CALCOLO E BIOSTATISTICA

A.A. 2023/2024 – Prof. C. Presilla

Prova A2 – 8 febbraio 2024

COGNOME	
NOME	
MATRICOLA	

esercizio	1	2	3	4	5	6
voto						

penalità				

1 Determinare i coefficienti a e b affinché la curva di equazione $y = a\sin^2(x) + b\sin(x) - 5/2$ abbia un flesso nel punto $(\pi/6, 0)$. Calcolare quindi l'area della regione limitata dalla curva, dall'asse x e dalle rette $x = \pi/6$ e $x = 5\pi/6$.

[punteggio 5]

Affinché la curva abbia un flesso in $(\pi/6, 0)$ deve passare per questo punto e qui avere derivata seconda nulla.

$$0 = a\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) + b\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - \frac{5}{2} = \frac{a}{4} + \frac{b}{2} - \frac{5}{2}$$

$$y' = 2a\sin(x)\cos(x) + b\cos(x)$$

$$y'' = 2a\cos(2x) - b\sin(x)$$

$$0 = 2a\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - b\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = a - \frac{b}{2}$$

$$\begin{cases} \frac{a}{4} + \frac{b}{2} = \frac{5}{2} \\ a - \frac{b}{2} = 0 \end{cases} \qquad \frac{5}{4}a = \frac{5}{2} \qquad \begin{aligned} a &= 2 \\ b &= 4 \end{aligned}$$

$$\text{area} = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} \left(a\sin^2(x) + b\sin(x) - \frac{5}{2}\right) dx$$

$$= \frac{a}{2}\left(x - \sin(x)\cos(x)\right) - b\cos(x) - \frac{5}{2}x \Big|_{\pi/6}^{5\pi/6}$$

$$= a\left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{3}\right) + b\sqrt{3} - \frac{5}{3}\pi = \frac{9}{2}\sqrt{3} - \pi$$

2 Determinare l'integrale indefinito

$$\int \frac{x^3+1}{x^2+3}dx.$$

[punteggio 6]

Riduciamo la funzione integranda a una frazione propria più un polinomio

$$\begin{array}{l|l} x^3+1 & x^2+3 \\ \hline x^3+3x & x \\ \hline \quad -3x+1 & \end{array}$$

$$x^3+1 = (x^2+3)\,x + (-3x+1)$$

$$\int \frac{x^3+1}{x^2+3}\,dx = \int x\,dx - \int \frac{3x}{x^2+3}\,dx + \int \frac{1}{x^2+3}\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2+3} + \int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\,\frac{dx}{\sqrt{3}}\,\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}\ln(x^2+3) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right) + C$$

3 Risolvere l'equazione differenziale

$$\frac{dy(x)}{dx} + xy(x) = y(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

[punteggio 6]

Riscritta come $\frac{dy(x)}{dx} = y(x)(1-x)$

l'equazione è a variabili separabili.

Assumendo $y(x) \neq 0$ abbiamo infatti

$$\frac{dy}{y} = (1-x)\,dx$$

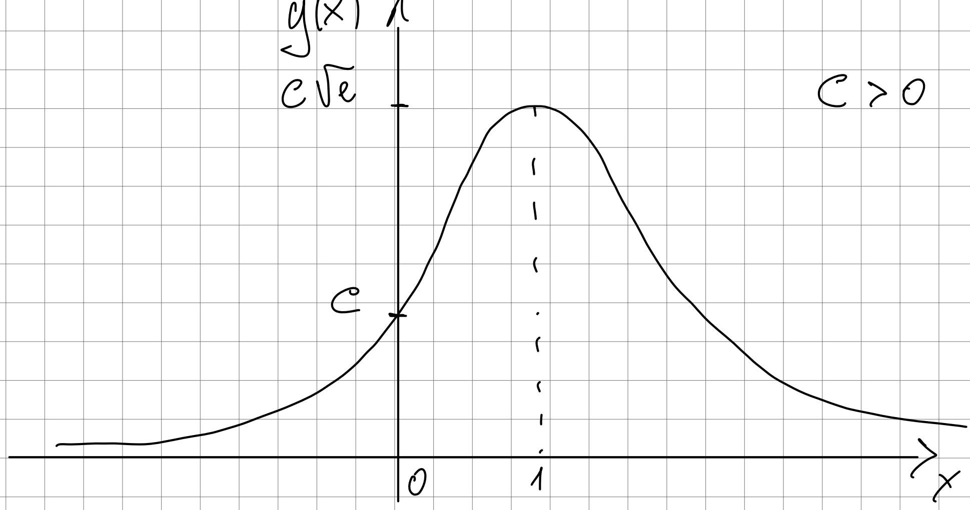
che integrata dà

$$\ln|y(x)| = x - \frac{x^2}{2} + c_1$$

esponenziando

$$y(x) = \pm e^{c_1} e^{x - \frac{x^2}{2}} = c\, e^{x-\frac{x^2}{2}}$$

Si osservi che la costante $c = \pm e^{c_1}$ può essere positiva o negativa ma $c \neq 0$, pertanto $y(x) \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ come assunto



3 Risolvere l'equazione differenziale

$$\frac{dy(x)}{dx} + xy(x) = y(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

[punteggio 6]

Riscritta come $\frac{dy(x)}{dx} + y(x)(x-1) = 0$

l'equazione ammette $e^{A(x)}$, con

$A'(x) = x-1$, come fattore integrante.

