MATEMATICA

(1)

- Funzioni
  - ad 1 o più variabili
  - ad 1 o più valori
  - pari, dispari
  - periodica

- Limiti
  - $\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$
  - $\lim_{x \to a} h f(x) = h \lim_{x \to a} f(x)$
  - $\lim_{x \to a} f \cdot g = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$
  - $\lim_{x \to a} f/g = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$ $(\neq 0)$

- funzioni continue

- infinitesimi, infiniti
  - ordine

- derivata
  - significato geometrico : $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \tan \theta(x)$
  - differenziale $df = f'(x)\, dx$
  - derivate di ordine superiore

- $(f+g)' = f' + g'$

- $(fg)' = f'g + fg'$

- $(f/g)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

- $f(g(x))' = \dfrac{df}{dg}\dfrac{dg}{dx} = \dfrac{df}{dx}$

- esempi notevoli

  $f(x) = x^n \qquad f'(x) = \lim_{y \to x} \dfrac{y^n - x^n}{y - x} =$

  $= \lim_{y \to x} y^{n-1} + y^{n-2}x + \dots + yx^{n-2} + x^{n-1}$

  $= n x^{n-1}$

- derivate parziali

  - indipendenza dell'ordine di derivazione per funz buone

  - differenziale totale $df = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$

- serie

  - definizione : $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{N \to \infty} S_N \qquad S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$

  - sviluppo di Taylor : $f(x + \Delta x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!} f^{(n)}(x) \Delta x^n$

  - esempi notevoli :

    $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

    $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$

    $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$

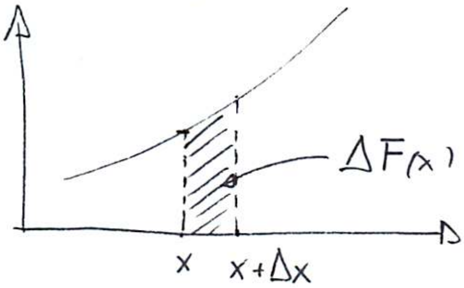
    $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$

- integrali

  - $F(x) = \int f(x)\,dx \qquad F'(x) = f(x)$

  - integrale definito : $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

  - significato geometrico



$\Delta F(x) \qquad f(x)\Delta x \leq \Delta F(x) \leq f(x+\Delta x)\Delta x$

  - casi notevoli

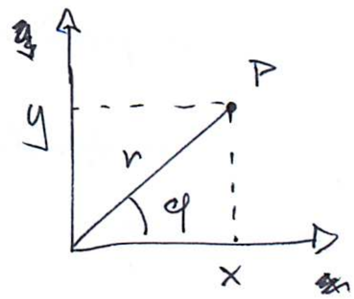
  - $\int c\, f(x)\,dx = c \int f(x)\,dx$

  - $\int (f + g)\,dx = \int f\,dx + \int g\,dx$

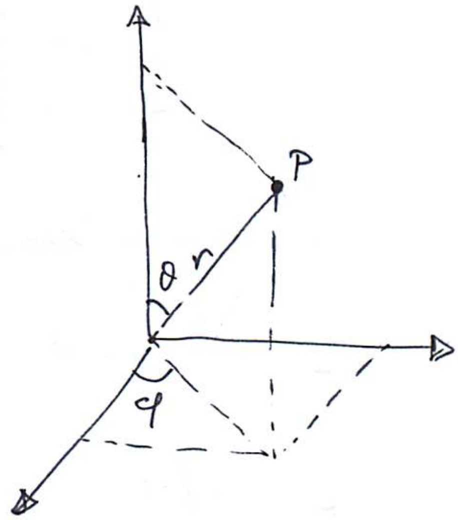
- riferimenti cartesiani 2D e 3D

- riferimenti polari 2D 3D

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = r\sin\vartheta\cos\varphi \\ y = r\sin\vartheta\sin\varphi \\ z = r\cos\vartheta \end{cases}$$



- grandezze scalari e vettoriali

- definizione di vettore mediante legge di trasformazione

- versore;

- vettore applicato : campo vettoriale

- algebra vettoriale
  - definizione di uguaglianza
  - " " opposto
  - " " somma
  - prodotto di un vettore per uno scalare
  - proprietà:

commutativa $\underline{A} + \underline{B} = \underline{B} + \underline{A}$

associativa somma vett $\underline{A} + (\underline{B} + \underline{C}) = (\underline{A} + \underline{B}) + \underline{C}$

commutativa scalare $m\,\underline{A} = \underline{A}\,m$

associativa ~~somma~~ scalare $(m\,n)\,\underline{A} = m\,(n\underline{A}) = (m\underline{A})\,n$

distributiva

$(m+n)\,\underline{A} = m\underline{A} + n\underline{A}$

$m\,(\underline{A} + \underline{B}) = m\underline{A} + m\underline{B}$

- proiezione di un vettore su una retta
  - ~~compo~~ decomposizione di un vettore secondo gli assi coordinati : versori $\hat{i}, \hat{j}$ e $\hat{k}$

