

TERMODINAMICA

5x2h

Il calore latente di evaporazione dell'acqua a 100°C è $\lambda = 539 \text{ cal}\cdot\text{g}^{-1}$. Considerate una massa $m=18 \text{ g}$ di acqua a 100°C . Trovare il calore che occorre per farla evaporare, il lavoro fatto dal vapore d'acqua (in appross. di gas ideale) e la variazione di energia interna.



La quantità di calore necessaria all'evaporazione è:

$$Q = m\lambda = 9702 \text{ cal} = 9702 \cdot 4.184 \text{ J} = 40613 \text{ J}$$

Il sistema passa da un volume iniziale $V_i = \frac{m}{\rho}$

$$\rho = 1 \text{ g cm}^{-3} \quad \text{ad un volume finale} \quad V_f = n \frac{RT}{P}$$

Il lavoro di espansione contro la pressione atmosferica è:

$$L = P(V_f - V_i) \approx P V_f = nRT =$$

$$= 1 \cdot 8.314 \cdot (273.16 + 100) = 3102 \text{ J}$$

La variazione di energia interna è

$$\Delta U = Q - L = 37511 \text{ J}$$

$$N_A = \text{numero di Avogadro} = \frac{1g}{\text{massa di nucleone}} = \frac{1g}{1.6 \cdot 10^{-24}g} \approx 6 \cdot 10^{23}$$

1 mole di ... = N_A ...

$$\text{numero di moli di una certa molecola} = n = \frac{N}{N_A}$$

$$= \frac{\text{massa}}{\text{num di nucleoni} \times \text{masse di nucleone}} \frac{1}{N_A} =$$

$$= \frac{m \cdot g^{-1} \cdot 1g}{\text{peso molecolare} \cdot 1.6 \cdot 10^{-24}g} \frac{1}{N_A} = \frac{m \text{ (numero peso)}}{\text{peso molecolare (numero peso)}}$$

Una mole di gas, costituita da $n=2$ moli di gas perfetto monoatomico, compie una trasformazione reversibile con legge $P = bT^2$ con $b = 2 \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-2}$. La temperatura passa da $T_0 = 400 \text{ K}$ a $T_f = 300 \text{ K}$. Si calcoli il lavoro L compiuto dal gas, la quantità di calore Q scambiata, la capacità termica molecolare C per la trasformazione considerata.

il lavoro fatto è dato da:

$$L = \int_{V_0}^{V_f} P dV \quad \text{ma } P = bT^2 \quad V = \frac{nRT}{P} = \frac{nR}{bT}$$

$$dV = -\frac{nR}{b} \frac{dT}{T^2}$$

$$L = \int_{T_0}^{T_f} bT^2 \left(-\frac{nR}{b}\right) \frac{dT}{T^2} = nR(T_0 - T_f) = 1663 \text{ J gas e lavoro}$$

La quantità di calore scambiata è:

$$\begin{aligned} Q &= \Delta U + L = nC_v(T_f - T_0) + nR(T_0 - T_f) = n(T_0 - T_f) \left(R - \frac{3}{2}R\right) = \\ &= -\frac{1}{2}nR(T_0 - T_f) = -831.5 \text{ J} = -199 \text{ cal gas cede calore} \end{aligned}$$

La capacità termica molecolare è:

$$C = \frac{1}{n} \frac{\delta Q}{dT} = \frac{1}{n} \frac{\frac{1}{2}nR dT}{dT} = \frac{1}{2}R = 4.157 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$$

si noti che $C \neq C_v = \frac{3}{2}R$ poiché la traf. non è isocora
 $C \neq C_p = \frac{5}{2}R$ " " " " " isobara

$$pT^{-2} = \text{const} \quad \Rightarrow \quad pV^2 = \text{const} \quad \text{politropica } \kappa=2$$

in generale:

$$pV^\kappa = \text{const.}$$

$$dpV^\kappa + p\kappa V^{\kappa-1} dV = \cancel{\text{const}} 0$$

$$Vdp + \kappa p dV = \cancel{\text{const}} 0$$

$$pV = RT \quad (\text{ideale})$$

$$pdV + Vdp = R dT$$

$$pdV - \kappa p dV = R dT$$

$$\delta L = pdV = \frac{R dT}{1 - \kappa}$$

$$dU = \delta Q - \delta L$$

$$c_v dT = c_\kappa dT - \frac{R dT}{1 - \kappa}$$

$$c_\kappa = c_v + \frac{R}{1 - \kappa}$$

- isobara $p = \text{const} \quad \kappa = 0$

$$c_p = c_0 = c_v + R$$

- isocora $V = \text{const} \quad \kappa = \infty$

$$c_v = c_{\infty} = c_v$$

- adiabatica $\kappa = \gamma = \frac{c_v + R}{c_v}$

$$c_\gamma = 0$$

- $pT^{-2} = \text{const} \quad \kappa = 2$

$$c_2 = c_v - R = \frac{1}{2} R \quad \text{per gas monoatomico}$$

La figura rappresenta la sezione verticale di un dispositivo immerso nell'atmosfera, costituito da un recipiente A solido e ad un sostegno fisso e da un recipiente B sostenuto nel modo indicato: in A e B ci sono n_A e n_B moli di gas perfetto monoatomico. I due pistoni di massa $m = 20 \text{ kg}$ e sezione $S = 1 \text{ dm}^2$ possono scivolare senza attrito.

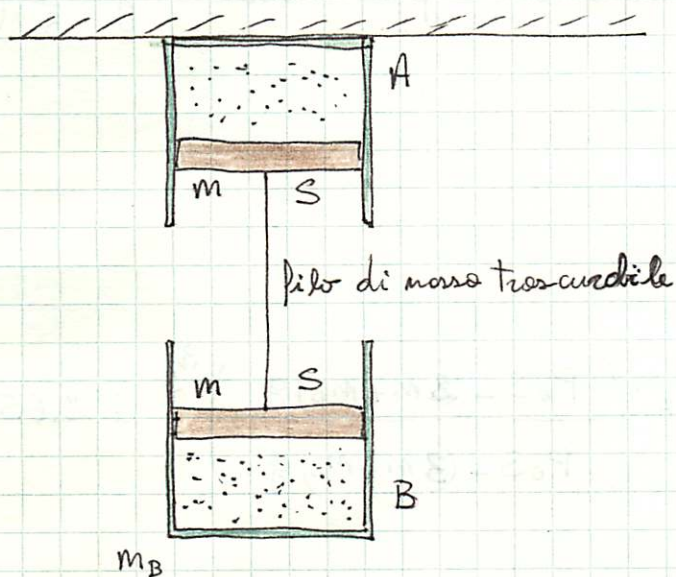
Si determini la differenza $P_B - P_A$ tra le pressioni di A e B.

Si determini P_A e P_B se $m_B = 10 \text{ kg}$.

Le parti dei contenitori sono adiabatiche ed inizialmente

$V_A = V_B = 2 \text{ litri}$. Sopra il pistone

di chiude B si aggiunge gas pari fino a far raddoppiare la massa. Si calcolino i valori finali V'_A e V'_B nell'ipotesi di trasf. reversibile.



Detta P_0 la pressione atmosferica, l'equilibrio del pistone di A, dà:

$$P_A S + (2m + m_B)g = P_0 S$$

$$P_A = P_0 - (2m + m_B)g \frac{1}{S}$$

L'equilibrio del contenitore B è:

$$m_B g + P_B S = P_0 S$$

$$P_B = P_0 - \frac{m_B g}{S}$$

$$P_B - P_A = \frac{2m g}{S} = 39200 \text{ Pa} = 0.388 \text{ atm.}$$

$$P_A = P_0 - \frac{(2m + m_B)g}{S} = 0.515 \text{ atm}$$

$$P_B = P_0 - \frac{m_B g}{S} = 0.903 \text{ atm}$$

Se la morsa del secondo pistone viene raddoppiata, le nuove pressioni sono:

$$P_A' = P_0 - \frac{(3m + m_B)g}{S}$$

$$P_B' = P_B$$

Poiché la trap. è adiabatica $pV^\gamma = \text{cost}$ $\gamma = \frac{5}{3}$ (gas monoatomico)

$$V_B' = V_B = 2 \text{ litri}$$

$$P_B' V_B'^\gamma = P_B V_B^\gamma$$

$$V_A' = V_A \left(\frac{P_A}{P_A'} \right)^{\frac{1}{\gamma}} = V_A \left(\frac{P_0 S - (2m + m_B)g}{P_0 S - (3m + m_B)g} \right)^{\frac{3}{5}} = 2.65 \text{ litri}$$

adiabatico gas perfetto: $\delta Q = 0$ $dU = -\delta L$

$$dU = n c_v dT \quad \delta L = p dV = \frac{nRT}{V} dV$$

$$\frac{dV}{V} = - \frac{c_v}{R} \frac{dT}{T} \quad \ln \frac{V}{V_0} = - \frac{c_v}{R} \ln \frac{T}{T_0} = + \ln \left(\frac{T}{T_0} \right)^{-\frac{c_v}{R}}$$

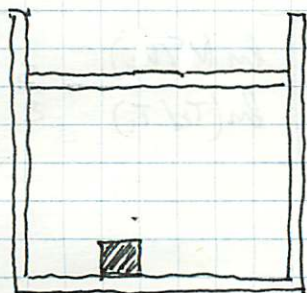
$$\frac{V}{V_0} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{-\frac{c_v}{R}}$$

$$V \cdot T^{\frac{c_v}{R}} = \text{costante}$$

$$p^{\frac{c_v}{R}} V^{\frac{c_v}{R} + 1} = \text{cost} \quad p V^{\frac{c_v/R + 1}{c_v/R}} = \text{cost}$$

gas monoatomico $c_v/R = \frac{3}{2}$ $pV^{5/3} = \text{cost.}$

Un blocchetto di rame di calore specifico $C_R = 0.91 \text{ cal g}^{-1} \text{ K}^{-1}$ e 2 grammi di azoto (per un molecolare es) costituiscono un sistema termicamente isolato in equilibrio alla temperatura $T_1 = 300 \text{ K}$. Il volume occupato dal gas in questo stato è $V_1 = 3.6 \text{ l}$ e quello occupato dal blocchetto trascurabile. Si effettua una compressione reversibile di posto il volume dell'azoto è $V_2 = 1.5 \text{ l}$ e la temperatura del sistema sale a $T_2 = 344 \text{ K}$. Considerando l'azoto come un gas perfetto biatomico, calcolare la massa di rame presente.



