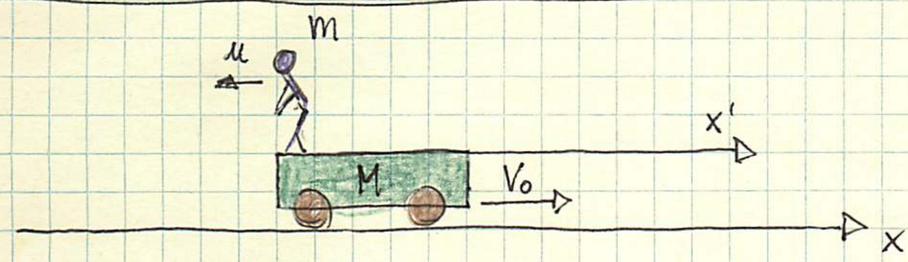
URTI

1x2h

Un carrello di massa $M = 200\,kg$ si muove senza attrito sopra una guida rettilinea con velocità $V_0 = 72\ km/h$. Una persona di massa $m = 50\ kg$ salta giù dal carrello con velocità relativa a questo di modulo $u = 5\ ms^{-1}$ e direzione parallela alla guida. Si calcolino le velocità del carrello e della persona subito dopo il salto, il lavoro L compiuto dalla persona per eseguire il salto.



Poiché non ci sono forze esterne lungo x la corrispondente componente della quantità di moto si conserva:

$$(m + M)V_0 = MV + mv$$

essendo V e v le velocità del carrello e della persona nel sistema di rif. solidale alla guida.

poiché $v = V - u$

$$(m + M)V_0 = (m + M)V - mu \qquad V = V_0 + \frac{m}{m+M}u = 21\ ms^{-1}$$

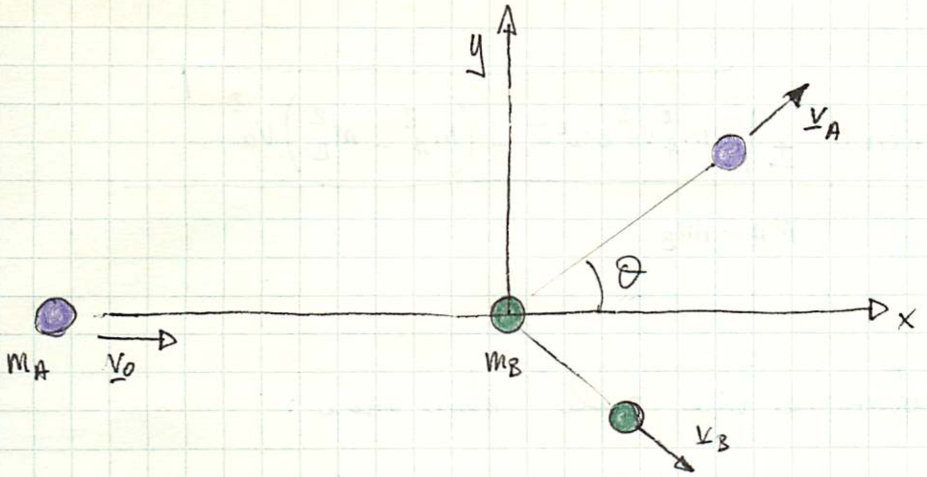
$$v = V_0 - \frac{M}{m+M}u = 16\ ms^{-1}$$

Per il teorema delle forze vive si ha:

$$L = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 - \frac{1}{2}(m+M)V_0^2 = 500\ J$$

Un corpo A di massa m_A in moto su un piano orizzontale liscio urta elasticamente un corpo B di massa $m_B < m_A$ in quiete. Si determini l'angolo massimo θ_{max} di cui può venire deviato A dalla traiettoria iniziale