- prodotto scalare : $\underline{A} \cdot \underline{B} = A \cdot B \cos\theta$
  - $\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{B} \cdot \underline{A}$
  - $\underline{A} \cdot (\underline{B} + \underline{C}) = \underline{A} \cdot \underline{B} + \underline{A} \cdot \underline{C}$
  - $m(\underline{A} \cdot \underline{B}) = (m\underline{A}) \cdot \underline{B} = \underline{A} \cdot (m\underline{B}) = (\underline{A} \cdot \underline{B})m$
  - $\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$
  - $\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} = 0$
  - $\underline{A} \cdot \underline{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$
  - se $A \neq 0$ e $B \neq 0$ $\quad \underline{A} \cdot \underline{B} = 0 \Rightarrow \hat{A} \perp \hat{B}$

- prodotto vettoriale : $\underline{A} \times \underline{B} = \underline{C} \qquad C = AB \sin\theta$
  - regola della mano destra
  - $\underline{A} \times \underline{B} = - \underline{B} \times \underline{A}$
  - $\underline{A} \times (\underline{B} + \underline{C}) = -\underline{A} \times \underline{B} + \underline{A} \times \underline{C}$
  - $m(\underline{A} \times \underline{B}) = (m\underline{A}) \times \underline{B} = \underline{A} \times (m\underline{B}) = (\underline{A} \times \underline{B})m$
  - $\underline{A} \times \underline{A} = 0 \qquad \hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$
  - $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} \qquad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} \qquad \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$
  - $\underline{A} \times \underline{B} = \hat{i}(A_y B_z - A_z B_y) + \hat{j}(A_z B_x - A_x B_z) + \hat{k}(A_x B_y - A_y B_x)$
  - se $A \neq 0$ e $B \neq 0$ $\quad \underline{A} \times \underline{B} = 0 \Rightarrow \hat{A} \parallel \hat{B}$
  - $\underline{A} \times \underline{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$

- derivata di un vettore

se $\underline{A} = \underline{A}(u)$

$$\frac{d\underline{A}}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\bar{A}(u+\Delta u) - \bar{A}(u)}{\Delta u}$$

$$= \hat{i}\,\frac{dA_x}{du} + \hat{j}\,\frac{dA_y}{du} + \hat{u}\,\frac{dA_z}{du}$$

- integrale di un vettore

$$\int \underline{A}(u)\,du = \underline{B}(u) + \underline{C} =$$

$$= \hat{i}\int A_x(u)\,du + \hat{j}\int A_y(u)\,du + \hat{u}\int A_z(u)\,du$$

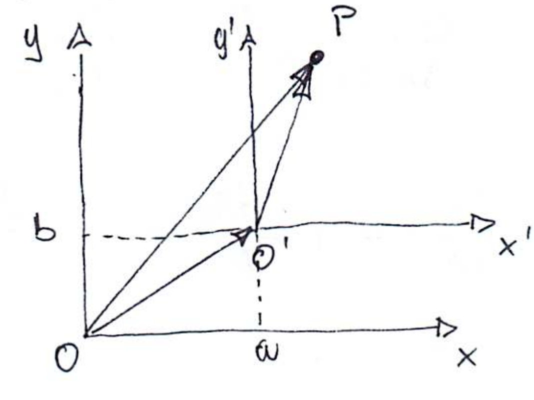
$$\int_{u_0}^{u_1} \underline{A}(u)\,du = \underline{B}(u_1) - B(u_0)$$

- cambiamento del sistema di riferimento

2D

- traslazioni

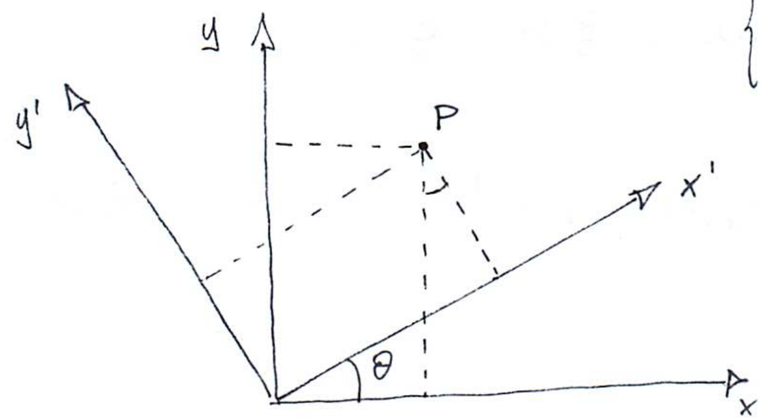
$$\overline{OP} = \overline{OO'} + \overline{O'P}$$



$$\begin{cases} x' = x - \cancel{t_x}\, a \\ y' = y - \cancel{t_y}\, b \end{cases}$$