la compressione reversibile da V_1 a V_2 è adiabatica:

$$\delta Q = dU + \delta L = 0$$

$$\delta L = p dV = nRT \frac{dV}{V}$$

dove V è il volume dell'azoto, T la temperatura del sistema

$$\text{e } n = \text{numero di moli di azoto} = \frac{2}{28} = \frac{1}{14}$$

$$dU = n c_v dT + m C_R dT$$

dove m è la massa incognita di rame

$$nRT \frac{dV}{V} = - (n c_v + m C_R) dT$$

$$\frac{dV}{V} = - \frac{n c_v + m C_R}{nR} \frac{dT}{T}$$

$$\ln \frac{V_1}{V_2} = - \frac{n c_v + m C_R}{n R} \ln \frac{T_1}{T_2}$$

$$V T^{\frac{n c_v + m C_R}{n R}} = \text{const}$$

$$n R \ln \frac{V_1}{V_2} + n c_v \ln \frac{T_1}{T_2} = - m C_R \ln \frac{T_1}{T_2}$$

$$m = \frac{n R \ln \frac{V_1}{V_2} - n c_v \ln \frac{T_2}{T_1}}{C_R \ln \frac{T_2}{T_1}}$$

$$= \frac{n R}{C_R} \frac{\ln \frac{V_1}{V_2} - \frac{5}{2} \ln \frac{T_2}{T_1}}{\ln \frac{T_2}{T_1}} = \frac{n R}{C_R} \left[\frac{\ln(V_1/V_2)}{\ln(T_2/T_1)} - \frac{5}{2} \right]$$

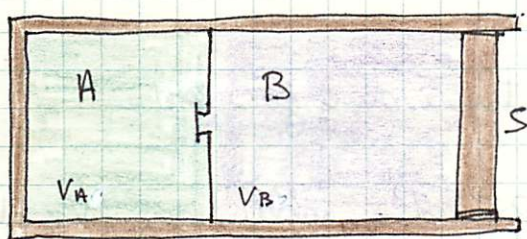
$$= \frac{1}{14} \frac{8.314 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}}{(0.91/4.186) \text{ g}^{-1} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}} \left[\frac{\ln(3.61/1.5)}{\ln(344/300)} - \frac{5}{2} \right] = 10.6 \text{ g}$$

Un recipiente cilindrico disposto orizzontalmente è chiuso da un pistone di sezione $S = 10^{-2} \text{ m}^2$ scorrevole senza attrito.

Una parete divide il cilindro in due camere A e B di volumi $V_A = 11.2$ litri e $V_B = 22.4$ litri in ciascuna delle quali è contenuto un gas perfetto monoatomico alle pressioni $P_A = 2 \text{ atm}$ $P_B = 1 \text{ atm}$. Sulla parete c'è una valvola che fa passare il gas da B ad A se $P_B > P_A$. Cilindro e pistone sono adiabatici e di capacità termica trascurabile. La parete divisoria è di capacità termica trascurabile e trasparente al colore.

Inizialmente la temperatura dei due gas è $T_0 = 273 \text{ K}$.

Il pistone viene compresso reversibilmente: si calcoli la pressione dei due gas all'apertura della valvola e al fine corso del pistone



Il sistema dei due gas compie una transf. adiabatica

$$\delta Q = dU + \delta L = 0$$

Solo il gas B compie lavoro: $\delta L = P_B dV_B < 0$

Poiché la transf. è reversibile e la parete divisoria trasparente al colore ad ogni istante si ha $T_A = T_B = T$

$$dU = c_V d[(n_A + n_B) T] = c_V (n_A + n_B) dT$$

fino a quando la valvola non si apre

$$n_A = \frac{P_{A0} V_{A0}}{RT_0} = 1$$

$$n_B = \frac{P_{B0} V_{B0}}{RT_0} = 1$$

$$dT = \frac{d(P_B V_B)}{n_B R}$$

$$c_V (n_A + n_B) \left(\frac{dP_B V_B}{n_B R} + \frac{P_B dV_B}{n_B R} \right) = - P_B dV_B$$

$$\frac{c_V}{R} \frac{n_A + n_B}{n_B} \frac{dP_B}{P_B} = - \left(\frac{c_V}{R} \frac{n_A + n_B}{n_B} + 1 \right) \frac{dV_B}{V_B}$$

$$\frac{dP_B}{P_B} = -k \frac{dV_B}{V_B} \quad k = 1 + \frac{R}{c_V} \frac{n_B}{n_A + n_B} = \frac{4}{3}$$

$$P_B V_B^k = \text{costante} = P_{B0} V_{B0}^k$$

la differenza di pressione tra i due gas è

$$P_B - P_A = \left(\frac{n_B}{V_B} - \frac{n_A}{V_A} \right) RT \text{ ed } \bar{e} \text{ nulla per } V_B = V_B^* = V_A$$

$$\text{per il quale valore si ha } P_A^* = P_B^* = P_{B0} \left(\frac{V_{B0}}{V_A} \right)^k = 2.52 \text{ atm.}$$

Da questo istante in poi la valvola si apre ed il gas fluisce da B → A; poiché la transf. è reversibile ora $P_A = P_B$

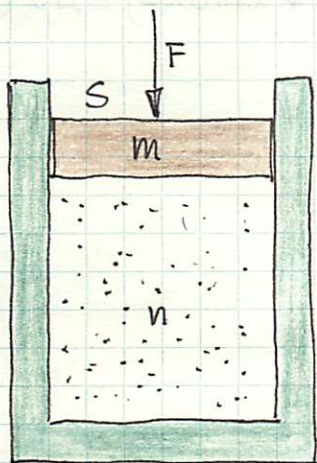
$$\text{La temperatura dei due gas è } T = \frac{P_B (V_A + V_B)}{(n_A + n_B) R}$$

$$\text{e quindi } dT = \frac{(V_A + V_B) dP_B + P_B dV_B}{(n_A + n_B) R} \quad \text{usando } \delta Q = 0$$

$$\frac{dP_B}{P_B} = -k' \frac{dV_B}{V_A + V_B} \quad k' = 1 + \frac{R}{c_V} = \frac{c_P}{c_V} = \frac{5}{3}$$

$$P_B (V_A + V_B)^{k'} = P_B^* (V_A + V_B^*)^{k'} \text{ per } V_B = 0 \quad P_B^{**} = P_A^{**} = P_B^* 2^{k'} = 8 \text{ atm.}$$

Un recipiente cilindrico disposto verticalmente, chiuso da un pistone di massa $m = 10 \text{ kg}$ e sezione $S = 20 \text{ cm}^2$ scorrevole senza attrito, contiene $n = 0.1$ moli di gas perfetto ^{monatomico} alla pressione p_0 ed alla temperatura $T_0 = 300 \text{ K}$. Una forza F fa abbassare il pistone fino a dimezzare il volume del gas. Il lavoro eseguito da F e dalla pressione atmosferica è $L_1 = 300 \text{ J}$ e la pressione finale è $p_f = 3 p_0$. Si calcoli la quantità di calore Q scambiata del gas con l'esterno durante la trasformazione.



la pressione iniziale del gas è $p_0 = P_0 + \frac{mg}{S}$

dove P_0 è la pressione atmosferica $P_0 = 1.01 \cdot 10^5 \text{ N m}^{-2} = 1 \text{ atm}$

il volume iniziale è $V_0 = \frac{nRT_0}{p_0}$

Il cilindro si abbassa di un tratto $h = \frac{V_0}{2S}$

la forza peso compie un lavoro sul gas $L_2 = mgh = mg \frac{V_0}{2S}$

Il lavoro compiuto dal gas durante la compressione è:

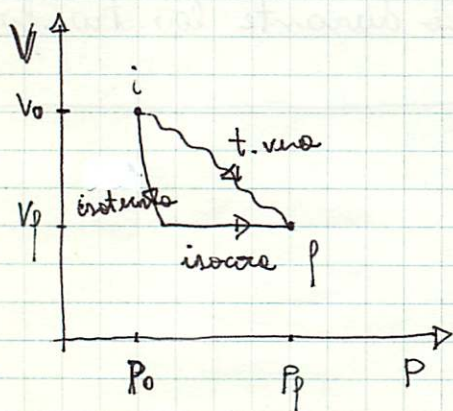
$$L = -(L_1 + L_2) = -\left(L_1 + mg \frac{V_0}{2S}\right)$$

La temperatura finale è data da $p_p V_p = n R T_p$

$$T_p = \frac{p_p V_p}{n R} = \frac{3}{2} \frac{p_0 V_0}{n R} = \frac{3}{2} T_0$$

la variazione di energia interna

$$\Delta U = n C_V (T_p - T_0) = n \frac{3}{2} R \frac{1}{2} T_0 = \frac{3}{4} n R T_0$$



$$\Delta U (\text{via isoterma + isocora}) = \Delta U (\text{trasf. vera})$$

il calore scambiato è quindi

$$Q = \Delta U + L = \frac{3}{4} n R T_0 - L_1 - mg \frac{V_0}{2S} = -153.7 \text{ J} = -36.7 \text{ cal.}$$

il gas cede calore all'esterno.