---



la quantità di moto e l'energia cinetica si conservano

$$m_A v_0 = m_A v_{Ax} + m_B v_{Bx}$$

$$0 = m_A v_{Ay} + m_B v_{By}$$

$$m_A v_0^2 = m_A v_A^2 + m_B v_B^2$$

$$\begin{cases} v_{Ax} = v_A \cos\theta \\ v_{Ay} = v_A \sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_{Bx} = \dfrac{m_A}{m_B}\left(v_0 - v_A \cos\theta\right) \\ v_{By} = -\dfrac{m_A}{m_B} v_A \sin\theta \end{cases}$$

$$m_A v_0^2 = m_A v_A^2 + \frac{m_A^2}{m_B}\left(v_0^2 + v_A^2 \cos^2\theta - 2 v_0 v_A \cos\theta\right) + \frac{m_A^2}{m_B} v_A^2 \sin^2\theta$$

$$m_A v_0^2 = m_A v_A^2 + \frac{m_A^2}{m_B}\left(v_0^2 + v_A^2 - 2 v_0 v_A \cos\theta \right)$$

$$\left(m_A + m_B\right) v_A^2 - 2 m_A v_0 \cos\theta \, v_A + \left(m_A - m_B\right) v_0 = 0$$

$$v_A = \frac{m_A v_0 \cos\theta \pm \sqrt{m_A^2 v_0^2 \cos^2\theta - \left(m_A^2 - m_B^2\right) v_0^2}}{m_A + m_B}$$

affinché tale soluzione sia reale deve essere:

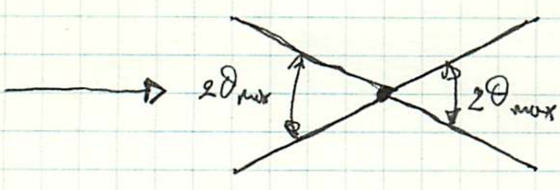
$$m_A^2 \cos^2\theta - \left(m_A^2 - m_B^2\right) \geq 0$$

$$\cos^2\theta \geq 1 - \left(\frac{m_B}{m_A}\right)^2$$

$$-\theta_{max} \leq \theta \leq +\theta_{max}$$

$$\theta_{max} = \arccos\sqrt{1 - \left(\frac{m_B}{m_A}\right)^2}$$

$$\pi - \theta_{max} \leq \theta \leq \pi + \theta_{max}$$



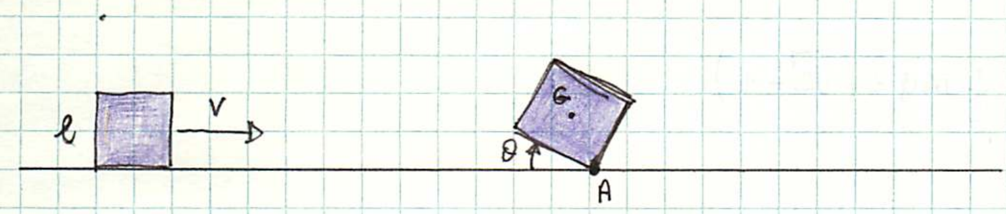
$$\theta_{max} \longrightarrow 0 \qquad \frac{m_B}{m_A} \to 0$$

$$\theta_{max} \longrightarrow \frac{\pi}{2} \qquad \frac{m_A}{m_B} \to 0$$

~~in v_A occorre scegliere il segno +~~ se $m_B > m_A$ e si hanno soluzioni in entrambi i coni; se $m_B < m_A$ solo nel cono anteriore

Un cubo omogeneo di spigolo $l = 20$ cm è poggiato sopra un piano orizzontale liscio rispetto al quale si muove con velocità v. Il cubo "inciampa" con lo spigolo anteriore su una asperità intorno alla quale ruota senza attrito. Si calcoli il valore v_0 tale che se $v > v_0$ il cubo si ribalta

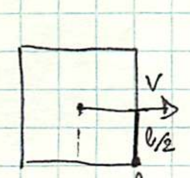
---



A causa del vincolo al cubo viene impressa una rotazione attorno allo spigolo A

Poiché i momenti delle forze con polo A agenti sul cubo a $\theta = 0$ (forza peso e reazione vincolare normale) danno somma nulla il momento della quantità di moto rispetto all'asse passante per A si conserva nel passaggio da moto traslatorio a moto rotatorio

$$m v \cdot \frac{l}{2} = I\,\omega(0)$$



I = momento di inerzia per A =

$$= \frac{m l^2}{6} + m\,\frac{l^2}{2} = \frac{2}{3} m l^2$$

a $\theta = 0$ il cubo possiede energia cinetica rotazionale

$$\frac{1}{2} I\,\omega^2(0) = \frac{1}{2} I\,\frac{m^2 v^2 l^2}{4 I^2} = \frac{v^2 l^2}{8}\,\frac{3 m^2}{2 m l^2} = \frac{3}{16} m v^2$$

