CALCOLO E BIOSTATISTICA

A.A. 2023/2024 – Prof. C. Presilla

Prova A1 – 23 gennaio 2024

COGNOME	
NOME	
MATRICOLA	

esercizio	1	2	3	4	5	6
voto						

penalità				

1 Risolvere l'equazione differenziale

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{y(x)}{x} - x^3, \qquad x \geq 1, \qquad y(1) = 0.$$

[punteggio 5]

Si tratta di una equazione della forma

$$\frac{dy(x)}{dx} + a(x)\,y(x) = b(x), \qquad a(x) = -\frac{1}{x} \qquad b(x) = -x^3$$

con $a(x)$ continua e $b(x)$ derivabile, risolubile mediante fattore integrante.

Posto $A(x)$ tale che $A'(x) = a(x)$ $\qquad A(x) = -\ln x$

moltiplicando per $e^{A(x)} = \frac{1}{x}$

$$e^{A(x)} \frac{dy(x)}{dx} + e^{A(x)} A'(x)\,y(x) = \frac{d}{dx}\left(e^{A(x)} y(x)\right)$$
$$= e^{A(x)} b(x)$$

Integrando in $[1, x]$

$$e^{A(x)} y(x) - e^{A(1)} y(1) = \int_1^x \frac{1}{u}(-u^3)\,du = -\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}$$

$$y(x) = \frac{1}{3}\left(x - x^4\right)$$

2 Risolvere i seguenti quattro sistemi di equazioni:

$$\text{a)}\ \begin{cases} 3x+5y=1 \\ 4x+7y=2 \end{cases},\quad \text{b)}\ \begin{cases} 3x+5y=0 \\ 4x+7y=4 \end{cases},\quad \text{c)}\ \begin{cases} 3x+5y=7 \\ 4x+7y=1 \end{cases},\quad \text{d)}\ \begin{cases} 3x+5y=3 \\ 4x+7y=3 \end{cases}.$$

[punteggio 6]

Si tratta di 4 sistemi della forma

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad \text{con } A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Poiché $\det A = 21 - 20 = 1 \neq 0$ A è invertibile

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

e la soluzione di ogni sistema è $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

a) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ 12 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 \\ -25 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

3 Si consideri la funzione

$$f(x) = \gamma e^x \sin(e^x - 1), \qquad \gamma \in \mathbb{R},$$

nel dominio $D = [0, \ln(1+\pi)]$. Determinare:
a) il valore di γ per cui $f(x)$ può essere considerata una PDF (funzione di densità di probabilità);
b) il valore della corrispondente CDF (funzione di distribuzione cumulativa).

[punteggio 6]

Affinché $f(x)$ sia una PDF deve aversi $f(x) \geq 0$ e e $\int_D f(x)\,dx = 1$. Per $x \in D$ si ha $1 \leq e^x \leq 1+\pi$ e quindi $\sin(e^x - 1) \geq 0$. Segue $f \geq 0$ per $\gamma > 0$.

$$1 = \int_0^{\ln(1+\pi)} \gamma e^x \sin(e^x - 1)\,dx \qquad e^x - 1 = u$$

$$= \int_0^{\pi} \gamma \sin(u)\,du \qquad du = e^x dx$$

$$= \gamma \cos(u) \Big|_{\pi}^{0} = 2\gamma \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{1}{2}$$

Si osservi che f è continua in D quindi $\exists\, F(x)$ tale che $F'(x) = f(x)$; $F(x)$ è la CDF cercata. Per $x \in [0, \ln(1+\pi)]$ si ha

$$F(x) = \int_0^x f(y)\,dy = \int_0^x \frac{1}{2} e^y \sin(e^y - 1)\,dy$$

$$= \int_0^{e^x - 1} \frac{1}{2} \sin(u)\,du \qquad e^y - 1 = u, \quad du = e^y dy$$

$$= \frac{1}{2} \cos(u) \Big|_{e^x - 1}^{0}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \cos(e^x - 1)\right)$$

4 Siano $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n variabili aleatorie ciascuna con distribuzione uniforme in $(0,1)$ e sia $X = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Determinare:
a) la probabilità $P(X > x)$;
b) il valore di $\lim_{n\to\infty} P(X > x/n)$.