N.B. lavoro e calore scambiati dalla trasformazione ausiliaria (isoterma + isocora) sono diversi da quelli scambiati nella trasformazione vera.

Ad esempio $L_{\text{isoterma}} = \int_{V_0}^{V_f} p dV = \int_{V_0}^{V_f} \frac{n R T_0}{V} dV = n R T_0 \ln \frac{V_f}{V_0} = -n R T_0 \ln 2$

$$Q_{\text{isoterma}} = -n R T_0 \ln 2 \quad L_{\text{isocora}} = 0 \quad Q_{\text{isocora}} = \frac{3}{4} n R T_0$$

ma $\Delta U = Q_{\text{isoterma}} + Q_{\text{isocora}} - L_{\text{isoterma}} - L_{\text{isocora}} = \Delta U_{\text{trasformazione vera}}$

Un recipiente cilindrico è chiuso superiormente da un pistone scorrevole verticalmente di sezione $S = 5 \text{ dm}^2$ e massa $m = 20 \text{ kg}$.

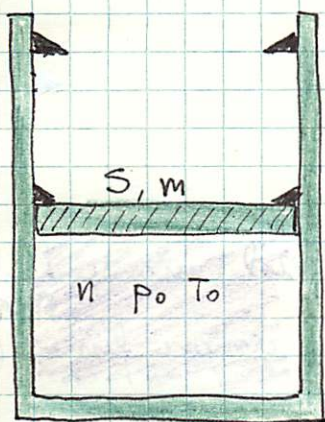
Inizialmente il pistone è bloccato e all'interno del recipiente si trovano $n = 30$ moli di gas perfetto biatomico a $p_0 = 10 \text{ atm}$ e $T_0 = 300 \text{ K}$.

La capacità termica del recipiente e del pistone è $C = 0.11 \text{ kcal K}^{-1}$.

Il pistone viene lasciato libero fino a che il volume del gas raddoppia e poi ribloccato; supponendo che il sistema gas + recipiente non scambia calore con l'esterno, determinare le nuove condizioni (p_1, V_1, T_1) del gas.

Il pistone viene poi lasciato libero di muoversi verso il basso.

Si calcoli la quantità di calore Q che il gas cede all'ambiente affinché il volume ritorni quello iniziale. Si calcolino anche i corrispondenti valori p_f e T_f del gas.



Il volume iniziale del gas è $V_0 = \frac{nRT_0}{p_0} = 0.074 \text{ m}^3 = 74 \text{ litri}$

Poiché il volume raddoppia $V_1 = 2V_0 = 148 \text{ litri}$

Nell'espansione il sistema gas + recipiente fa lavoro contro le forze peso e la pressione esterna (trasf. non quantitativa!)

$$L = (mg + P_0 S) h \quad h = \frac{V_1 - V_0}{S} = \frac{V_0}{S}$$

$$L = mg \frac{nRT_0}{P_0 S} + nRT_0 \frac{P_0}{P_0} = 7.77 \cdot 10^3 \text{ J}$$

Poiché il sistema gas + contenitore non scambia calore con l'esterno, per il gas ~~si trova~~ all'equilibrio termico si ha:

$$\Delta U = -L + Q \quad \text{ma} \quad \Delta U = n c_v (T_1 - T_0) \quad Q = -C(T_1 - T_0) > 0$$

$$T_1 = T_0 - \frac{L}{C + n c_v}$$

$$c_v = \frac{5}{2} R \quad (\text{gas biatomico})$$

$$T_1 = 293 \text{ K}$$

$$p_1 = \frac{n R T_1}{V_1} = 4.9 \text{ atm}$$

A questo punto il gas + recipiente comincia a raffreddarsi ~~o~~ fino ad equilibrio la pressione interna con quella esterna (pressione finale)

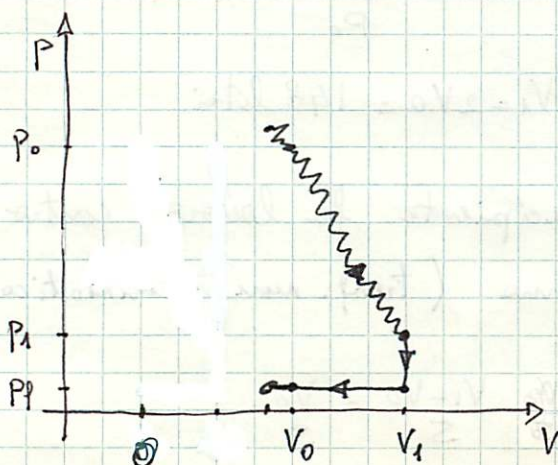
$$p_p = \frac{mg}{S} + p_a = 1.04 \text{ atm} \quad \text{poiché } V_p = V_0$$

$$T_p = \frac{p_p V_p}{n R} = 31 \text{ K}$$

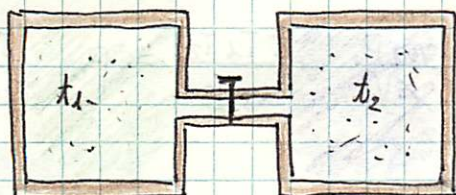
Durante la trasf. in cui la pressione va da p_1 a p_p il pistone rimane fermo (isocoro) poi comincia a scendere a pressione costante (isobara)

$$\text{Punto } T^* = \frac{p_p V_1}{n R} = 62 \text{ K}$$

$$Q = n c_v (T^* - T_1) + n c_p (T_p - T^*) = -41 \text{ kcal}$$



Due gas perfetti biatomici occupano due volumi contigui uguali e si trovano alla stessa pressione. Le loro temperature sono $t_1 = 20^\circ\text{C}$ e $t_2 = 40^\circ\text{C}$. Mediante apertura di un rubinetto i gas vengono messi in comunicazione. Determinare le temperature e le pressioni di equilibrio della miscela, sup. le trasform. adiabatiche



Sia V_0 e p_0 il volume e la pressione iniziale di ciascun gas ed n_1 ed n_2 il rispettivo numero di moli

$$p_0 V_0 = n_1 R T_1 = n_2 R T_2$$

dove $T_i = t_i + 273.16$

Quando il rubinetto viene aperto i due gas si espandono rapidamente fino a raddoppiare il volume e poi tendono.

- Nella espansione $\Delta U = \Delta Q = 0$ e $\Delta T = 0$.
- Nella tendimento a temperatura T_0 il calore ceduto dal secondo gas è uguale a quello accolto dal primo

$$c_2 n_2 (T_2 - T_0) = c_1 n_1 (T_0 - T_1) \quad T_1 < T_0 < T_2$$

Poiché i due gas sono entrambi biatomici $c_1 = c_2$

inoltre

$$n_1 T_1 = n_2 T_2$$

$$T_1 (T_2 - T_0) = T_2 (T_0 - T_1)$$

$$T_1 T_2 - T_1 T_0 = T_2 T_0 - T_1 T_2$$

$$T_0 = 2 \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} = 302.8 \text{ K} = 29.7 \text{ }^\circ\text{C}$$

Le pressioni dei due gas alla temperatura T_0 nel volume $2V_0$ sono:

$$2V_0 p_1 = n_1 R T_0$$

$$p_1 = \frac{n_1 R}{2V_0} \frac{2 T_1 T_2}{T_1 + T_2} = p_0 \frac{T_2}{T_1 + T_2}$$

$$p_2 = p_0 \frac{T_1}{T_1 + T_2}$$

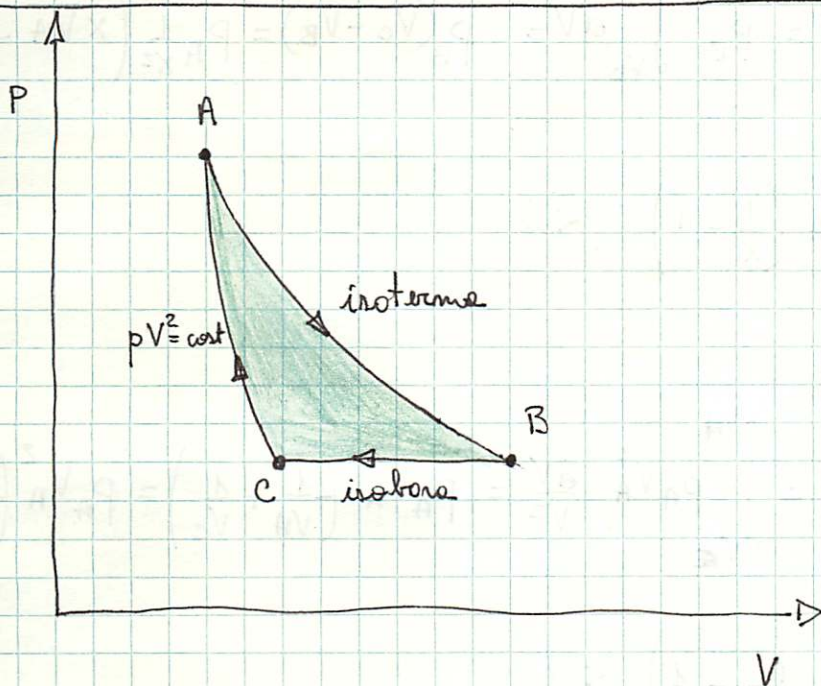
la pressione della miscela \bar{p}

$$p = p_1 + p_2 = p_0$$

identica a quella iniziale dei gas separati.

(Si noti che p è una variabile intensiva)

Una certa quantità di gas perfetto subisce una espansione
 isoterma reversibile dallo stato A ($P_A = 1 \text{ atm}$ $V_A = 20 \text{ l}$) allo
 stato B con $V_B = x^2 V_A$ $x = 1.1$, quindi una compressione
 isobara fino a ^{nuovo} stato C e poi una trasformazione con legge
 $pV^2 = \text{cost}$ che riporta il gas nello stato A. Si calcoli V_C
 ed il lavoro compiuto dal gas nel ciclo.