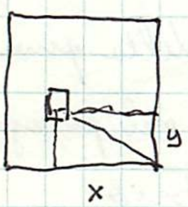
Durante la rotazione la forza peso procura un momento che fa diminuire $\omega(\theta)$. Se a $\theta = 45°$ $\omega \geq 0$ il cubo si ribalta

V_0 si trova in corrispondenza a $\omega = 0$ per $\theta = 45°$ con la conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2} I \omega^2_{(0)} = mg\left(\frac{l}{\sqrt{2}} - \frac{l}{2}\right)$$

$$\frac{3}{16} m v_0^2 = \frac{1}{2} mgl\left(\sqrt{2} - 1\right)$$

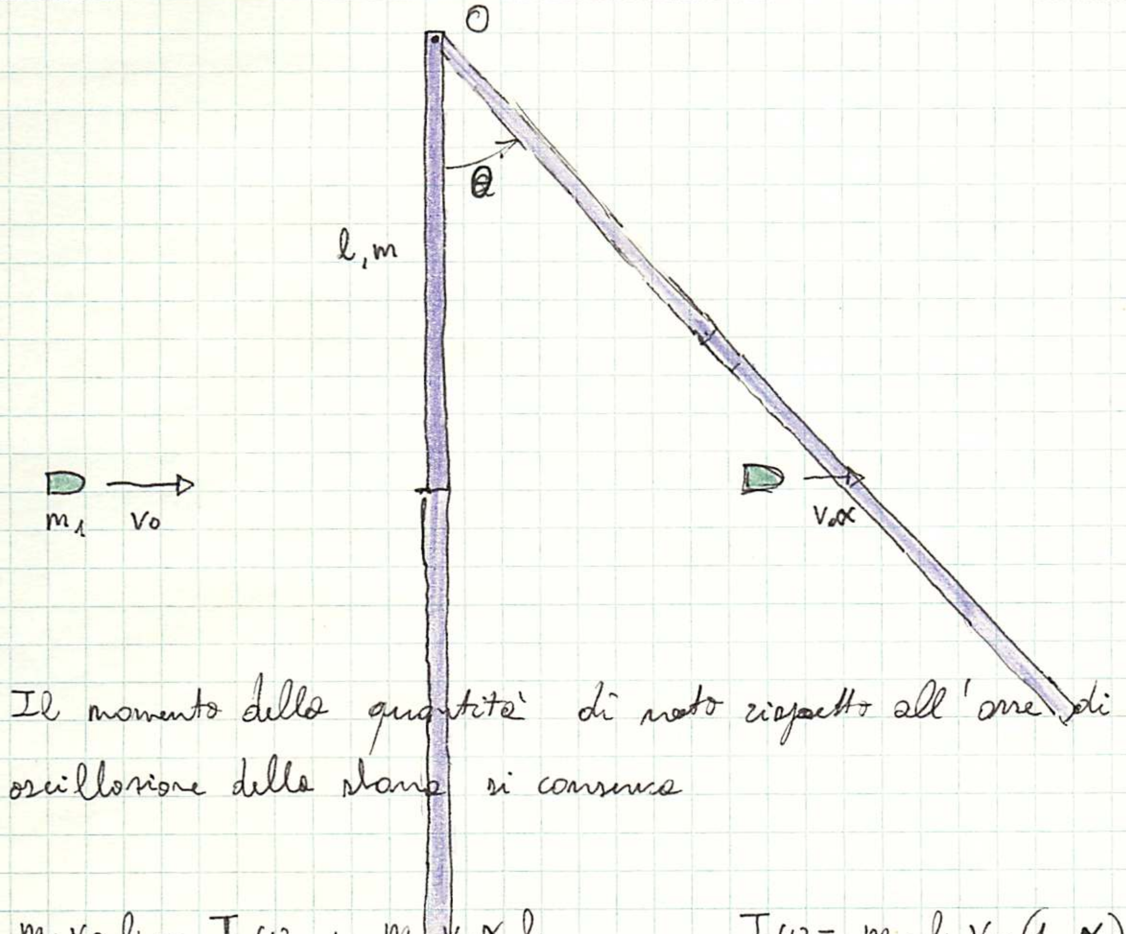
$$V_0 = \sqrt{\frac{8}{3} gl\left(\sqrt{2} - 1\right)} = 1.47 \ ms^{-1}$$