- rotazioni

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases}$$



$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

- rototraslazione

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta + a \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta + b \end{cases}$$

matrice ortogonale

forma matriciale $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

3D

– rototraslazione = rotazione + traslazione

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \widehat{x'x} & \cos \widehat{x'y} & \cos \widehat{x'z} \\ \cos \widehat{y'x} & \cos \widehat{y'y} & \cos \widehat{y'z} \\ \cos \widehat{z'x} & \cos \widehat{z'y} & \cos \widehat{z'z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$$

rotazione generale = prodotto di 3 rotazioni elementari =
= 3 gradi di libertà (angoli di Eulero).

• invarianza ~~degli scalari~~ del prodotto scalare rispetto al cambiamento del sistema di riferimento

$\underline{v}' \cdot \underline{v}' = \underline{v} \cdot \underline{v}$ $\qquad$ $v'_i = \sum_j A_{ij} v_j$

$\Downarrow$

la matrice A è ortogonale (cioè $A^t A = A A^t = 1$ $\quad (A^t)_{ij} = A_{ji}$)

$$\underline{v}' \cdot \underline{v}' = \sum_i v'_i v'_i = \sum_i \sum_j \sum_k A_{ij} v_j A_{ik} v_k = \sum_k \sum_j \left(\sum_i A^t_{ji} A_{ik} \right) v_j v_k =$$

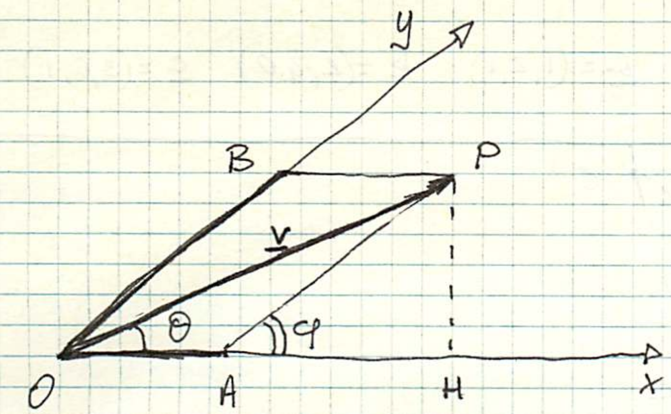
$$= \underline{v} \cdot \underline{v} = \sum_k v_k v_k \quad \Rightarrow \quad \sum_i A^t_{ji} A_{ik} = \delta_{jk} \qquad A^t A = 1$$

- inversione spaziale : parità

  - vettori veri e assiali : $\underline{r}$ $\quad$ $\underline{r}_1 \times \underline{r}_2$

    $\underline{v}$ $\quad$ $\underline{v} \times \underline{r}$

Due semirette orientate Ox e Oy formano tra loro un angolo φ. Un vettore di modulo v forma un angolo θ con l'asse x. Trovare le componenti di $\underline{v}$ lungo gli assi x e y.



Per definizione risulta $v_x = OA$ $\qquad v_y = OB = AP$

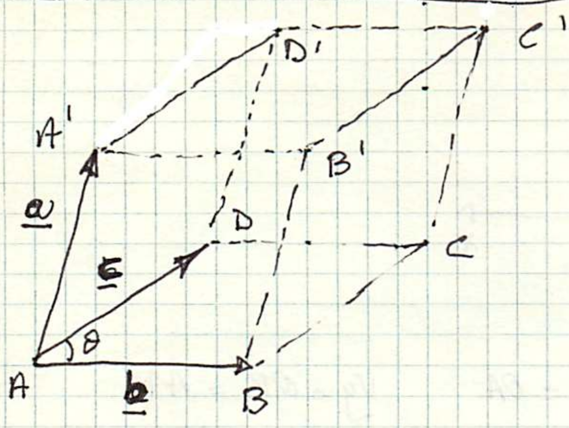
$$PH = v \sin\theta$$

$$v_x = OA = OH - AH = OP\cos\theta - \frac{PH}{\tan\varphi} =$$

$$= v\cos\theta - \frac{v\sin\theta}{\tan\varphi} = v\left(\cos\theta - \frac{\sin\theta}{\tan\varphi}\right)$$