[punteggio 5]

Se $X = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n) > x$ allora
$X_j > x \quad j = 1, 2, \ldots, n$

Le n variabili aleatorie sono i.i.d e risulta

$$P(X_j > x) = (1 - x) \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

Quindi $P(X > x) = \prod_{j=1}^{n} P(X_j > x) = (1-x)^n$

$$\lim_{n\to\infty} P\left(X > \frac{x}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \qquad 0^{\infty}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \exp\left[n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)\right]$$

$$= \exp\left[\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\right] \qquad \frac{0}{0}$$

$$= \exp\left[\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{1-\frac{x}{n}}\left(+\frac{x}{n^2}\right)}{-\frac{1}{n^2}}\right] \qquad \text{de l'Hopital}$$

$$= \exp\left[\lim_{n\to\infty} \frac{-x}{1 - \frac{x}{n}}\right]$$

$$= e^{-x}$$

5 Si consideri un mazzo di carte da gioco francesi (4 semi con 13 carte di valore diverso per ogni seme, per un totale di 52 carte). Determinare la probabilità di servire una mano di 5 carte contenente una coppia e un tris.

[punteggio 6]

Lo spazio campionario Ω ha dimensione

$$|\Omega| = \binom{52}{5} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 52 \cdot 51 \cdot 10 \cdot 49 \cdot 2$$

Consideriamo l'evento $\Omega \supset A = \{1 \text{ coppia} + 1 \text{ tris}\}$

Ovviamente il valore della coppia è diverso dal valore del tris (non esisto 5 carte con lo stesso valore)

$\binom{13}{1}$ # differenti valori per la coppia

$\binom{4}{2}$ # differenti semi per la coppia

$\binom{12}{1}$ # differenti valori per il tris

$\binom{4}{3}$ # differenti semi per il tris

$$|A| = \binom{13}{1}\binom{4}{2}\binom{12}{1}\binom{4}{3} = 13 \cdot 6 \cdot 12 \cdot 4$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\cancel{13} \cdot 12 \cdot 6 \cdot \cancel{4}}{\cancel{52} \cdot 51 \cdot 10 \cdot 49 \cdot 2}$$

$$= \frac{12}{17 \cdot 10 \cdot 49}$$

$$= \frac{6}{17 \cdot 5 \cdot 49} = \frac{6}{85 \cdot 49} \simeq 0.00144$$

$$\simeq \frac{1}{694}$$

6 Un'agenzia spaziale esclude dai corsi per diventare astronauti persone con altezza superiore a 193 cm o inferiore a 148 cm. Le altezze delle popolazioni maschile (M) e femminile (F) sono approssimabili con distribuzioni normali, di media 175 cm e deviazione standard 7 cm per i maschi e di media 162 cm e deviazione standard 6 cm per le femmine. Calcolare le percentuali delle popolazioni M e F escluse dal programma di addestramento.
Approssimare tutti i calcoli a due cifre decimali, esempio $0.998 \simeq 1.00$, $0.989 \simeq 0.99$.

[punteggio 5]

Detta X la variabile aleatoria normale che rappresenta l'altezza nelle due popolazioni M e F occorre calcolare il complemento a 1 di

$$P(148 < X < 193) = P(X < 193) - P(X < 148)$$

Detta $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ la v. a. normale standard si ha

M $$P(148 < X < 193) = P\left(Z < \frac{193-175}{7}\right) - P\left(Z < \frac{148-175}{7}\right)$$

$$= P(Z < 18/7) - P(Z < -27/7)$$

$$\simeq P(Z < 2,57) - (1 - P(Z < 3,85))$$

$$= F(2,57) + F(3,85) - 1$$

$$\simeq 0.99 + 1.00 - 1 = 0.99$$

F $$P(148 < X < 193) = P\left(Z < \frac{193-162}{6}\right) - P\left(Z < \frac{148-162}{6}\right)$$

$$= P(Z < 31/6) - P(Z < -14/6)$$

$$\simeq P(Z < 5.16) - (1 - P(Z < 2,33))$$

$$= F(5.16) - (1 - F(2,33))$$

$$\simeq 1.00 + 0.99 - 1 = 0.99$$

In entrambi i casi è escluso l'1% della popolazione

B Table of the Standard Normal Distribution

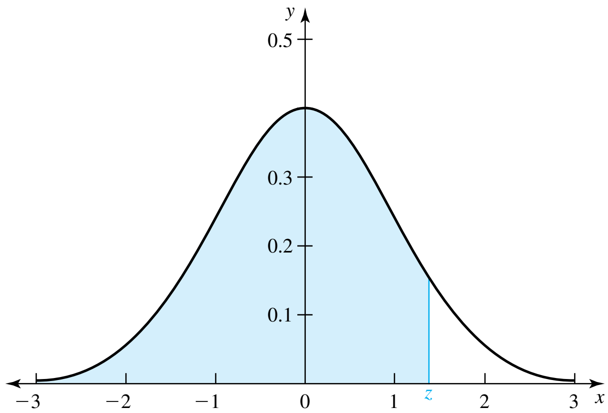

Figure B.1 Areas under the standard normal curve from $-\infty$ to z.

z	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5754
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7258	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7518	.7549
0.7	.7580	.7612	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7996	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986