Durante la prima isoterma $pV = \text{cost}$ quindi

$$P_B = \frac{P_A V_A}{V_B} = \frac{1}{x^2} P_A$$

durante la isobara $p = \text{cost}$ quindi $P_C = P_B = \frac{1}{x^2} P_A$

durante l'ultima trasp. $pV^2 = \text{cost}$ quindi

$$P_C V_C^2 = P_A V_A^2$$

$$V_C = V_A \sqrt{\frac{P_A}{P_C}} = x V_A$$

$$L_{A \rightarrow B} = \int_A^B p dV = \int_{V_A}^{V_B} p_A V_A \frac{dV}{V} = p_A V_A \ln \frac{V_B}{V_A} = p_A V_A \ln x^2 > 0$$

infatti $pV = p_A V_A$ $p = \frac{p_A V_A}{V}$

$$L_{B \rightarrow C} = \int_B^C p dV = p_B \int_{V_B}^{V_C} dV = p_B (V_C - V_B) = p_A \frac{1}{x^2} (x V_A - x^2 V_A) =$$

$$= p_A V_A \left(\frac{1}{x} - 1 \right) < 0$$

$$L_{C \rightarrow A} = \int_C^A p dV = \int_{V_C}^{V_A} p_A V_A^2 \frac{dV}{V^2} = p_A V_A^2 \left(\frac{1}{V_A} + \frac{1}{V_C} \right) = p_A V_A^2 \left(\frac{1}{V_A} + \frac{1}{x V_A} \right) =$$

$$= p_A V_A \left(\frac{1}{x} - 1 \right) < 0$$

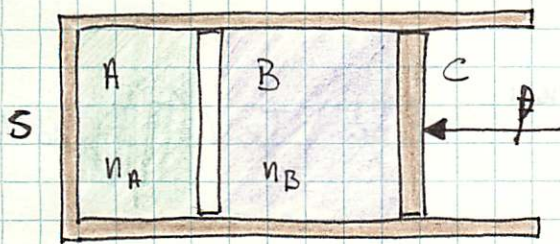
$$L_{\text{ciclo}} = L_{A \rightarrow B} + L_{B \rightarrow C} + L_{C \rightarrow A} = p_A V_A \left(\ln x^2 + 2 \left(\frac{1}{x} - 1 \right) \right) =$$

$$= 20 \cdot 101.3 \text{ J} \cdot 2 \left(\ln x + \frac{1}{x} - 1 \right) =$$

$$= 17.8 \text{ J}$$

$L_{\text{ciclo}} = \text{area triangolare } ABC > 0$

Un recipiente cilindrico di sezione S è disposto orizzontalmente e diviso in tre parti A, B e C da due pistoni scorrevoli senza attrito: in A ci sono n_A moli di gas perfetto biatomico, in B n_B di gas perfetto monoatomico e C è in comunicazione con l'atmosfera. Il pistone AB è trasparente di colore mentre il pistone BC ed il recipiente sono isolanti. La capacità termica del recipiente e dei due pistoni è C_1 . Quando sul pistone BC agisce solo la pressione atmosferica il volume di B è V_{B0} . Sul pistone BC si esercita una forza F perpendicolare al pistone e di intensità opportunamente variabile in modo da comprimere il gas reversibilmente. Si calcoli l'intensità F in funzione della compressione $z \equiv V_B/V_{B0}$ del gas contenuto in B.



Ad ogni fase della trasformazione il pistone AB è in equilibrio meccanico $P_A = P_B$ e termico $T_A = T_B$ e quindi ad ogni istante t :

$$V_A = \frac{n_A}{n_B} V_B$$

All'inizio ($F=0$) si ha:

$$V_{A0} = \frac{n_A}{n_B} V_{B0}$$

$$P_A = P_B = P_0 = 1 \text{ atm}$$

$$T_{A0} = T_{B0} = \frac{P_0 V_{B0}}{n_B R}$$

Quando il pistone BC avanza di dx il volume $V_A + V_B$ varia di $-S dx$:

$$-S dx = d(V_A + V_B) = dV_B + \frac{n_A}{n_B} dV_B = \frac{n_A + n_B}{n_B} dV_B$$

$$dx = - \frac{n_A + n_B}{n_B} \frac{dV_B}{S}$$

La forza totale agente sul pistone BC, $P_0 S + f$, è controbilanciata dalla pressione P_B $P_B S = P_0 S + f$ ed il lavoro infinitesimo compiuto dal sistema vale:

$$\delta L = - P_B S dx = \frac{n_A + n_B}{n_B} P_B dV_B$$

Poiché la trap. è adiabatica: $dU = -\delta L$

$$\left(C_1 + n_A c_V^A + n_B c_V^B \right) dT_B = - \frac{n_A + n_B}{n_B} P_B dV_B$$

usando $P_B = \frac{n_B R T_B}{V_B}$ e posto $\kappa = 1 + \frac{2(n_A + n_B)}{2C_1/R + 5n_A + 3n_B}$

$$\frac{dT_B}{T_B} = - (\kappa - 1) \frac{dV_B}{V_B}$$

da integrare da $\frac{T_B}{T_{B0}} = \left(\frac{V_{B0}}{V_B} \right)^{\kappa - 1}$ cioè $T_B V_B^{\kappa - 1} = T_{B0} V_{B0}^{\kappa - 1}$

e anche $P_B V_B^\kappa = P_{B0} V_{B0}^\kappa$

poiché $f = (P_B - P_0) S$

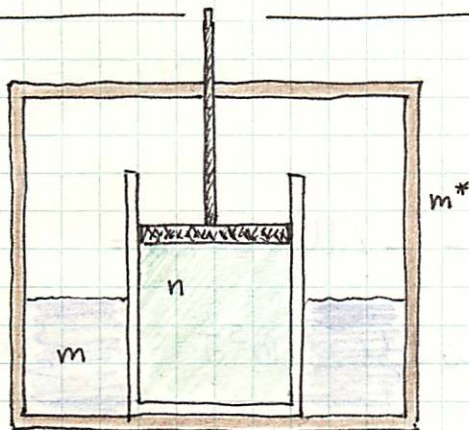
$$f = \left[P_{B0} \left(\frac{V_{B0}}{V_B} \right)^\kappa - P_0 \right] S = P_0 S \left(\frac{1}{z^\kappa} - 1 \right) \quad z \equiv \frac{V_B}{V_{B0}}$$

Un recipiente cilindrico di volume $V_0 = 300$ litri chiuso superiormente da un pistone scorrevole senza attrito contiene $n = 50$ moli di un gas perfetto monoatomico. Il cilindro è immerso in un secondo recipiente contenente una massa $m = 10$ kg di acqua ed è adiabaticamente isolato dall'esterno.

Inmiscelmate acqua e gas

hanno la stessa temperatura $T_0 = 293$ K

Si abbassa il pistone in modo reversibile fino a comprimere il gas di volume $V_f = 100$ litri. Considerando le pareti del cilindro perfettamente permeabili al calore e la capacità termica dei contenitori equivalente a $m^* = 2$ kg di acqua, si calcoli la temperatura T_f finale del sistema e il lavoro L fatto su di esso dall'esterno.



La capacità termica complessiva dell'acqua e dei contenitori è:

$$C = (m + m^*) c_{\text{H}_2\text{O}} = 12 \cdot 10^3 \text{ g} \cdot 1 \text{ cal} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{g}^{-1} = 12 \text{ kcal} \cdot \text{K}^{-1}$$

Il sistema gas + acqua + contenitori compie una transf. adiabatica:

$$\delta Q = dU + \delta L = 0$$

Poiché solo il gas compie lavoro $\delta L = p dV$

inoltre

$$dU = (dU)_{\text{gas}} + (dU)_{\text{acqua equiv}} = (n e_v + C) dT$$

$$p dV = - (n c_v + C) dT$$

$$\text{usando } p = \frac{nRT}{V}$$

$$\frac{dV}{V} = - (n c_v + C) \frac{1}{nR} \frac{dT}{T}$$

$$\ln\left(\frac{V_f}{V_0}\right) = -\kappa \ln\left(\frac{T_f}{T_0}\right) = \ln\left(\frac{T_f}{T_0}\right)^{-\kappa} \quad \text{dove } \kappa = \frac{n c_v + C}{nR} = \frac{3}{2} + \frac{C}{nR}$$

$$V_f T_f^\kappa = V_0 T_0^\kappa$$

$$V T^\kappa = \text{cost} \Rightarrow V (pV)^\kappa = \text{cost} \Rightarrow p V^{1+\frac{\kappa}{nR}} = \text{cost}$$

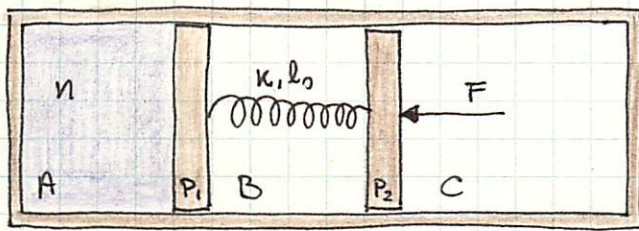
$$T_f = T_0 \left(\frac{V_0}{V_f}\right)^{\frac{1}{\kappa}} = 295.6 \text{ K}$$

il lavoro fatto dall'esterno \bar{z}

$$L = - \text{lavoro fatto dal sistema} = - (-\Delta U) = \Delta U =$$

$$= (n c_v + C) (T_f - T_0) = 32 \text{ kcal} = 1.33 \cdot 10^5 \text{ J}$$

Un recipiente cilindrico a pareti adiabatiche disposto orizzontalmente è diviso in 3 parti A, B e C da due pistoni adiabatici P_1 e P_2 di superficie $S = 4 \text{ dm}^2$ scorrevoli senza attrito. A contiene $n = 1$ mole di gas perfetto monoatomico alla temperatura $T_{A0} = 273 \text{ K}$ e volume $V_{A0} = 11.2$ litri. In B c'è il vuoto ed i pistoni sono tenuti separati da una molla di costante elastica $\kappa = 8 \cdot 10^4 \text{ N m}^{-1}$ e lunghezza di riposo l_0 . In C c'è il vuoto. In condizioni di equilibrio quanto vale il modulo della forza F perpendicolare al pistone P_2 necessaria a tenere fermo il pistone P_2 e quanto vale la compressione δ della molla? Si aumenta F in modo da far spostare P_1 e P_2 di $d_1 = 0.1 \text{ m}$ e $d_2 = 0.05 \text{ m}$; la transf. è irreversibile ed il lavoro compiuto da F vale $L = 850 \text{ J}$. Si calcoli la temperatura finale T_A e la pressione finale P_A del gas.