$$v_y = AP = \frac{PH}{\sin\varphi} = v\,\frac{\sin\theta}{\sin\varphi}$$

Tre vettori $\underline{a}$, $\underline{b}$ e $\underline{c}$ hanno componenti $\underline{a} = (a_x, a_y, a_z)$ $\underline{b} = (b_x, b_y, b_z)$ $\underline{c} = (c_x, c_y, c_z)$. Provare che $\left|\underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c})\right|$ è il volume del parallelepipedo avente come spigoli i 3 vettori ed esprimere tale prodotto mediante le componenti cartesiane. Calcolare il prodotto nel caso particolare $\underline{a} = (1,2,1)$ $\underline{b} = (2,4,0)$ $\underline{c} = (3,6,1)$



$$\left|\underline{b} \times \underline{c}\right| = |\underline{b}|\ |\underline{c}|\ |\sin\theta| = \text{area di } ABCD$$

se φ è l'angolo che $\underline{a}$ forma con la perpendicolare al piano di $\underline{b}$ e $\underline{c}$

l'area del parallelepipedo è $|\underline{b}|\,|\underline{c}|\,|\sin\theta| \cdot |\underline{a}|\,|\cos\varphi| =$

$$= \left|\underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c})\right|$$

$$\underline{a} \cdot (\underline{b} \times \underline{c}) = (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \cdot \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} =$$

$$= a_x (b_y c_z - b_z c_y) - a_y (b_x c_z - b_z c_x) + a_z (b_x c_y - b_y c_x)$$

nel caso particolare

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 + 1 \cdot (12 - 12) = 0$$

infatti i 3 vettori giacciono in uno stesso piano

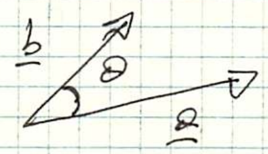
Dati i vettori $\underline{a}$ e $\underline{b}$ e definiti $\underline{c} = \underline{a} + \underline{b}$ e $\underline{d} = \underline{a} - \underline{b}$

provare che $|\underline{c}| \leq |\underline{a}| + |\underline{b}|$ e $|\underline{d}| \geq \big||\underline{a}| - |\underline{b}|\big|$

(proprietà triangolare)

$$|\underline{c}|^2 = \underline{c} \cdot \underline{c} = (\underline{a} + \underline{b}) \cdot (\underline{a} + \underline{b}) = |\underline{a}|^2 + |\underline{b}|^2 + 2|\underline{a}||\underline{b}| \cos\theta$$

essendo θ l'angolo tra $\underline{a}$ e $\underline{b}$



$$\left(|\underline{a}| + |\underline{b}|\right)^2 = |\underline{a}|^2 + |\underline{b}|^2 + 2|\underline{a}|\,|\underline{b}|$$

essendo $\cos\theta \leq 1$ $\Rightarrow$ $|\underline{a} + \underline{b}| \leq |\underline{a}| + |\underline{b}|$

il segno = vale solo per $\theta = 0$ (vettori paralleli)

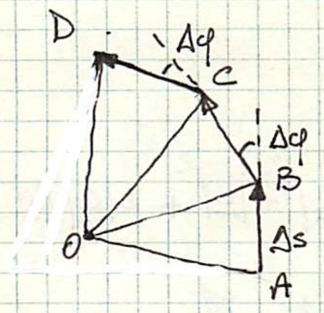
$$|\underline{d}|^2 = \underline{d} \cdot \underline{d} = (\underline{a} - \underline{b}) \cdot (\underline{a} - \underline{b}) = |\underline{a}|^2 + |\underline{b}|^2 - 2|\underline{a}|\,|\underline{b}| \cos\theta$$

$$\left(|\underline{a}| - |\underline{b}|\right)^2 = |\underline{a}|^2 + |\underline{b}|^2 - 2|\underline{a}|\,|\underline{b}|$$ essendo $\cos\theta \leq 1$

$$|\underline{a} - \underline{b}|^2 \geq \left(|\underline{a}| - |\underline{b}|\right)^2 \Rightarrow |\underline{a} - \underline{b}| \geq \big||\underline{a}| - |\underline{b}|\big|$$

anche in questo caso l'uguaglianza vale solo per $\theta = 0$

N vettori ciascuno di modulo Δs e formante un angolo $\Delta\varphi$ con il precedente vengono sommati. Trovare il vettore somma $\underline{S}$ e discutere sotto quali condizioni $\underline{S}$ si annulla.



i punti $A\,B\,C\,D\ldots$ estremi dei vettori giacciono su una circonferenza di centro O di raggio $r = OA = OB = OC = \ldots$

