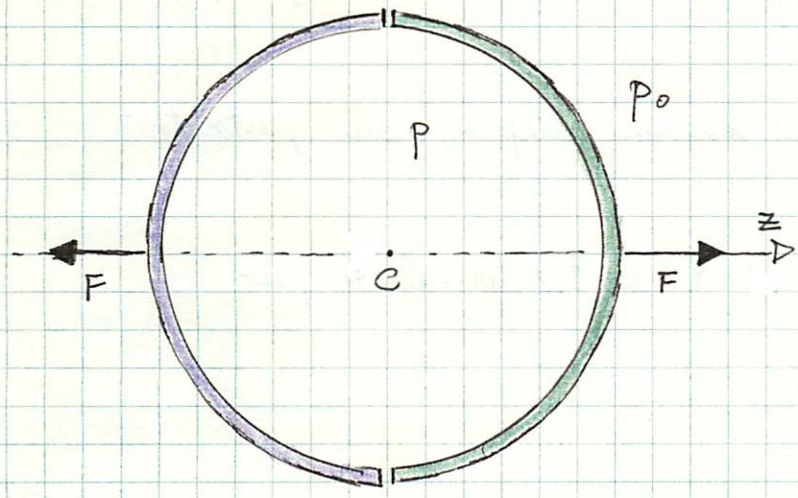
FLUIDI

1x2h

Due emisferi di raggio r vengono uniti a formare una sfera. Mediante una pompa si fa il vuoto nella sfera. Se p è la pressione residua interna alla sfera e p_0 quella esterna che forza occorre applicare a ciascun emisfero per staccarli?

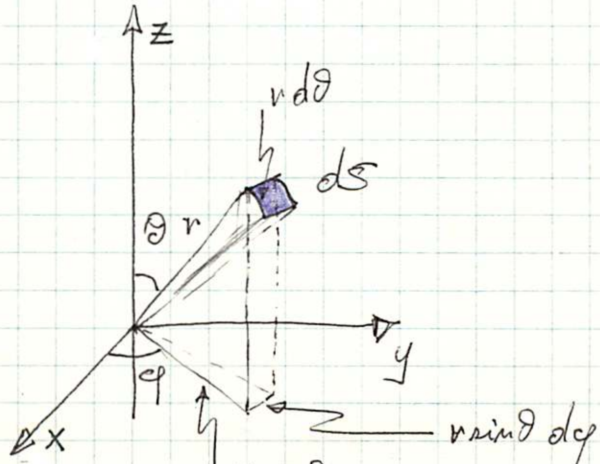
Si consideri $p = 10^{-3}$ atm, $p_0 = 1$ atm, $r = 30$ cm.



La forza da applicare per separare i due emisferi deve vincere quella causata dalla differenza di pressione tra l'esterno e l'interno che agisce verso il centro C

Si consideri l'elemento di superficie della sfera

$$dS = r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$



la forza agente su dS è diretta verso il centro : $dF = (p_0 - p)\, dS$;
la componente lungo l'asse z (ortogonale al piano di separazione delle sfere) vale :

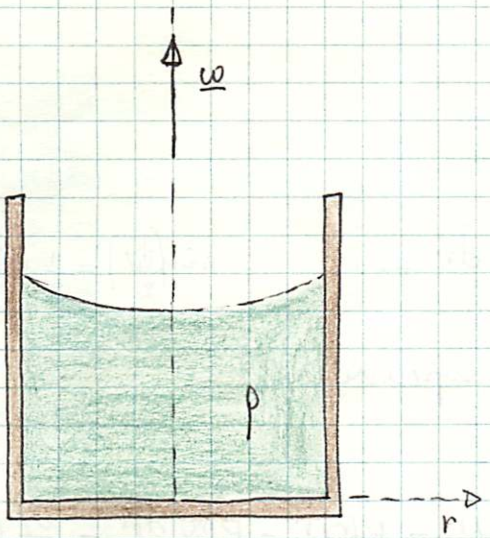
$$dF_z = dF \cos\theta = (p_0 - p)\, r^2 \sin\theta \cos\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$F_z = (p_0 - p)\, r^2 \, 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin\theta \; d(\sin\theta) = \pi r^2 (p_0 - p)$$