La pressione del gas in A è $P_{A0} = \frac{nRT_{A0}}{V_{A0}} = 2 \text{ atm}$.

Poiché la molla è in condizioni di equilibrio:

$$F = P_{A0} \cdot S = 8106 \text{ N}$$

L'equilibrio di P_2 implica: $\kappa \delta = F$

$$\delta = \frac{F}{\kappa} = 0.101 \text{ m}$$

Il lavoro L è speso in parte per comprimere la molla ed in parte per comprimere il gas (L_A)

$$L_A = L = \frac{1}{2} k \left[(\delta + d_2 - d_1)^2 - \delta^2 \right] = 345 \text{ J}$$

Poiché la compressione del gas è adiabatica

$$\Delta U_A = n c_v (T_A - T_{A0}) = L_A$$

$$T_A = T_{A0} + \frac{L_A}{n c_v} = 273 + \frac{345}{1 \cdot \frac{3R}{2}} = 300.7 \text{ K}$$

Relazioni di Maxwell e funzioni termodinamiche

Variabili indipendenti S e V

$$dU = T dS - p dV$$

$$U = U(S, V) \quad \text{energia interna}$$

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V dS + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S dV$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V = T \quad \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S = -p$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V$$

Variabili indipendenti S e p

$$d(U + pV) = T dS + V dp$$

$$H = H(S, p) = U + pV \quad \text{entalpia}$$

$$dH = \left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_p dS + \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_S dp$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_p = T \quad \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_S = V$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_p$$

Variabili indipendenti T e V

$$d(U - TS) = -S dT - p dV$$

$$F = F(T, V) = U - TS \quad \text{energia libera di Helmholtz}$$

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T dV$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = -S \quad \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = -p$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$$

Variabili indipendenti T e p

$$d(\mu - TS + pV) = -SdT + Vdp$$

$$G = G(T, p) = \mu - TS + pV$$

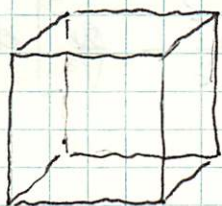
energia libera di Gibbs

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T dp$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p = -S \quad \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T = V$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

Considerato un gas di Van der Waals $\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V-b) = nRT$
 scrivere l'equazione delle adiabatiche reversibili, e
 l'espressione dell'energia interna.



Scelte come variabili indipendenti V e T si ha

$$dS(T, V) = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dV = \frac{\delta Q}{T} = 0$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{T} \left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_V = \frac{1}{T} n c_V$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \quad \text{dalle eq. di Maxwell (energia libera$$

$$\text{di Helmholtz } F \equiv U - TS \quad \left. \frac{\partial^2 F}{\partial V \partial T} = \frac{\partial^2 F}{\partial T \partial V} \right)$$

$$dT \frac{1}{T} n c_V = - \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V dV = - \frac{nR}{V-b} dV$$

$$\frac{dV}{V-b} = - \frac{c_V}{R} \frac{dT}{T}$$

$$\ln(V-b) = - \frac{c_V}{R} \ln T + \text{cost}$$

$$\boxed{(V-b) T^{\frac{c_V}{R}} = \text{costante}}$$

L'energia interna \bar{e} :

$$dU = \delta Q - \delta L = n c_v dT + \frac{nRT}{V-b} dV - p dV =$$

$$= n c_v dT + \frac{nRT}{V-b} dV - \left[\frac{nRT}{V-b} - \frac{a}{V^2} \right] dV =$$

$$= n c_v dT + \frac{a}{V^2} dV$$

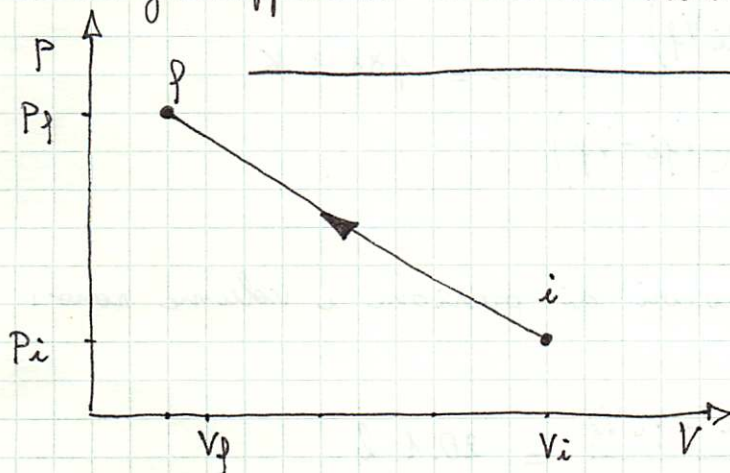
$$U(T, V) = n c_v T - \frac{a}{V} + \text{cost}$$

durante una espansione adiabatica ($\delta Q = 0$) nel vuoto ($\delta L = 0$)

risulta $dU = 0$ e poiché $dV > 0$, $dT < 0$ cioè il gas si raffredda.

Un gas perfetto contenuto in un cilindro munito di pistone scorrevole senza attriti, passa quasistaticamente da uno stato iniziale $p_i = 4.1 \text{ atm}$ $V_i = 32.0 \text{ l}$ ad uno finale $p_f = 15.5 \text{ atm}$ $V_f = 9.0 \text{ l}$ con una trasformazione rappresentata nel piano di Clapeyron da una retta. La quantità di gas corrisponde a $n = 5 \text{ moli}$.

Determinare la temperatura massima T^* raggiunta dal gas durante tale trasformazione ed i corrispondenti valori p^* e V^* della pressione e del volume. Si calcoli inoltre la variazione di entropia ΔS del gas supponendo che esso sia monoatomico.



La trasformazione \bar{i} del tipo $p = a - bV$ con a e b costanti

Poiché la trasformazione \bar{i} è reversibile vale l'equazione di stato dei gas perfetti $pV = nRT$

combinando si ha: $bV^2 - aV + nRT = 0$

da cui $V = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4nRTb}}{2b}$

Devendo essere sempre V reale occorre omettere il radicando non nullo

$$a^2 - 4nRTb \geq 0$$

$$\text{cioè: } T \leq \frac{a^2}{4nRb} \equiv T^*$$

Le costanti a e b si determinano dalle condizioni iniziali e finali

$$\begin{cases} p_i = a - bV_i \\ p_f = a - bV_f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = (p_f V_i - p_i V_f) / (V_i - V_f) \\ b = (p_f - p_i) / (V_i - V_f) \end{cases}$$

$$T^* = \frac{(p_f V_i - p_i V_f)^2}{4nR(p_f - p_i)(V_i - V_f)} = 488.3 \text{ K}$$

I corrispondenti valori di pressione e volume sono:

$$V^* = \frac{a}{2b} = \frac{p_f V_i - p_i V_f}{2(p_f - p_i)} = 20.1 \text{ l}$$

$$p^* = \frac{nRT^*}{V^*} = \frac{p_f V_i - p_i V_f}{2(V_i - V_f)} = 10.0 \text{ atm}$$

si noti che $V_i > V^* > V_f$ così che T^* è raggiunta nella trasformazione $i \rightarrow f$.

La variazione di entropia del gas può essere calcolata lungo la stessa trasformazione reversibile ^{già} considerata:

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{dU + \delta L}{T} = \frac{nc_v dT + p dV}{T}$$

essendo $p = a - bV$ e $T = \frac{aV - bV^2}{nR}$ si ha:

$$dS = nR \frac{\frac{c_v}{R} (a - 2bV) + (a - bV)}{aV - bV^2} dV$$

essendo il gas monoatomico $c_v = \frac{3}{2}R$ e quindi

$$dS = nR \frac{2(a - 2bV) + \frac{1}{2}a}{aV - bV^2} dV =$$

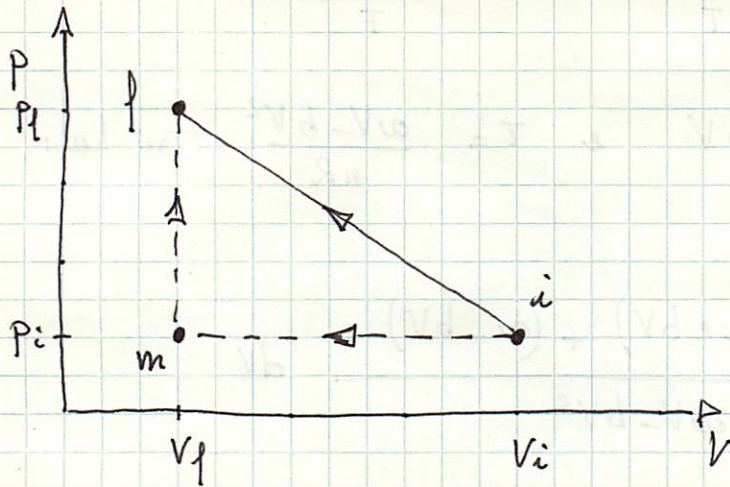
$$= nR \left[2 \frac{a - 2bV}{aV - bV^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a - bV} + \frac{1}{V} \right) \right] dV$$

$$\Delta S = \int_i^f dS =$$

$$= nR \left[2 \ln \left(\frac{P_f V_f}{P_i V_i} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{P_f}{P_i} \right) + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) \right] =$$

$$= nR \left[\frac{5}{2} \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) + \frac{3}{2} \ln \left(\frac{P_f}{P_i} \right) \right] = -48.9 \text{ J K}^{-1}$$