I triangoli AOB, BOC, $COD, \ldots$ sono isosceli:

$$O\hat{A}B = O\hat{B}A = \frac{\pi - \Delta\varphi}{2}$$

$$B\hat{O}A = \pi - \left(O\hat{A}B + O\hat{B}A\right) = \pi - \pi + \Delta\varphi = \Delta\varphi$$

$$\Delta s = 2 \quad r \sin\frac{\Delta\varphi}{2}$$

Detto Z l'estremo libero dell'Nsimo vettore:

$$A\hat{O}Z = N\,\Delta\varphi \qquad S = 2\,r \sin\frac{N\Delta\varphi}{2}$$

$$S = \Delta s \, \frac{\sin\frac{N\Delta\varphi}{2}}{\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}$$

S si annulla se $\sin\left(\frac{N\Delta\varphi}{2}\right) = 0 \qquad \frac{N\Delta\varphi}{2} = k\pi \quad k = 0, 1, 2, \ldots$

cioè $N\Delta\varphi = 2\pi k \quad k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (Z \equiv A)$

$$\int_0^{\pi} \sin ax \sin bx \, dx = \int_0^{\pi} \cos ax \cos bx \, dx = 0 \qquad \text{con } a \neq b$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad a > 0 \quad \text{ove} \quad \int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \lim_{h \to \infty} \int_0^{h} e^{-ax^2} dx$$

$$\int_0^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^{n+1} a^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad a > 0;\ n \text{ intero}$$

$$\int_0^{\infty} x^{2n+1} e^{-ax^2} dx = \frac{n!}{2a^{n+1}} \qquad a > 0;\ n \text{ intero}$$

6. Numeri complessi

Un numero complesso A è una coppia ordinata di numeri reali che di solito si scrive nella forma

$$A \equiv a + ib$$

Se $a = 0$ e $b = 0$ si ha il numero complesso nullo $N \equiv 0$.

Se $b = 0$ e $a \neq 0$ il numero complesso si riduce al *numero reale* $A = a$; in particolare se $b = 0$ e $a = 1$ il numero complesso si riduce all'*unità reale* $U_R = 1$.

Se $a = 0$ e $b \neq 0$ il numero complesso $A = ib$ si dice *immaginario puro*; in particolare se $a = 0$ e $b = 1$ il numero complesso si riduce all'*unità immaginaria* $U_I = i$.

Il numero complesso $A^* = a - ib$ viene detto *complesso coniugato* di $A = a + ib$.

6.1. *Definizioni dell'algoritmo complesso*

Dati due numeri complessi $A \equiv a + ib$ e $B \equiv c + id$ si definiscono le operazioni:

- *Somma algebrica* di due numeri complessi: $A \pm B = (a \pm c) + i(b \pm d)$
- *Prodotto* di due numeri complessi: $A \cdot B = (ac - bd) + i(ad + bc)$

  Casi particolari notevoli:

  $A^2 = a^2 - b^2 + i\,2ab$ quadrato di un generico numero complesso

  $(\pm U_R)^2 = (\pm 1)^2 = 1$ quadrato dell'unità reale

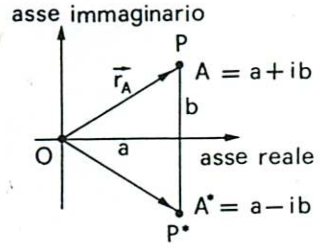
  $(\pm U_I)^2 = (\pm i)^2 = -1$ quadrato dell'unità immaginaria.

  Il quadrato dell'unità immaginaria vale -1; e il quadrato di un qualunque numero ib immaginario puro è negativo: $(\pm ib)^2 = -b^2$. In effetti i numeri complessi sono stati introdotti per dar significato all'operazione di radice quadrata dei numeri reali negativi.

- *Reciproco* di un numero complesso: $\frac{1}{A} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$. Questa definizione comporta che $\frac{1}{A} \cdot A = 1$
- Modulo di un numero complesso:

$$|A| = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Si verifica facilmente che $A \cdot A^* = |A|^2$: il modulo quadrato di un numero complesso è pari al prodotto di esso per il suo complesso coniugato.



6.2. *Interpretazione geometrica dei numeri complessi*

Così come i numeri reali sono in corrispondenza biunivoca coi punti di una retta (asse reale), così i numeri complessi sono in corrispondenza biunivoca coi punti di un piano (piano complesso). Il punto P corrispondente al numero $A \equiv a + ib$ è quello di coordinate cartesiane a e b rispettivamente.

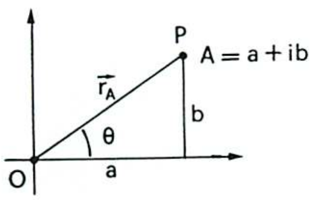
L'asse delle ascisse di questo piano è detto *asse reale* e quello delle ordinate *asse immaginario*.