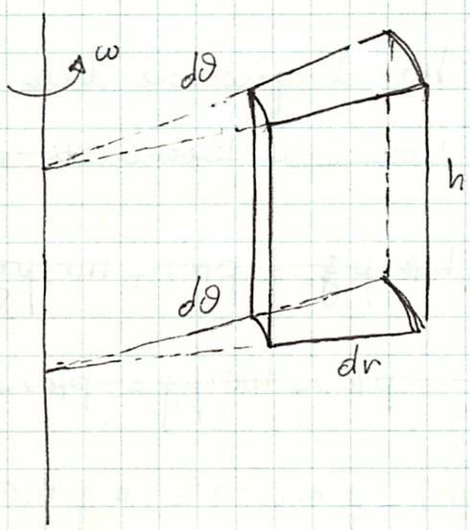
la forza da applicare a ciascun emisfero vale pertanto

$$F = \pi r^2 (p_0 - p) = 28\,642 \text{ N} \approx 2.9 \text{ tonnellate peso}$$

Un recipiente cilindrico contenente un liquido di densità ρ ruota attorno al proprio asse verticale con velocità angolare ω costante.
Trovare la dipendenza della pressione in funzione della distanza dall'asse di rotazione, $p(r)$, e l'equazione della superficie libera del liquido.



Si consideri la porzione infinitesima di liquido contenuta nel volumetto in figura compreso tra θ e $\theta + d\theta$, r e $r + dr$ e di altezza h.



All'equilibrio, la somma delle forze esterne agenti sul volumetto considerato deve annullarsi

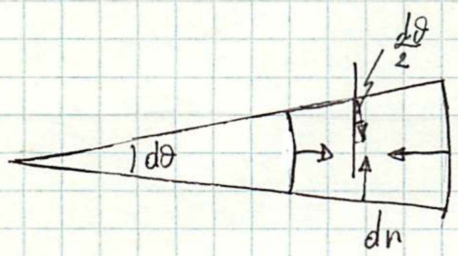
$$\sum \underline{f}_{esterne} = 0$$

Le forze esterne sono la forza peso, la forza centrifuga e le sei forze di pressione sulle 6 facce.

Proiettando l'equazione dell'equilibrio lungo l'asse radiale si ha:

$$\rho \cdot r\,d\theta\,dr\,h \cdot \omega^2 r + 2\,p(r)\,h\,dr\,\sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) + p(r)\,r\,d\theta\,h -$$

$$- p(r+dr)\,(r+dr)\,d\theta\,h = 0$$



poiché $p(r+dr) = p(r) + \frac{\partial p}{\partial r} dr + \dots$ $\quad \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) = \frac{1}{2} d\theta + \dots$

a meno di infinitesimi di ordine superiore si ha

$$0 = h\,d\theta \left[\omega^2 \rho\, r^2 dr + \cancel{p(r) dr} + \cancel{p(r) r} - \cancel{p(r) r} - \cancel{p(r) dr} - \frac{\partial p(r)}{\partial r} dr\, r + \dots \right] =$$

$$= h\,d\theta \left[\rho\,\omega^2 r^2 dr - r \frac{\partial p}{\partial r} dr\right]$$

cioè $\frac{\partial p}{\partial r} = \rho\,\omega^2 r$ $\qquad p(r) = p(0) + \frac{1}{2}\rho\,\omega^2 r^2$

Detto $h(r)$ l'equazione della superficie libera del liquido l'energia potenziale delle forze agenti $U = mg\,h(r) - \frac{1}{2} m\omega^2 r^2$ deve essere costante