Alternativamente si può calcolare ΔS lungo due trasformazioni reversibili, una isobara ed una isocora, che vadano dallo stato iniziale i e quello finale f tramite uno stato intermedio m



$$\Delta S = \Delta S_{\text{isobara}} + \Delta S_{\text{isocora}}$$

$$\Delta S_{\text{isobara}} = n c_p \ln \left(\frac{T_m}{T_i} \right)$$

$$\Delta S_{\text{isocora}} = n c_v \ln \left(\frac{T_f}{T_m} \right)$$

essendo $T_i = \frac{P_i V_i}{nR}$ $T_m = \frac{P_i V_f}{nR}$ $T_f = \frac{P_f V_f}{nR}$

ed usando $c_p = \frac{5}{2} R$ $c_v = \frac{3}{2} R$ si ottiene:

$$\Delta S = nR \left[\frac{5}{2} \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) + \frac{3}{2} \ln \left(\frac{P_f}{P_i} \right) \right]$$

Ricevare l'equazione di stato linearizzata di un liquido nell'intorno di $t = 0^\circ\text{C}$ e $p = 1 \text{ atm}$. Trovare la legge delle trasformazioni isoterme, isobare, isocore: ^{adiabatica} ^{reversibile}. Trovare la temperatura finale di un certo volume d'acqua che in una trasformazione isocore passa da $t = 0^\circ\text{C}$ $p = 1 \text{ atm}$ a $p = 2 \text{ atm}$.

Poiché $V = V(p, t)$ sviluppando in serie di Taylor intorno a $t_0 = 0^\circ\text{C}$ e $p_0 = 1 \text{ atm}$ dove $V = V_0$:

$$V(p, t) = V_0 + \left. \frac{\partial V}{\partial p} \right|_0 (p - p_0) + \left. \frac{\partial V}{\partial t} \right|_0 (t - t_0) + \dots$$

$$V = V_0 \left[1 + \alpha (t - t_0) + \beta (p - p_0) \right] \quad dV = \alpha V_0 dt + \beta V_0 dp$$

$$\alpha = \frac{1}{V_0} \left. \frac{\partial V}{\partial t} \right|_{\substack{t=t_0 \\ p=p_0}}$$

$$\beta = \frac{1}{V_0} \left. \frac{\partial V}{\partial p} \right|_{\substack{t=t_0 \\ p=p_0}}$$

trasformazione isoterma:

$$dV = V_0 \beta dp = V_0 \alpha dt = 0 \quad \boxed{V_f - V_i = V_0 \beta (p_f - p_i)}$$

trasformazione isobara:

$$dV = V_0 \alpha dt = V_0 \beta dp = 0 \quad \boxed{V_f - V_i = V_0 \alpha (t_f - t_i)}$$

trasformazione isocora:

$$dV = 0 = V_0 \alpha dt + V_0 \beta dp \quad \boxed{t_f - t_i = - \frac{\beta}{\alpha} (p_f - p_i)}$$

Nel caso particolare $T_i = 0^\circ\text{C}$ $P_i = 1 \text{ atm}$ $P_f = 2 \text{ atm}$

$$T_f = -\frac{B}{\alpha} \text{ } ^\circ\text{C}$$

trasformazione adiabatica:

$$dS = 0 = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T dP \quad \text{avendo scelto } S = S(T, P)$$

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \Rightarrow \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P = \frac{1}{T} \left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_P = \frac{1}{T} c_p n$$

$$\text{dalle eq. di Maxwell} \quad \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \quad \left(G = U - TS + pV = G(P, T) \right)$$

$$\frac{n}{T} c_p dT = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dP = \alpha V_0 dP$$

energia libera di Gibbs

$$\frac{dT}{T} = \frac{\alpha V_0}{n c_p} dP$$

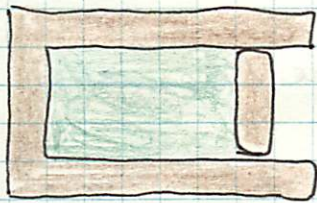
$$\ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) = \frac{\alpha V_0}{n c_p} (P_f - P_i)$$

$$\boxed{T_f = T_i \exp\left\{ \frac{\alpha V_0}{n c_p} (P_f - P_i) \right\}}$$

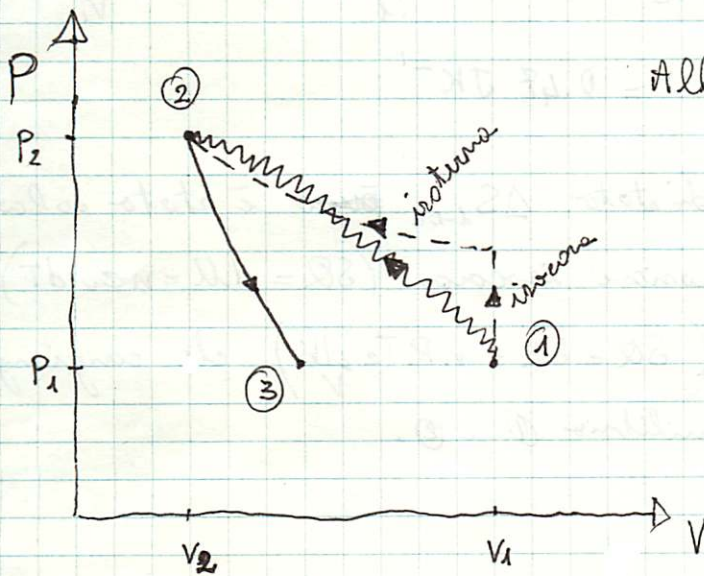
$n = 0.75$ moli di ossigeno sono contenute in un recipiente adiabatico dotato di una parete scorrevole senza attrito.

Inizialmente il gas è all'equilibrio con $T_1 = 305$ K e $p_1 = 1.15$ atm.

La pressione esterna viene bruscamente portata al valore $p_2 = 1.80$ atm e quindi si attende che il gas raggiunga un nuovo stato di equilibrio. 2. Successivamente la pressione esterna viene riportata lentamente al valore p_1 . Determinare la temperatura finale del gas e la variazione di entropia del gas.



A causa della parete mobile all'equilibrio la pressione esterna coincide con la pressione del gas



All'equilibrio 1:

$$p_1 V_1 = n R T_1$$

Nello stato di equilibrio 2 si ha $p_2 V_2 = n R T_2$

Durante la trasformazione ^{adiabatica} ~~reversibile~~ 1 → 2 a pressione esterna costante p_2 la variazione di energia interna del gas è

$$\Delta U = -L = -p_2(V_2 - V_1)$$

ma usando il gas ideale ^{diatomico} $\Delta U = n C_V (T_2 - T_1)$ con $C_V = \frac{5}{2} R$

$$n C_v (T_2 - T_1) = p_2 \left(\frac{n R T_1}{p_1} - \frac{n R T_2}{p_2} \right)$$

$$\frac{5}{2} (T_2 - T_1) = \frac{p_2}{p_1} T_1 - T_2 \quad T_2 = T_1 \frac{\frac{5}{2} + \frac{p_2}{p_1}}{\frac{5}{2} + 1} = T_1 \frac{1 + \frac{2}{5} \frac{p_2}{p_1}}{1 + \frac{2}{5}}$$

La trasformazione 2 → 3 è adiabatica reversibile:

$$T p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{costante} \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{\frac{5}{2} + 1}{\frac{5}{2}} = \frac{7}{5} \quad \frac{1-\gamma}{\gamma} = \frac{-\frac{5}{2}}{\frac{7}{5}} = -\frac{2}{7}$$

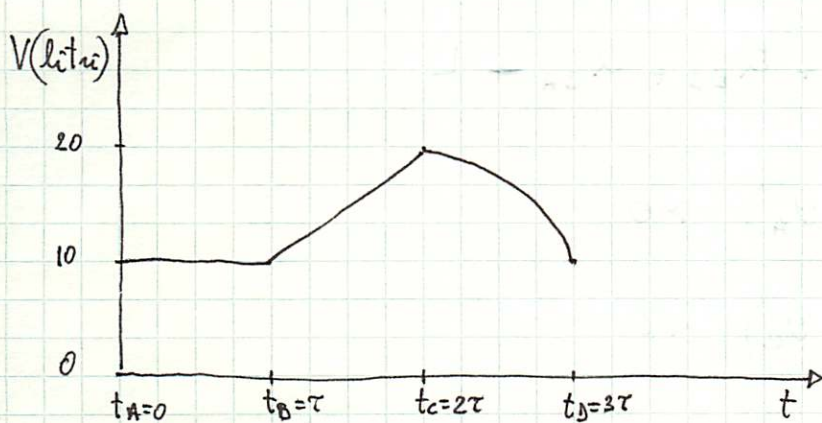
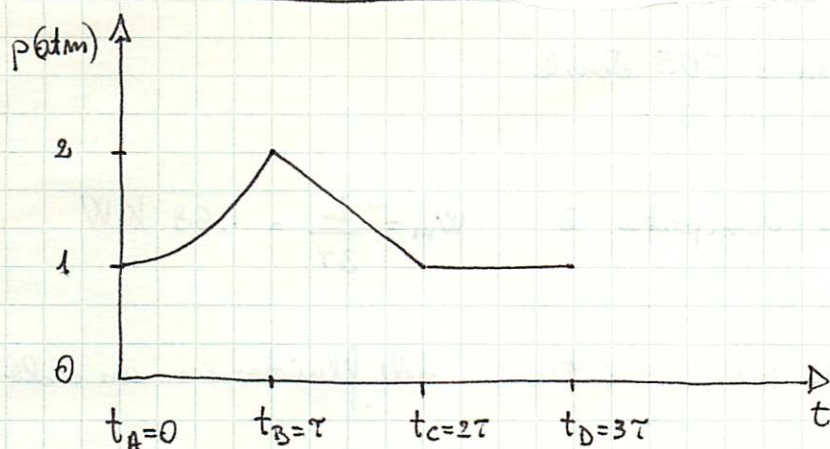
$$T_3 = T_2 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_1 \frac{1 + \frac{2}{5} \frac{p_2}{p_1}}{1 + \frac{2}{5}} \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{-\frac{2}{7}} = 311.70 \text{ K}$$