Il modulo $|A| = \sqrt{a^2 + b^2}$ di A rappresenta il modulo r_A del vettore posizione $\vec{r}_A$ del suo punto rappresentativo P. Il complesso coniugato A^* di A è rappresentato dal punto P^* simmetrico a P rispetto all'asse reale.

È immediato verificare che la somma $S = A + B$ dei numeri complessi A e B è rappresentato dal punto il cui vettore posizione $\vec{r}_S$ è somma vettoriale dei vettori posizione $\vec{r}_A$ e $\vec{r}_B$ di A e B rispettivamente.

L'interpretazione geometrica del prodotto $A \cdot B$ è più immediata nella rappresentazione polare che introduciamo qui di seguito.

6.3. *Rappresentazione polare dei numeri complessi*



Il numero complesso $A \equiv a + ib$ può essere espresso, oltre che tramite le componenti cartesiane a e b del suo vettore posizione $\vec{r}_A$ nel piano complesso, anche tramite le sue coordinate polari r_A, θ tali che:

$$\begin{cases} a = r_A \cos\theta \\ b = r_A \operatorname{sen}\theta \end{cases} \quad \text{ovvero:} \quad \begin{cases} r_A = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \operatorname{tg}\theta = \dfrac{b}{a} \end{cases}$$

per cui

$$A \equiv (a + ib) \equiv r_A(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

L'anomalia θ è definita a meno di multipli interi di 2π.

Dati due numeri complessi

$$A \equiv (a + ib) = r_A(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) \quad \text{e} \quad B \equiv (c + id) = r_B(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi)$$

si verifica immediatamente che il prodotto

$$P = A \cdot B = (ac - bd) + i(ad + bc) \equiv r_P(\cos\gamma + i\operatorname{sen}\gamma)$$

ha come coordinate polari r_P, γ rispettivamente il prodotto dei raggi r_A e r_B e la somma degli angoli θ e φ dei fattori:

$$r_P = r_A \cdot r_B$$
$$\gamma = \theta + \varphi$$

per cui

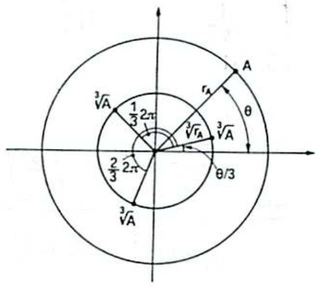
$$A \cdot B \equiv r_A \cdot r_B(\cos(\theta + \varphi) + i\operatorname{sen}(\theta + \varphi))$$

Ciò considerato, la rappresentazione polare consente di calcolare e di esprimere in termini compatti le potenze n-sime e le radici n-sime dei numeri complessi.

Se $A \equiv (a + ib) = r_A(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$ si ha infatti

$$A^n = r_A^n\,(\cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}\,(n\theta))$$

$$\sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{r_A}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{k}{n}2\pi\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{k}{n}2\pi\right)\right] \quad (k \text{ intero}).$$



Questa espressione ci mostra che ogni numero complesso A ammette n radici n-esime fra di loro distinte (corrispondenti a $k = 0, 1, \ldots, n-1$), la cui interpretazione geometrica risulta immediata dalla figura.

6.4. *Rappresentazione esponenziale dei numeri complessi*

L'esponenziale $e^{i\theta}$ ad esponente immaginario $i\theta$ (θ reale) è definito dalla relazione:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$$ sviluppo in serie di Taylor

Per conseguenza, il numero complesso $A \equiv (a + ib) = r_A(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$ può essere scritto nella forma compatta

$$A = r_A e^{i\theta}$$ $$\sqrt[n]{A} = \sqrt[n]{r_A}\, e^{i\frac{\theta+2\pi k}{n}} \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

Si verifica immediatamente che tutto l'algoritmo relativo all'esponenziale $e^{i\theta}$ ad esponente immaginario mantiene le stesse proprietà rispetto al caso di esponente reale. Ad esempio, poiché si può trattare i come una costante, si ha:

$$e^{i\theta} \cdot e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}$$

$$\frac{d}{dx}\,e^{ix} = i\,e^{ix}$$

Sono inoltre di immediata verifica le seguenti relazioni (dette *formule di Eulero*) già anticipate in A.2.1:

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\mathrm{sen}\,\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

7. Equazioni differenziali

ordinarie
derivate parziali
vettoriali

Un'equazione differenziale è una relazione tra una variabile indipendente t, una variabile dipendente y ed una o più derivate di y rispetto a t.

L'ordine di un'equazione differenziale è l'ordine della più alta derivata che vi compare.