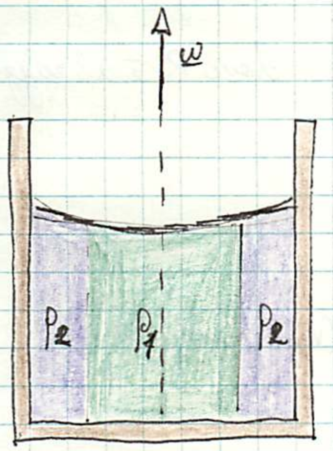
$$mg\,h(r) - \frac{1}{2} m\omega^2 r^2 = mg\,h(0)$$

$$h(r) = h(0) + \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

oppure: $p(r) = p(0) + \rho g\,(h(r) - h(0))$
$= p(0) + \frac{1}{2}\rho\,\omega^2 r^2$

$$h(r) = h(0) + \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

Due liquidi miscelabili di densità $\rho_1 < \rho_2$ vengono mescolati in un recipiente cilindrico. Il recipiente viene posto in rotazione con velocità angolare ω costante attorno all'asse verticale. Trovare la legge con cui varia la densità della miscela al variare della distanza dal centro.



Quando il recipiente è fermo i due liquidi si mescolano dando luogo ad una miscela di densità $\bar{\rho}$ uniforme con $\rho_1 < \bar{\rho} < \rho_2$

$$\left(\bar{\rho} = \frac{m_1 + m_2}{V_1 + V_2} = \frac{m_1 + m_2}{\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2}} \right.$$ se m_1 ed m_2 sono le masse dei due liquidi)

Quando il recipiente è posto in rotazione la forza centrifuga (proporzionale alla massa) tende a portare verso l'esterno il liquido più pesante e la densità $\rho(r)$ cambia con r = distanza dall'asse di rotazione.

Si ponga $\rho(r) = \rho_1 f(r)$

poiché $\rho_1 \leq \rho(r) \leq \rho_2$ si ha $1 \leq f(r) \leq \frac{\rho_2}{\rho_1}$

Si consideri il fluido compreso tra due cilindri di altezza h e raggio r ed r+dr ; l'energia potenziale centrifuga associata è

$$dU = -\frac{1}{2}\,dm\,\omega^2 r^2 = -\frac{1}{2}\,\omega^2 r^2\,\rho_1 f(r)\,2\pi r\,dr\,h$$

quindi l'energia potenziale totale vale

$$U = -\frac{1}{2}\,\omega^2 \rho_1 h\, 2\pi \int_0^{R} f(r)\, r^3\, dr$$ dove R è il raggio del contenitore

La massa totale dei due liquidi è:

$$m_1 + m_2 = \int_0^R 2\pi r\,dr\,h\,\rho(r) = 2\pi h \rho_1 \int_0^R f(r)\, r\, dr$$

All'equilibrio si deve avere

$m_1 + m_2 =$ costante e U minima cioè

$$\int_0^R f(r)\, r\, dr = \text{costante} \qquad \int_0^R f(r)\, r^3\, dr \quad \text{massimo}$$

A causa del fattore r^3 questo secondo integrale è massimo per $f(r)$ massima (cioè $f(r) = \rho_2/\rho_1$) per r prossimo a R

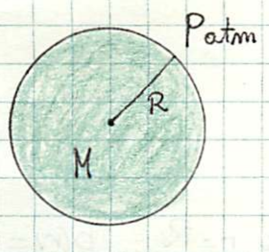
quindi $$f(r) = \begin{cases} \rho_2/\rho_1 & r^* < r \leq R \\ 1 & 0 \leq r \leq r^* \end{cases}$$