$$I = \int_0^l dx \int_0^l dy \ \frac{m}{l^2}\left(x^2 + y^2\right) =$$

$$= \frac{m}{l^2}\left(\frac{l^3}{3} + \frac{l^3}{3}\right) l = \frac{2}{3} ml^2$$

Un'asta rigida omogenea di massa m e lunghezza l è vincolata a ruotare in un piano verticale attorno ad un asse liscio passante per un estremo; inizialmente l'asta è ferma in posizione verticale. Un proiettile di massa m_1 sparato orizzontalmente con velocità v_0 contro il punto mediano dell'asta, la attraversa (senza espellere frammenti) e fuoriesce con velocità $v_0\alpha$, $\alpha<1$, immutata in direzione. Si calcoli v_0 se dopo l'urto l'asta ruota di un angolo $\theta = \pi$ rad raggiungendo tale posizione con velocità nulla.



Il momento della quantità di moto rispetto all'asse di oscillazione della stanga si conserva

$$m_1 v_0 \frac{l}{2} = I\omega + m_1 v_0 \alpha \frac{l}{2} \qquad I\omega = m_1 \frac{l}{2} v_0 (1-\alpha)$$

$$I = \frac{1}{3} m l^2$$

conservazione dell'energia tra l'istante subito dopo l'urto e l'istante di arresto ad $\theta = \pi$ (vincolo liscio)

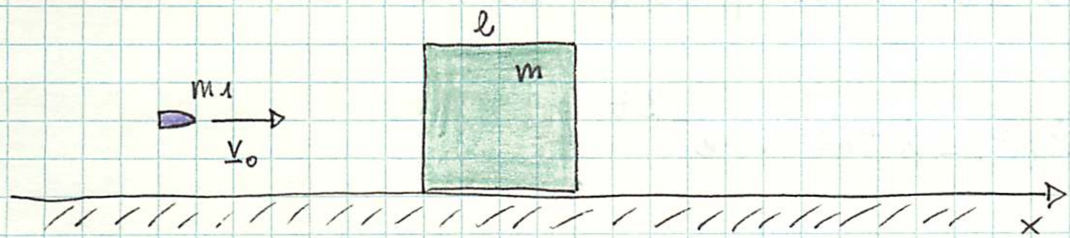
$$\frac{1}{2} I \omega^2 = m g l$$

$$\omega = \frac{3 m_1 v_0 (1-\alpha)}{2 m l}$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{3}\,\cancel{m}\cancel{l^2}\;\frac{9 m_1^2 v_0^2 (1-\alpha)^2}{4 \cancel{m^2}\cancel{l^2}} = \cancel{m} g l$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{8 m^2 g l}{3 m_1^2 (1-\alpha)^2}} = \frac{m_2}{m_1 (1-\alpha)} \sqrt{\frac{8}{3} g l}$$

Un proiettile di massa $m_1 = 10$ g viene sparato contro il centro di una faccia di un blocco cubico omogeneo di massa $m = 4$ Kg e spigolo $l = 10$ cm inizialmente in quiete sopra un piano orizzontale liscio. La velocità del proiettile è perpendicolare alla faccia del blocco ed ha modulo $v_0 = 200 \text{ ms}^{-1}$.
Dentro il blocco il proiettile è frenato con una forza $\underline{F} = -\alpha \underline{v}$ con $\alpha = 10^4 \text{ g s}^{-1}$. Si calcoli la velocità del proiettile all'uscita del blocco.



