutuamente esclusive Aj.

➔ $$\boxed{p(A_i \mid E) = \frac{p(A_i)\, p(E \mid A_i)}{\sum_{j=1}^{N} [p(A_j)\, p(E \mid A_j)]}}$$ ...

…

➔ Utilizzo la legge della probabilità totale e quella della probabilità condizionata

$$p(A_i \mid E) = \frac{p(A_i)\ p(E \mid A_i)}{p(E)}$$

$$p(E) = \sum_{j=1}^{N} p(EA_j) = \sum_{j=1}^{N} [\,p(A_j)\ p(E \mid A_j)\,]$$

$$\Rightarrow \boxed{p(A_i \mid E) = \frac{p(A_i)\ p(E \mid A_i)}{\sum_{j=1}^{N} [\,p(A_j)\ p(E \mid A_j)\,]}}$$

CVD

... esempio di utilizzo del teorema di Bayes

- Ho 2 monete:

1 moneta "buona" che ha pari probabilità di dare testa o di dare croce (= 0.5);

1 moneta "cattiva" con 2 teste sulle 2 facce;

... Se scelgo una delle 2 monete:

ho 2 eventualità mutuamente esclusive

A1: scelgo la moneta "buona"

A2: " " " "cattiva"

con probabilità: **p(A1) = p(A2) = 0.5**

... se l'evento casuale E consiste nell'uscita di 1 testa, allora:

p(E|A1) = 0.5 e **p(E|A2) = 1**

... ora faccio l'esperimento di lanciare la moneta 1 volta ottenendo testa, **qual'e' la probabilità che nella scelta iniziale io abbia scelto la moneta "buona"?**

$$p(A_1 \mid E) = \frac{p(A_1)\ p(E \mid A_1)}{\sum_{j=1}^{N} [p(A_j)\ p(E \mid A_j)} = \frac{p(A_1)p(E \mid A_1)}{p(A_1)p(E \mid A_1) + p(A_2)p(E \mid A_2)} = \frac{0.5x0.5}{0.5x0.5 + 0.5x1} = \frac{0.25}{0.75} = \frac{1}{3}$$

… ora faccio l'esperimento di lanciare la moneta 1 volta ottenendo testa, **qual'e' la probabilità che nella scelta iniziale io abbia scelto la moneta "truccata"?**

$$p(A_2 \mid E) = \frac{p(A_2)\, p(E \mid A_2)}{\sum_{j=1}^{N} [p(A_j)\, p(E \mid A_j)} = \frac{p(A_2) p(E \mid A_2)}{p(A_1) p(E \mid A_1) + p(A_2) p(E \mid A_2)} = \frac{0.5x1}{0.5x0.5 + 0.5x1} = \frac{0.5}{0.75} = \frac{2}{3}$$

(~67%)

… **lancio la moneta** non 1 volta soltanto, ma **N volte**…

… **se** ottengo almeno 1 croce su N lanci, posso concludere che la moneta era "**buona**" (evento A1);

… **se non ottengo mai croce su N lanci indipendenti tra loro:**
p(E|A1) = 1 / 2^N e p(E|A2) = 1

➔ p(A1|E) = 1 / (1 + 2^N) A1: scelgo la moneta "buona"

$$p(A_1 \mid E) = \frac{p(A_1)p(E \mid A_1)}{p(A_1)p(E \mid A_1) + p(A_2)p(E \mid A_2)} = \frac{(1/2)x(1/2^N)}{(1/2)x(1/2^N) + (1/2)x1} = \frac{(1/2^N)}{(1/2^N)+1} = \frac{1}{(2^N+1)}$$

➔p(A2|E) = 2^N / (1 + 2^N) A2: scelgo la moneta "cattiva"

$$p(A_2 \mid E) = \frac{p(A_2)p(E \mid A_2)}{p(A_1)p(E \mid A_1) + p(A_2)p(E \mid A_2)} = \frac{(1/2)x1}{(1/2)x(1/2^N) + (1/2)x1} = \frac{1}{(1/2^N)+1} = \frac{2^N}{(2^N+1)}$$