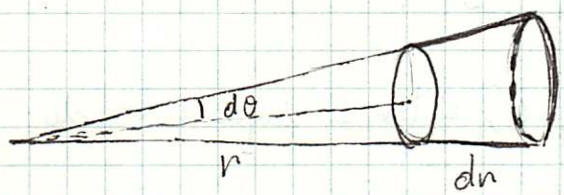
ovvero $$\rho(r) = \begin{cases} \rho_2 & r^* < r \leq R \\ \rho_1 & 0 \leq r \leq r^* \end{cases}$$ r^* è dato da:

$$m_1 + m_2 = \pi h \left[\rho_1 r^{*2} + \rho_2 \left(R^2 - r^{*2} \right) \right]$$

Il raggio medio della terra è $R = 6.37\ 10^6$ m e la sua massa $M = 5.98\ 10^{24}$ Kg. Supponendo che la densità del pianeta sia costante e che esso sia schematizzabile con un fluido, trovare la variazione di pressione al variare della distanza dal centro a causa dei soli effetti gravitazionali

---





Si consideri il volumetto di fluido contenuto nel cono di semiapertura $d\theta$ e compreso tra r ed $r+dr$; all'equilibrio la somma delle forze esterne agenti su di esso (forza gravitazionale +3 forze di pressione) deve annullarsi. Proiettando nella direzione radiale:

$$-G\frac{M\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3}\;M\frac{\pi(r\,d\theta)^2dr}{\frac{4}{3}\pi R^3}}{r^2} + p(r)\pi(r\,d\theta)^2 - p(r+dr)\pi\left((r+dr)\,d\theta\right)^2 +$$

$$+\ p(r)\ 2\pi r\,d\theta\ dr\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-d\theta\right) = 0$$

$$-G\frac{M^2}{\frac{4}{3}R^5}\,r^3\,dr\,d\theta^2 + \cancel{p(r)\pi r^2 d\theta^2} - \cancel{p(r)\pi r^2 d\theta^2} - \cancel{p(r)\pi 2 r\,dr\,d\theta^2} - \frac{dp}{dr}\pi\,dr\ r^2 d\theta^2$$

$$+\ \cancel{2\pi\, p(r)\, r\,dr\,d\theta^2} = 0$$

$$\frac{dp}{dr} = - \frac{G M^2}{\frac{4}{3} R^6 \pi} r$$

posto $\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$

$$\frac{d\,p(r)}{dr} = - \frac{4}{3}\pi \rho^2 G\, r$$

$$p(r) - p(0) = -\frac{2}{3}\pi \rho^2 G\, r^2$$

La costante $p(0)$ si trova imponendo che per $r=R$ $p(r)=p_{atm}$

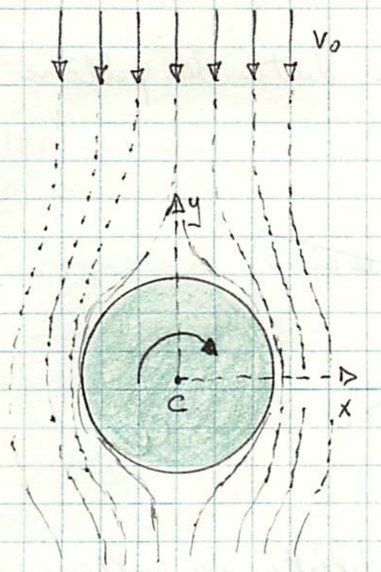
$$p_{atm} = p(0) - \frac{2}{3}\pi\rho^2 G R^2$$

$$p(r) = p_{atm} + \frac{2}{3}\pi\rho^2 G \left(R^2 - r^2\right)$$

al centro della terra

$$p(0) = p_{atm} + \frac{2}{3}\pi\rho^2 G R^2 \simeq \frac{2}{3}\pi\rho^2 G R^2 \simeq 1.73\ 10^6 \text{ atm.}$$

Un pallone di massa m e raggio a avanza nell'aria a velocità v_0 costante in modulo ruotando con velocità angolare ω costante intorno all'asse verticale. Trovare la forza deflettente che l'aria di densità ρ esercita sul pallone e calcolare il raggio di curvatura della traiettoria del pallone.