Risolvere un'equazione differenziale significa trovare tutte le possibili funzioni $y = y(t)$ che soddisfano l'equazione data.

Considereremo nel seguito soltanto alcune semplici equazioni differenziali di frequente uso in meccanica elementare.

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i^2)^n}{(2n)!} \theta^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i(i^2)^n}{(2n+1)!} \theta^{2n+1} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \theta^{2n} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \theta^{2n+1} =$$

$$= \cos\theta + i \sin\theta$$

7.1. *Equazioni del primo ordine a quadratura immediata*

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = f(t)}$$

$$\boxed{y = \int f(t)\, dt + c}$$

$$y(t) - y(0) = \int_0^t f(t')\, dt'$$

dove c è una costante arbitraria.

7.2. *Equazioni del primo ordine a variabili separabili*

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = f(t)\, g(y)}$$

da cui:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(t)\, dt$$

che può essere risolta per quadratura, cioè integrando entrambi i membri

$$\int_{y(0)}^{y(t)} \frac{dy}{g(y)} = \int_0^t f(t')\, dt'$$

$$\boxed{\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(t)\, dt + c}$$

Per esempio, l'equazione:

$$y\frac{dy}{dt} = a - by^2$$

si risolve separando la variabile y al primo membro e la variabile indipendente t al secondo:

$$\frac{y\, dy}{a - by^2} = dt$$

da cui:

$$-\frac{1}{2b}\frac{d(a - by^2)}{(a - by^2)} = dt\,,$$

ed integrando

$$-\frac{1}{2b}\ln(a - by^2) = t + c$$

7.3. *Equazioni lineari del primo ordine*

$$\boxed{\frac{dy}{dt} + fy = g}$$

dove f e g sono funzioni di t o costanti.

Si moltiplicano ambo i membri dell'equazione per l'esponenziale $e^{\int f dt}$ e si integra.

$$\boxed{y(t) = e^{-\int f\, dt}\left[\int e^{\int f\, dt} g\, dt + c\right]}$$

$$y(t) = y(0) + e^{-\int_0^t f(t')\,dt'} \int_0^t e^{+\int_0^{t'} f(t'')\,dt''} g(t')\,dt'$$

Si verifica immediatamente che

$$\frac{d}{dt}\left[y\, e^{\int f dt}\right] = \frac{dy}{dt}\, e^{\int f dt} + y f\, e^{\int f dt} = e^{\int f dt}\left[\frac{dy}{dt} + f y\right]$$

e quindi

$$y\, e^{\int f dt} = \int e^{\int f dt}\, g\, dt + c$$

Per esempio, consideriamo l'equazione differenziale:

$$\frac{dy}{dt} + a y = b t \qquad \text{con } a \text{ e } b \text{ costanti.}$$

Si può integrare moltiplicando ambo i membri per $e^{at}\, dt$ ed integrando:

$$\begin{aligned} y e^{at} &= b \int e^{at}\, t\, dt + c = \\ &= b e^{at}\left(\frac{t}{a} - \frac{1}{a^2}\right) + c \end{aligned}$$

da cui

$$y = \frac{b}{a}\left(t - \frac{1}{a}\right) + c e^{-at}$$

7.4. *Equazioni lineari omogenee del secondo ordine a coefficienti costanti*

$$\boxed{\frac{d^2 y}{dt^2} + 2a\frac{dy}{dt} + b y = 0} \qquad \text{con } a \text{ e } b \text{ costanti reali.}$$

Si dimostra facilmente che la funzione $y = e^{mt}$ è soluzione dell'equazione differenziale purché:

$$m^2 + 2 a m + b = 0 \qquad \text{(equazione algebrica associata)}$$

Dette m_1 ed m_2 le soluzioni dell'equazione algebrica la soluzione completa dell'equazione differenziale è:

$$y(t) = c_1 e^{m_1 t} + c_2 e^{m_2 t}$$

dove c_1 e c_2 sono due costanti arbitrarie (tante quanto è l'ordine dell'equazione differenziale).

Poiché:

$$m_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - b}$$

si possono avere tre possibilità:

i) $a^2 > b$, e quindi due radici reali dell'equazione algebrica

ii) $a^2 = b$, e quindi una sola radice reale; la soluzione è in questo caso

$$y(t) = e^{-at}(c_1 + c_2 t)$$

iii) $a^2 < b$, e quindi radici complesse. Detto $a^2 - b = -n^2$ si ha

$$y(t) = e^{-at}(c_1 e^{int} + c_2 e^{-int})$$

ovvero

$$y(t) = e^{-at}(A\cos nt + B\,\mathrm{sen}\,nt)$$

dove A e B sono due costanti arbitrarie.