Poichè non ci sono forze esterne agenti lungo x la quantità di moto componente x si conserva

Dette $x(t)$ ed $x_1(t)$ le coordinate del blocco e del proiettile

$$m\dot{x}(t) + m_1 \dot{x}_1(t) = m_1 v_0$$

l'eq. del moto del proiettile dentro al blocco è:

$$m_1 \ddot{x}_1 = -\alpha\left(\dot{x}_1 - \dot{x}\right)$$

essendo $\dot{x}_1 - \dot{x}$ la velocità relativa del proiettile nel blocco.

combinando

$$m_1 \ddot{x}_1 + \alpha\left(1 + \frac{m_1}{m}\right)\dot{x}_1 = \frac{m_1}{m}\alpha v_0$$

$$\dot{x}_1(t) = \frac{\frac{m_1}{m}\alpha v_0}{\alpha\left(1+\frac{m_1}{m}\right)} + A e^{-\beta t} \qquad \beta = \frac{\alpha}{m_1}\left(1+\frac{m_1}{m}\right)$$

$$\dot{x}_1(0) = v_0 = \frac{\frac{m_1}{m}v_0}{1+\frac{m_1}{m}} + A \qquad A = v_0 - \frac{m_1 v_0}{m+m_1} = \frac{m}{m+m_1} v_0$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = v_0 \dfrac{m_1}{m+m_1} + v_0 \dfrac{m}{m+m_1} e^{-\beta t} \\ \dot{x}(t) = v_0 \dfrac{m_1}{m+m_1} - v_0 \dfrac{m_1}{m+m_1} e^{-\beta t} \end{cases}$$

la velocità relativa del proiettile nel blocco è

$$\dot{x}_R(t) = \dot{x}_1(t) - \dot{x}(t) = v_0 e^{-\beta t}$$

$$x_R(t) = x_R(0) + \frac{v_0}{\beta}\left(1-e^{-\beta t}\right) = \frac{v_0}{\beta}\left(1-e^{-\beta t}\right)$$

istante di uscita del proiettile t^* ($t=0$ istante di entrata)

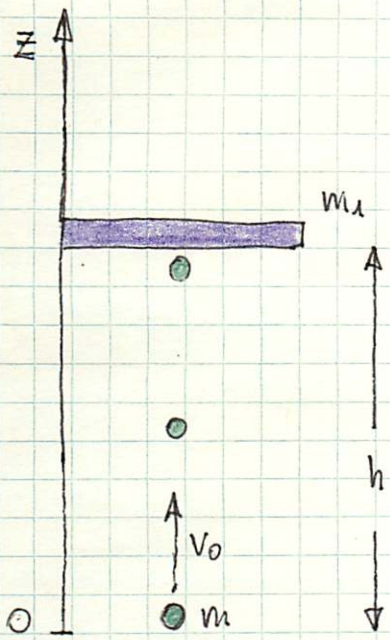
$$x_R(t^*) = l \qquad 1-e^{-\beta t^*} = \frac{\beta l}{v_0} \qquad e^{-\beta t^*} = \frac{v_0-\beta l}{v_0}$$

$$t^* = \frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{v_0}{v_0-\beta l}\right)$$

$$\dot{x}_1(t^*) = v_0\frac{m_1}{m+m_1} + v_0\frac{m}{m+m_1}\,\frac{v_0-\beta l}{v_0} = v_0 - \beta l \frac{m}{m+m_1} =$$

$$= v_0 - \frac{\alpha l}{m_1} = 100 \text{ ms}^{-1}$$

Delle palline uguali di massa $m = 5\,g$ vengono sparate verso l'alto con velocità iniziale $v_0 = 20\ m s^{-1}$ contro una lastra metallica rigida di massa $m_1 = 0.4\ Kg$ non vincolata lungo la verticale. Supponendo che nell'urto le palline invertano la loro velocità mantenendo il modulo inalterato e che vengano inviate $n = 20\ s^{-1}$ palline al secondo calcolare la quota h alla quale viene mantenuta la lastra.