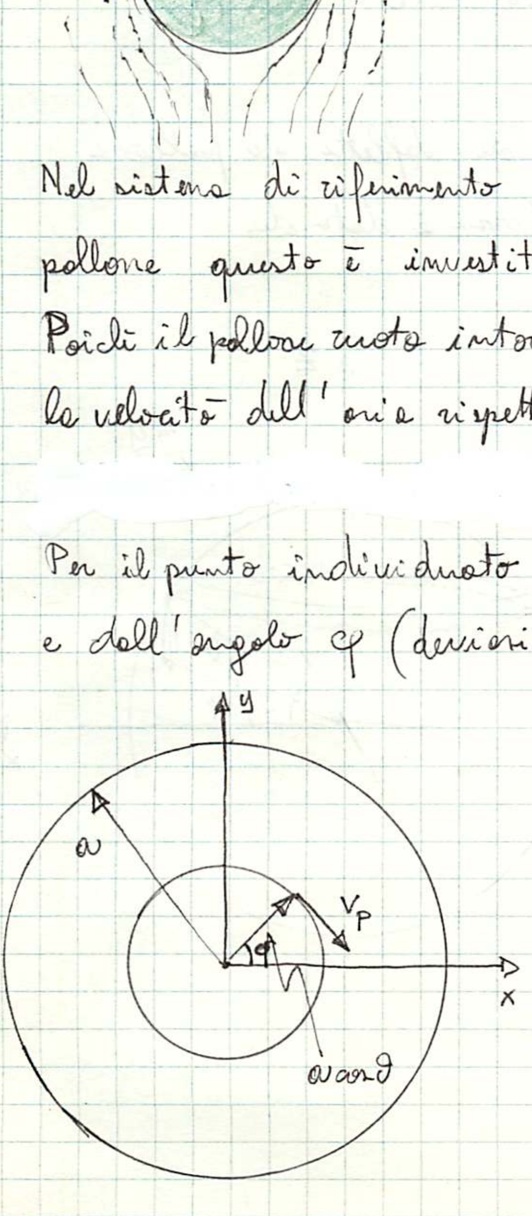


Nel sistema di riferimento $Cxyz$ solidale al centro di massa del pallone questo è investito da un getto d'aria a velocità v_0

Poichè il pallone ruota intorno all'asse verticale z passante per C la velocità dell'aria rispetto ai punti periferici

non è costante

Per il punto individuato dall'angolo θ (altezza rispetto al piano xy) e dall'angolo φ (deviazione rispetto al piano xz)



$$-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

$$0 \le \varphi \le 2\pi$$

$$|v_P| = \omega a \cos\theta$$

Poiché il pallone non viene frenato dall'aria possiamo supporre che la velocità dell'aria sia ovunque tangente alla superficie del pallone e ~~volga~~ sia modificata (trascinamento) dalla velocità periferica del pallone:

$V_D = V_0 + \omega a \cos\theta$ nella metà destra del pallone $(x>0)$

$V_S = V_0 - \omega a \cos\theta$ " " sinistra " " $(x<0)$

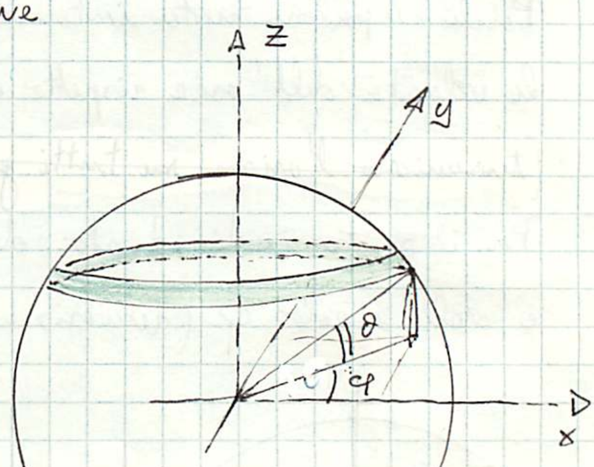
In base al teorema di Bernoulli tra sinistra e destra del pallone si genera una differenza di pressione data da:

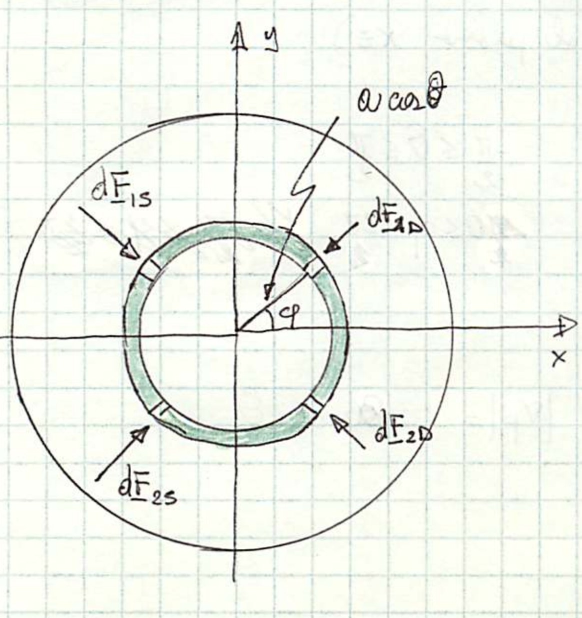
$$P_S + \frac{1}{2}\rho V_S^2 + \cancel{\rho g (z_0 + a\sin\theta)} = P_D + \frac{1}{2}\rho V_D^2 + \cancel{\rho g (z_0 + a\sin\theta)}$$

$$P_S - P_D = \frac{1}{2}\rho\left(V_D^2 - V_S^2\right) = 2\rho a \omega V_0 \cos\theta \quad > 0$$

questa pressione da origine ad una forza che deflette il pallone da sinistra verso destra. La forza è data da

$$F_x = \int dF_x \quad \text{dove}$$





$$dF_x = \left(d\underline{F}_{1S} + d\underline{F}_{2S} + d\underline{F}_{1D} + d\underline{F}_{2D} \right) \cdot \hat{\imath} =$$

$$= \left[(p_S - p_D) \quad a\cos\theta\, d\varphi \; a\, d\theta \quad \cos\varphi \cos\theta \right] \cdot 2 =$$

$$= 4 \rho a^3 \omega v_0 \; \cos^3\theta\, d\theta \; \cos\varphi\, d\varphi$$

$$F_x = 4\rho a^3 \omega v_0 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta\, d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\, d\varphi =$$

$$= 4\rho a^3 \omega v_0 \int_{-1}^{1} (1-t^2)\, dt \quad \sin\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 4\rho a^3 \omega v_0 \left(t - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_{-1}^{1} = \frac{16}{3} \rho a^3 \omega v_0$$