Se manca il termine contenente la derivata prima ($a = 0$) l'equazione si riduce alla forma

$$\frac{d^2y}{dt^2} + by = 0\,.$$

Se $b > 0$, si pone, di solito $b = \omega^2$, e quindi:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0\,,$$

la cui soluzione è:

$$y(t) = A\cos\omega t + B\,\mathrm{sen}\,\omega t = C\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$$

dove C e φ sono costanti arbitrarie.

– EQUAZIONE DIFFERENZIALI LINEARI NON OMOGENEE

7.5. *Equazioni del secondo ordine di tipo particolare*

Salvo il caso in cui l'equazione sia esprimibile solo in forma implicita, la più generale equazione differenziale del secondo ordine è del tipo

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right)$$

dove f è una qualunque funzione. Non esistono tecniche elementari di tipo generale per risolvere questa equazione; tuttavia possono essere trattate semplicemente alcune sue forme particolari:

i) Equazione del tipo

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f(t)\,.$$

Questa equazione si risolve quadrando due volte:

$$\frac{dy}{dt} = F(t) + c_1 \qquad \text{dove} \quad F(t) = \int f(t)\,dt$$

$$y = \int [F(t) + c_1]\,dt + c_2\,.$$

ii) Equazioni del tipo

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f\left(t, \frac{dy}{dt}\right)$$

Si pone

$$\frac{dy}{dt} = x(t)\,;$$

e dunque

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dx}{dt}\,.$$

L'equazione differenziale diviene:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

ed è così ricondotta a una equazione differenziale del primo ordine.

iii) equazioni del tipo

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f(y)$$

Ponendo

$$\frac{dy}{dt} = x(t)\,,$$

si ha

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dy} \cdot x\,.$$

Sostituendo nella nostra equazione, questa diviene

$$\frac{dx}{dy} \cdot x = f(y)$$

che rappresenta una equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili. Separando e integrando, si ha

$$\frac{1}{2}\, x^2 = F(y) + c_1 \qquad \text{dove} \quad F(y) = \int f(y)\, dy$$

da cui

$$x = \frac{dy}{dt} = \pm \sqrt{2\,\mathrm{F}(y) + 2\,c_1}$$

che rappresenta anch'essa un'equazione del primo ordine a variabili separabili, ed è dunque immediatamente ricondotta alla quadratura.

iv) Equazioni del tipo

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f\left(y, \frac{dy}{dt}\right).$$

Mediante la sostituzione

$$\frac{dy}{dt} = x(t)\,,$$

si ha

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dy} \cdot x\,;$$

e dunque

$$\frac{dx}{dy} \cdot x = f(y, x)$$

L'equazione del secondo ordine è così ricondotta a una del primo ordine.

$$\boxed{y'' + 3y' + 2y = e^{x} + \sin x}$$

soluz. part.:

$$y(x) = Ae^{x} + B\sin x + C\cos x$$

$$y' = Ae^{x} + B\cos x - C\sin x$$

$$y'' = Ae^{x} - B\sin x - C\cos x$$

$$6Ae^{x} + (-B - 3C + 2B)\sin x + (-C + 3B + 2C)\cos x = e^{x} + \sin x$$

$$\begin{cases} 6A = 1 \\ B - 3C = 1 \\ 3B + C = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} A &= \frac{1}{6} \\ B &= \frac{1}{10} \\ C &= -\frac{3}{10} \end{aligned}$$

soluz omogenea:

$$\alpha^{2} + 3\alpha + 2\alpha = 0 \qquad \alpha = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}$$

$$\boxed{y(x) = Ae^{-x} + Be^{-2x} + \frac{1}{6}e^{x} + \frac{1}{10}\sin x - \frac{3}{10}\cos x}$$

$$\boxed{y''(x) - 3y'(x) - 4y(x) = 10\cos(2x)}$$

soluz. particolare: $y(x) = A\sin(2x) + B\cos(2x)$

$y'(x) = 2A\cos(2x) - 2B\sin(2x)$

$y''(x) = -4A\sin(2x) - 4B\cos(2x)$

$$\sin(2x)\left[-4A + 6B - 4A\right] + \cos(2x)\left[-4B - 6A - 4B\right] = 10\cos(2x)$$

$$\begin{cases} -4A + 3B = 0 \\ -3A - 4B = 5 \end{cases} \qquad A = -\frac{3}{5} \qquad B = -\frac{4}{5}$$

soluz. omogenea:

$$\alpha^2 - 3\alpha - 4 = 0 \qquad \alpha = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$$

$$\boxed{y(x) = Ae^{-x} + Be^{4x} - \frac{3}{5}\sin(2x) - \frac{4}{5}\cos(2x)}$$