la velocità di ogni pallina alla quota h è:

$$v = v_0 - g\,t$$
$$h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2}(v_0 + v)\,t \qquad v_0 - v = \frac{2gh}{v_0 + v}$$

$$v_0^2 - v^2 = 2gh \qquad v(h) = \sqrt{v_0^2 - 2gh}$$

La variazione di quantità di moto di ogni singola pallina nell'urto con la lastra è $2\,m\,v(h)$ e corrisponde all'impulso ceduto alla lastra

$$\underline{I} = \int_0^T \underline{F}\,dt = \Delta \underline{p}$$

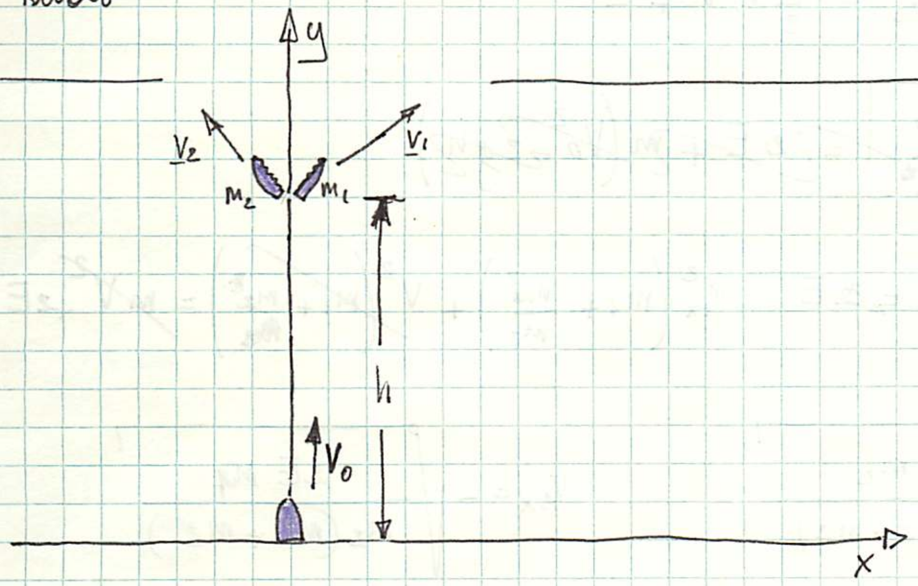
All'equilibrio la forza peso della lastra è controbilanciata dalla forza di spinta media esercitata dalle palline:

$$m_1 g = \frac{2 m v(h)\, n \Delta t}{\Delta t} = 2mn\sqrt{v_0^2 - 2gh}$$

$$\frac{m_1^2 g^2}{4m^2 n^2} = v_0^2 - 2gh$$

$$h = \underbrace{\frac{v_0^2}{2g}}_{\text{quota di arresto delle palline libere}} - \frac{m_1^2 g}{8m^2 n^2} = 0.81\ \text{m}$$

Un proiettile di massa $m = 3\,Kg$ viene sparato verso l'alto con velocità iniziale $V_0 = 20\ m s^{-1}$. Alla quota $h = 15\ m$ il proiettile esplode in due frammenti di massa $m_1 = \frac{2}{3} m$ ed $m_2 = \frac{1}{3} m$ emessi relativamente al proiettile in direzione parallela al suolo. Un osservatore solidale al suolo misura una energia liberata nell'esplosione e acquistata dai due frammenti $E = 300\,J$.
Calcolare la distanza d a cui i due frammenti raggiungono il suolo



La velocità posseduta dal proiettile al momento dell'esplosione

è $\underline{V} = (0, V)$

$$\begin{cases} V = V_0 - g t^* \\ h = V_0 t^* - \frac{1}{2} g t^{*2} \end{cases}$$

$$t^* = \frac{V_0 - \sqrt{V_0^2 - 2gh}}{g}$$

$$V = V_0 - V_0 + \sqrt{V_0^2 - 2gh}$$

$$V = \sqrt{V_0^2 - 2gh}$$

Poiché la forza dovuta all'esplosione agisce lungo x
dette $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ le velocità dei frammenti subito dopo l'esplosione