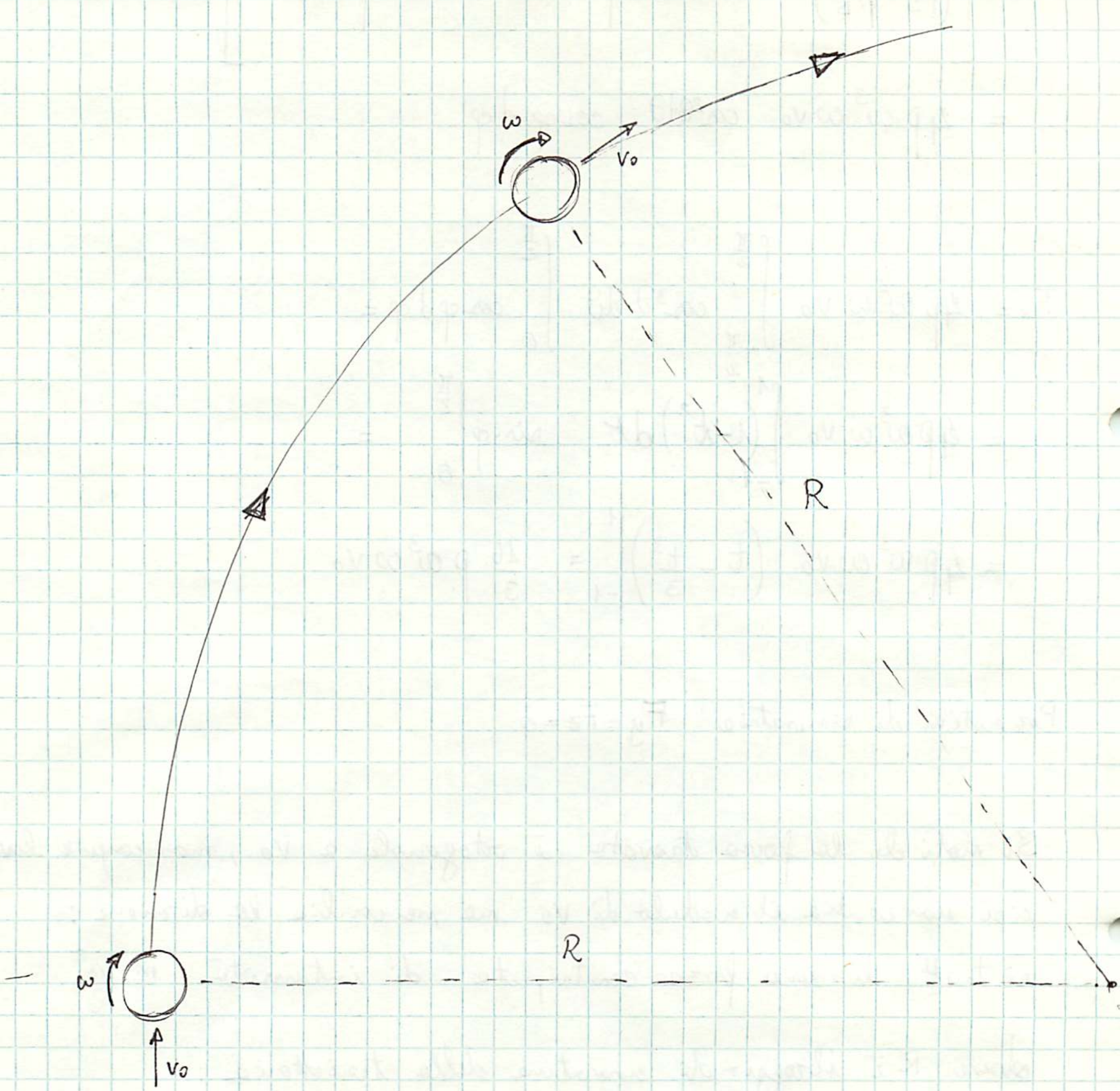
Per motivi di simmetria $F_y = F_z = 0$

Si noti che la forza trovata è ortogonale a v_0, non compie lavoro cioè non cambia il modulo di v_0 ma ne cambia la direzione: si tratta di una forza centripeta di intensità $m \frac{v_0^2}{R}$ dove R è il raggio di curvatura della traiettoria:

$$\frac{16}{3} \rho a^3 \omega v_0 = m \frac{v_0^2}{R}$$

$$R = \frac{3}{16} \frac{m v_0}{\rho a^3 \omega} = \frac{\pi}{4} \frac{m}{\frac{4}{3}\pi a^3 \rho} \frac{v_0}{\omega}$$