Durante quest'ultima trasformazione si ha $\Delta S_{2 \rightarrow 3} = 0$

$$\begin{aligned} \text{Quindi} \quad \Delta S = \Delta S_{1 \rightarrow 2} &= n C_v \ln \frac{T_2}{T_1} + n R \ln \frac{V_2}{V_1} = \\ &= 0.47 \text{ JK}^{-1} \end{aligned}$$

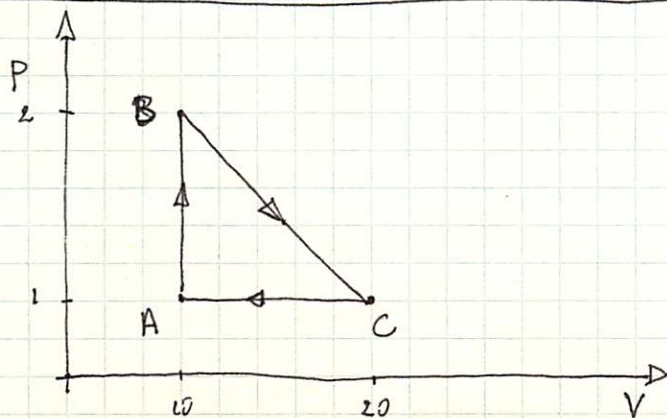
essendo S una funzione di stato $\Delta S_{1 \rightarrow 2}$ è stato calcolato seguendo la trasformazione isocora ($\delta Q = dU = n c_v dT$) e poi quella isoterma ($\delta Q = \delta L = n R T_2 \frac{dV}{V}$) che congiungono le due situazioni di equilibrio \textcircled{A} e \textcircled{B} .

Una macchina termica esegue un ciclo su un fluido di capacità termiche $C_V = 0.5 \text{ cal K}^{-1}$ e $C_P = 0.8 \text{ cal K}^{-1}$. Durante il ciclo la pressione ed il volume del fluido variano nel tempo come indicato in figura



Si ha $\tau = 0.1 \text{ s}$, $\theta_A = 10^\circ \text{C}$, $\theta_B = 300^\circ \text{C}$ e $\theta_C = 280^\circ \text{C}$.

Si rappresenti la trasformazione nel piano pV , si calcoli il lavoro L compiuto dalla macchina in un ciclo, la pressione e potenza medie $\overline{W_m}$ dissipate la quantità di calore scambiata Q_{BC} del fluido nella trasformazione $B \rightarrow C$ ed il rendimento η .



Nel piano pV il ciclo è costituito da una isocora, una $p+Va = \text{costante}$ ed una isobora.

$$\text{Il lavoro compiuto in un ciclo è } L = \frac{1}{2} (V_C - V_A) (P_B - P_A) = \\ = \frac{1}{2} \cdot 10 \text{ litri} \cdot 1 \text{ atm} = 505 \text{ Joule}$$

$$\text{La potenza media dissipata è } W_m = \frac{L}{37} = 1.68 \text{ kW}$$

La variazione di energia interna del fluido in un ciclo è nulla:

$$\Delta U = 0 = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA} = L$$

$$Q_{AB} = C_V (\theta_B - \theta_A) > 0$$

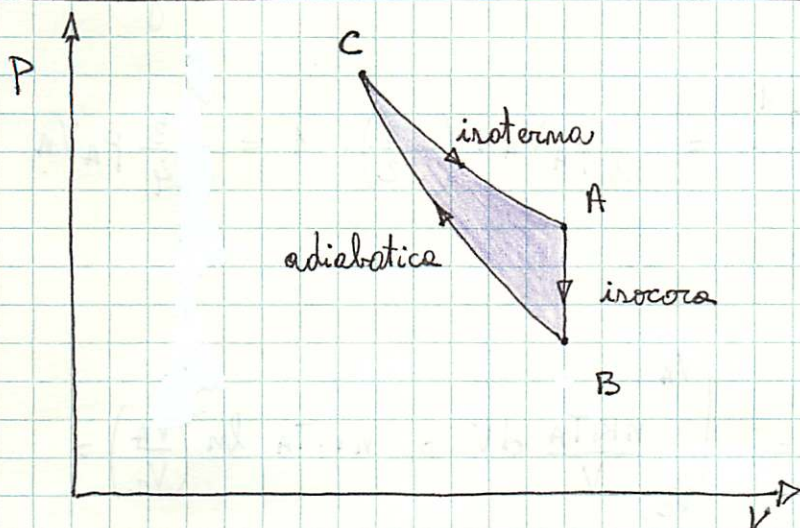
$$Q_{CA} = C_P (\theta_A - \theta_C) < 0$$

$$Q_{BC} = L - Q_{AB} - Q_{CA} = L - C_V (\theta_B - \theta_A) - C_P (\theta_A - \theta_C) = 192 \text{ cal} > 0$$

il rendimento $\bar{\eta}$:

$$\eta = \frac{L}{Q_{AB} + Q_{BC}} = 0.36$$

Con $n=2$ moli di gas perfetto monoatomico si effettua un ciclo reversibile costituito da una trasformazione isocora a partire da A con $V_A = 8$ litri $T_A = 580$ K fino a B con $T_B = T_A/2$, una compressione adiabatica fino allo stato C con $T_C = T_A$, una espansione isoterma dallo stato C a quello iniziale A. Si calcoli il volume V_C ed il rendimento η del ciclo.



$$\text{trasp. } A \rightarrow B : \quad P_B = P_A/2 \quad T_B = T_A/2 \quad V_B = V_A$$

$$L_{AB} = 0$$

$$Q_{AB} = n c_v (T_B - T_A) = - n c_v \frac{T_A}{2} < 0$$

$$\text{trasp. } B \rightarrow C : \quad T_C = T_A$$

$$T V^{\gamma-1} = \text{cost} \quad T_C V_C^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1}$$

$$\left(\frac{V_C}{V_B}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_B}{T_C} \quad \frac{V_C}{V_A} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = 2^{\frac{1}{1-\gamma}}$$

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{5}{3} \quad \frac{1}{1-\gamma} = \frac{1}{1-\frac{5}{3}} = -\frac{3}{2}$$

$$V_C = V_A 2^{-\frac{3}{2}} = \frac{V_A}{2^{\frac{3}{2}}}$$

$$V_C = 2.83 \text{ litri}$$

$$Q_{BC} = 0$$

$$L_{BC} = \int_B^C p dV = \int_{V_B}^{V_C} p_B V_B^\gamma V^{-\gamma} dV = p_B V_B^\gamma \frac{V^{-\gamma+1}}{-\gamma+1} \Big|_{V_B}^{V_C} =$$

$$= p_B \frac{V_B^\gamma V_C^{1-\gamma} - V_B}{1-\gamma} = p_B V_B \frac{\left(\frac{V_B}{V_C}\right)^{\gamma-1} - 1}{1-\gamma} =$$

$$= p_B V_B \frac{\frac{T_C}{T_B} - 1}{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{2} p_A V_A \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot 1 = -\frac{3}{4} p_A V_A < 0$$

trasf. C → A:

$$L_{C \rightarrow A} = \int_C^A p dV = \int_{V_C}^{V_A} \frac{nRT_A}{V} dV = nRT_A \ln\left(\frac{V_A}{V_C}\right) =$$

$$= nRT_A \ln 2^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} nRT_A \ln 2 = \frac{3}{2} p_A V_A \ln 2 > 0$$

$$\Delta U_{C \rightarrow A} = 0 = Q_{C \rightarrow A} - L_{C \rightarrow A} \quad Q_{C \rightarrow A} = +\frac{3}{2} p_A V_A \ln 2 > 0$$