$v_{1y} = v_{1y} = V$

Per la conservazione della quantità di moto

$$m\underline{V} = m_1\underline{v}_1 + m_2\underline{v}_2 \qquad\qquad m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = 0$$

$$v_{2x} = -\frac{m_1}{m_2} v_{1x}$$

conservazione dell'energia

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m V^2 + E$$

$$v_{1x} = \sqrt{\frac{2E\, m_2}{m_1(m_1+m_2)}} \qquad\qquad v_{2x} = -\sqrt{\frac{2E\, m_1}{m_2(m_1+m_2)}}$$

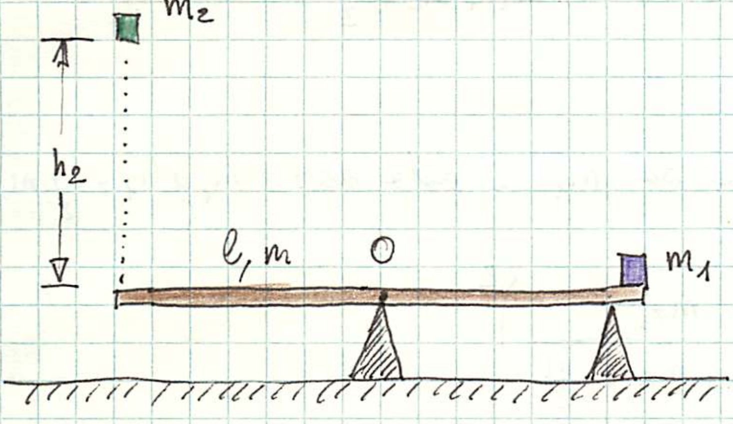
Poiché i due frammenti hanno $v_{1y} = v_{2y} = V$ essi giungono al suolo contemporaneamente al tempo $t^{**} = \frac{2V_0}{g}$ ($t=0$ istante di lancio del proiettile)

quindi essi restano in aria per un tempo

$$\Delta t = t^{**} - t^{*} = \frac{2V_0}{g} - \frac{V_0 - \sqrt{V_0^2 - 2gh}}{g} = \frac{V_0 + \sqrt{V_0^2 - 2gh}}{g}$$

$$d = (v_{1x} - v_{2x})\Delta t = 92.6 \text{ m}$$

Una sbarretta omogenea di lunghezza l e massa m è incernierata ad un asse orizzontale passante per il suo centro O e mantenuta orizzontale su un appoggio . Sopra l'estremo sostenuto da A è appoggiata una massa m_1. Sull'altro estremo, viene fatta cadere da una altezza h_2 una massa m_2 che si conficca nella sbarra. A quale altezza h_1 rimbalza m_1?



La massa m_2 urta la sbarretta con velocità v_2: $\frac{1}{2} m_2 v_2^2 = m_2 g h_2$

$$v_2 = \sqrt{2 g h_2}$$

Nell'urto si conserva il momento della quantità di moto per l'asse passante per O (non la quantità di moto a causa della presenza del vincolo!)

$$m_2 v_2 \frac{l}{2} = I \omega + m_1 v_1 \frac{l}{2}$$

dove v_1 è la velocità di m_1 $\qquad \omega = \frac{v_1}{l/2}$

e I è il momento di inerzia della sbarretta con m_2 conficcata

$$I = \frac{m l^2}{12} + m_2 \frac{l^2}{4}$$

$$m_1 \frac{l}{2} v_1 + \left(\frac{m l^2}{12} + \frac{m_2 l^2}{4} \right) \frac{2}{l} v_1 = m_2 v_2 \frac{l}{2}$$

$$v_1 \left[m_1 + \frac{m}{3} + m_2 \right] = m_2 v_2$$

$$v_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2 + \frac{m}{3}} v_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2 + \frac{m}{3}} \sqrt{2 g h_2}$$

La quota raggiunta da m_1 è data da: $m_1 g h_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2$

$$h_1 = \frac{v_1^2}{2g} = h_2 \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2 + \frac{m}{3}} \right)^2$$