4



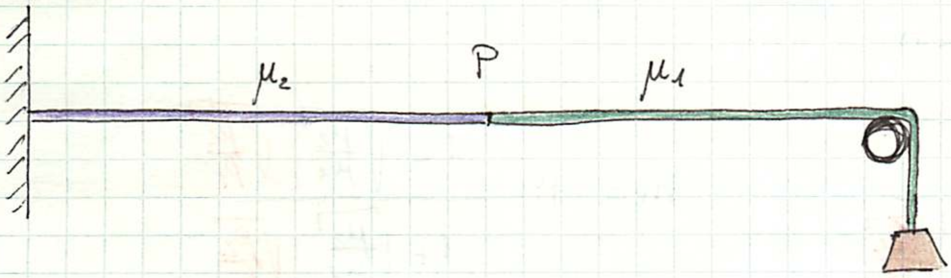
Due sbarre aventi densità di massa ρ_1 e ρ_2

Due corde con differenti densità lineari di massa μ_1

e modulo di Young E sono saldate in P

e μ_2 sono collegate insieme in un punto P e mantenute tese da una tensione τ. Un'onda trasversale di frequenza ν ed ampiezza A si propaga lungo la prima ~~corda~~ sbarra.

Imponendo la conservazione dell'intensità dell'onda e la continuità dell'ampiezza in P mostrare che si generano un'onda trasmessa ed una riflessa e trovare le relative ampiezze A_t ed A_r.



L'intensità dell'onda (= energia trasmessa attraverso una qualsiasi sezione nell'unità di tempo) per una corda elastica è:

$$I = \underbrace{\frac{1}{2} A^2 \omega^2 \mu}_{\frac{dE}{dl}} \cdot v = w \cdot v \qquad w = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 = \frac{dE}{dV} = \frac{1}{2} \frac{dm}{dV} \omega^2 A^2$$

dove la velocità v è data da $v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}}$ $\quad v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

Per le due ~~corde~~ sbarre sarà

$$I_1 = \frac{1}{2} A^2 \omega^2 \underbrace{\sqrt{\tau \mu_1}}_{\sqrt{E\rho_1}} \qquad I_2 = \frac{1}{2} A_t^2 \omega^2 \underbrace{\sqrt{\tau \mu_2}}_{\sqrt{E\rho_2}}$$

se non si avesse onda riflessa la continuità dell'ampiezza

$A = A_t$ porta a $I_1 \neq I_2$

Se invece si pone $A + A_r = A_t$

la conservazione dell'intensità (cioè dell'energia) dà

$$\frac{1}{2}A^2\omega^2\underset{\sqrt{E\rho_1}}{\sqrt{\tau\mu_1}} = \frac{1}{2}A_t^2\omega^2\underset{\sqrt{\rho_2 E}}{\sqrt{\tau\mu_2}} + \frac{1}{2}A_r^2\omega^2\underset{\sqrt{E\rho_1}}{\sqrt{\tau\mu_1}}$$

cioè
$$\begin{cases} A^2 - A_r^2 = A_t^2\sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} \\ A + A_r = A_t \end{cases} \qquad \begin{cases} A - A_r = A_t\sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} \\ A + A_r = A_t \end{cases}$$

$$\begin{cases} -A_r + A_t = A \\ A_r + \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}\overset{\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}}{} A_t = A \end{cases}$$

$$A_t = \frac{2A}{1+\sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}} \qquad A_r = A\,\frac{1-\sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}}{1+\sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}}$$

se $\rho_1 = \rho_2$ / $\mu_1 = \mu_2$ (sbarra / corda omogenea) $\qquad A_r = 0 \qquad A_t = A$

se $\rho_1 \ll \rho_2$ / $\mu_1 \ll \mu_2$ $\qquad A_r = -A \qquad A_t = 0$

se $\rho_2 \gg \rho_1$ / $\mu_2 > \mu_1$ $\qquad 0 < A_t < A \qquad A_r < 0 \qquad$ onda riflessa sfasata di π rispetto all'incidente

se $\mu_1 > \mu_2$ / $\rho_1 > \rho_2$ $\qquad A_t > 0 \qquad A_r > 0 \qquad$ onda riflessa in fase