$$A(x) = \int A'(x)\,dx = \frac{x^2}{2} - x + C_1$$

$$e^{A(x)} y'(x) + e^{A(x)} A'(x)\, y(x) = e^{A(x)}\, 0$$

Segue che $\frac{d}{dx}\left(e^{A(x)} y(x)\right) = 0$

Integrando membro a membro troviamo

$$e^{A(x)} y(x) = C_2$$

$$\begin{aligned} y(x) &= C_2 e^{-A(x)} \\ &= C_2 e^{x - \frac{x^2}{2}} e^{-C_1} \\ &= C\, e^{x - \frac{x^2}{2}} \end{aligned}$$

avendo posto $C = C_2 e^{-C_1}$

Si osservi che $C_2 \neq 0$, altrimenti $y(x) \equiv 0$ banalmente, e quindi $C \neq 0$. Segue che $y(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

4 La Drosophila è un insetto che può avere occhi rossi o bianchi. In una popolazione di 200 esemplari il 90% delle femmine ha occhi rossi e il 60% dei maschi ha occhi bianchi. Se i maschi sono 80, calcolare la probabilità che un esemplare con occhi rossi sia maschio.

[punteggio 6]

Consideriamo i seguenti eventi

$M = \{\text{esemplare maschio}\}$ $F = \{\text{esemplare femmina}\}$

$R = \{\text{esemplare con occhi rossi}\}$ $\Omega = \{\text{esemplari}\}$

$$P(M|R) = \frac{P(M\cap R)}{P(R)} = \frac{|M\cap R|/|\Omega|}{|R|/|\Omega|} = \frac{|M\cap R|}{|R|}$$

$$|M\cap R| = 80\,\frac{40}{100} = 32$$

$$|R| = 120\,\frac{90}{100} + 80\,\frac{40}{100} = 108 + 32 = 140$$

Concludiamo $P(M|R) = \frac{32}{140} = \frac{8}{35} \simeq 0.228$

Alternativamente possiamo usare Bayes

$$P(M|R) = \frac{P(R|M)\,P(M)}{P(R|F)\,P(F) + P(R|M)\,P(M)}$$

$P(M) = \frac{80}{200}$ $P(F) = \frac{120}{200}$ $P(R|M) = \frac{40}{100}$ $P(R|F) = \frac{90}{100}$

Pertanto $P(R) = P(R|F)\,P(F) + P(R|M)\,P(M)$

$$= \frac{90}{100}\,\frac{120}{200} + \frac{40}{100}\,\frac{80}{200}$$

$$= 0.54 + 0.16 = 0.7$$

Segue $P(M|R) = \frac{0.4\cdot 0.4}{0.7} = \frac{8}{35} = 0.228$

5 Si lancino 5 dadi onesti. Calcolare la probabilità di ottenere almeno due dadi con facce pari.

[punteggio 5]

Dobbiamo calcolare la probabilità dell'evento

$A = \{$ almeno due dei cinque dadi mostrano facce pari $\}$

Conviene calcolare la probabilità dell'evento complementare $A^c = B_0 \cup B_1$

$B_0 = \{$ nessuno dei cinque dadi mostra facce pari $\}$

$B_1 = \{$ uno solo dei cinque dadi mostra facce pari $\}$

La probabilità che il lancio di un dado fornisca una faccia pari è $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Dalla distribuzione binomiale otteniamo

$$P(B_0) = \binom{5}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(1-\frac{1}{2}\right)^{5-0} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$$

$$P(B_1) = \binom{5}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(1-\frac{1}{2}\right)^{5-1} = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^4} = \frac{5}{32}$$

Poiché $B_0 \cap B_1 = \emptyset$ concludiamo

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(A^c) \\ &= 1 - \left(P(B_0) + P(B_1)\right) \\ &= 1 - \left(\frac{1}{32} + \frac{5}{32}\right) \\ &= 1 - \frac{6}{32} = \frac{26}{32} = \frac{13}{16} \end{aligned}$$

6 Un aerosol è composto da particelle approssimabili a sfere di diametro variabile con valore uniformemente distribuito tra 1 e 3 μm. Calcolare il volume medio di queste particelle e la relativa deviazione standard.

[punteggio 5]

Il raggio R delle particelle è una variabile aleatoria con distribuzione uniforme in $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$

Detto $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ il volume di una particella, si ha

$$E(V) = \int_{\frac{1}{2}}^{3/2} \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{1}{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}\, dr$$

$$= \frac{\pi}{3} r^4 \Big|_{1/2}^{3/2} = \frac{\pi}{3}\left(\frac{81}{16} - \frac{1}{16}\right)$$

$$= \frac{5}{3}\pi \ \mu m^3$$

Inoltre

$$E(V^2) = \int_{1/2}^{3/2} \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)^2 \frac{1}{3/2 - 1/2}\, dr$$

$$= \frac{16}{9}\pi^2 \frac{r^7}{7}\Big|_{1/2}^{3/2} = \frac{16\pi^2}{63} \frac{3^7 - 1}{2^7} = \frac{1093}{252}\pi^2$$

La deviazione standard è quindi

$$\sqrt{\mathrm{var}(V)} = \sqrt{E(V^2) - (E(V))^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1093}{252}\pi^2 - \frac{25}{9}\pi^2}$$

$$= \pi\sqrt{\frac{1093 - 700}{252}}$$

$$= \pi\sqrt{\frac{393}{252}} = \pi\sqrt{\frac{131}{84}} \simeq 3.92 \ \mu m$$