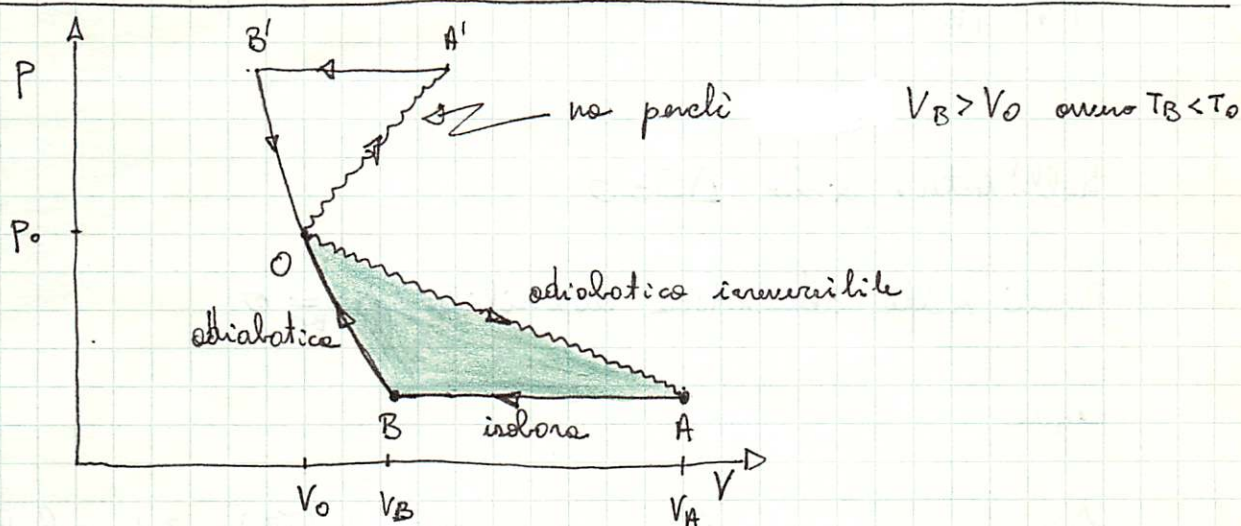
calore assorbito ^{nel ciclo} (>0) = $Q_{C \rightarrow A}$

lavoro fatto nel ciclo = $L_{C \rightarrow A} + L_{BC} + L_{AB}$

$$\text{rendimento } \eta = \frac{L_{CA} + L_{BC}}{Q_{CA}} = \frac{\frac{3}{2} p_A V_A \ln 2 - \frac{3}{4} p_A V_A}{\frac{3}{2} p_A V_A \ln 2} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2 \ln 2} = 0.28$$

Una mole di gas perfetto monoatomico subisce le seguenti trasformazioni: una trasf. adiabat. irreversibile dallo stato iniziale con pressione $p_0 = 1 \text{ atm}$ e $V_0 = 22.4$ litri ad uno stato A; una compressione isobara reversibile da A in B con $V_B = V_A/2$ in cui il gas compie un lavoro $L = -1.5 \cdot 10^3 \text{ J}$; una trasformazione adiabat. reversibile da B allo stato iniziale $p_0 V_0$. Si calcoli il lavoro L^* compiuto dal gas nella adiabat. irreversibile, la pressione il volume e la temperatura negli stati A e B e la variazione di entropia nella adiabat. irreversibile.



$$\text{Si ha } T_0 = \frac{p_0 V_0}{nR} = 273.16 \text{ K}$$

Nella trasformazione isobara reversibile si ha:

$$L = p_A (V_B - V_A) = -\frac{1}{2} p_A V_A = -\frac{1}{2} n R T_A$$

$$\text{da cui } T_A = -\frac{2L}{nR} = 360.8 \text{ K}$$

Durante la trasformazione adiabat. reversibile

$$\Delta U = n c_V (T_A - T_0) = -L^* \quad L^* = n c_V (T_0 - T_A) = -1.09 \cdot 10^3 \text{ J}$$

$$\text{Nello stato B la temperatura } \bar{T}_B = T_A \frac{V_B}{V_A} = 180.4 \text{ K}$$

inoltre

$$V_B = V_0 \left(\frac{T_0}{T_B} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = V_0 \left(\frac{T_0}{T_B} \right)^{\frac{3}{2}} = 41.7 \text{ litri}$$

$$p_B = \frac{n R T_B}{V_B} = 0.36 \text{ atm.}$$

$$V_A = V_B \cdot 2 = 83.4 \text{ litri}$$

$$p_A = p_B = 0.36 \text{ atm}$$

Nell'intero ciclo $\Delta S = 0$

Poiché nella adiabatica reversibile $\Delta S_{B0} = 0$

segue

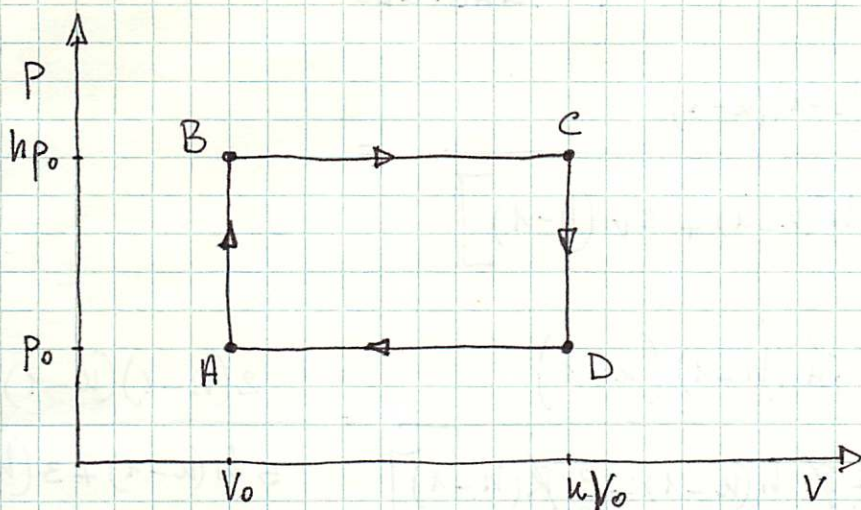
$$\Delta S_{\text{adiab. inv.}} = -\Delta S_{AB} = -n c_p \ln \left(\frac{T_B}{T_A} \right) = 3.44 \text{ cal K}^{-1}$$

isolano: $dU = n c_v dT = \delta Q - p dV = \delta V - p \frac{nR}{P} dT$

$$\delta Q = n(c_v + R) dT$$

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = n c_p \frac{dT}{T}$$

Una certa massa costituita da n moli di gas perfetto monoatomico esegue il ciclo $A B C D$ ^{reversibile} e partine da $A (V_0, p_0)$ con $B (V_0, h p_0)$, $C (h p_0, \kappa V_0)$ $D (\kappa V_0, p_0)$ ($h > 1$, $\kappa > 1$).
 Calcolare le temperature T_B , T_C e T_D in funzione di T_A ,
 il rendimento del ciclo e valutarlo per $h = \kappa = 2$



$$T_A = \frac{p_0 V_0}{n R}$$

$$T_B = \frac{h p_0 V_0}{n R} = h T_A$$

$$T_C = \frac{h p_0 \kappa V_0}{n R} = h \kappa T_A$$

$$T_D = \frac{p_0 \kappa V_0}{n R} = \kappa T_A$$

Il calore ^{scambiato} durante le 4 trap. è

$$Q_{AB} = n c_v (T_B - T_A) = n c_v T_A (h - 1)$$

$$Q_{BC} = n c_p (T_C - T_B) = n c_p T_A h (\kappa - 1)$$

$$Q_{CD} = n c_v (T_D - T_C) = n c_v T_A \kappa (1 - h)$$

$$Q_{DA} = n c_p (T_A - T_D) = n c_p T_A (1 - \kappa)$$

Il calore assorbito è $Q_{AB} + Q_{BC}$ (positivo)

Il lavoro fatto nel ciclo è $L = p_0 V_0 (h-1)(k-1)$

il rendimento $\bar{\eta}$: $\eta = \frac{L}{Q_{AB} + Q_{BC}} =$

$$= \frac{p_0 V_0 (h-1)(k-1)}{n T_A [c_p h (k-1) + c_v (h-1)]} =$$

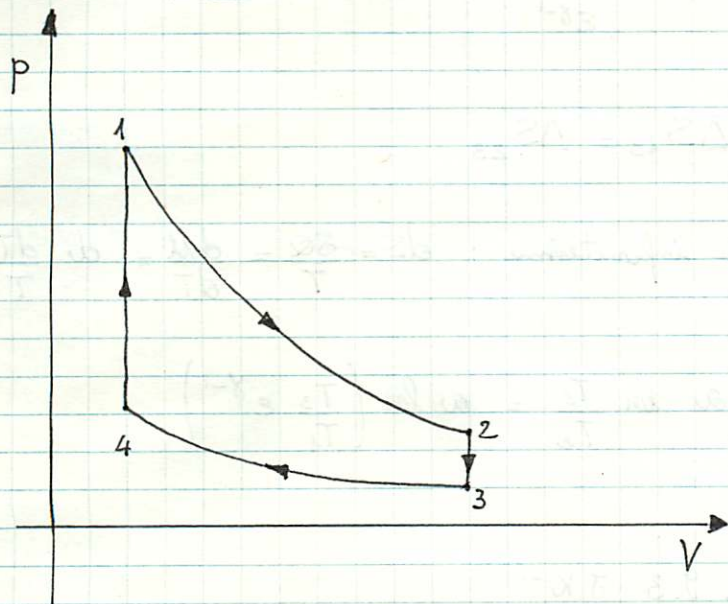
$$= \frac{\gamma R / T_A (h-1)(k-1)}{\gamma T_A \left[\frac{5}{2} R h (k-1) + \frac{3}{2} R (h-1) \right]} = \frac{2(h-1)(k-1)}{5h(k-1) + 3(h-1)} =$$

$$= \frac{2}{\frac{3}{k-1} + \frac{5h}{h-1}} \xrightarrow[h \rightarrow \infty]{k \rightarrow \infty} \frac{2}{5}$$

$$\eta \leq \eta_{\max} = \frac{2}{5} = 0.4$$

$$\text{per } h=k=2 \quad \eta = \frac{2}{3+10} = \frac{2}{13} = 0.1538$$

Una sostanza gassosa per la quale l'energia interna dipende dalle temperature e dal volume con legge $U = aT - 2bV^2$ con $a = 3.0 \text{ cal K}^{-1}$ e b costante compie il ciclo reversibile illustrato in figura costituito da due adiabatiche alternate a due isocore. Supponiamo che le temperature del gas negli stati 1 e 3 siano $T_1 = 1200 \text{ K}$ e $T_3 = 300 \text{ K}$, che le adiabatiche siano caratterizzate da un $\gamma = 1.40$ ($TV^\gamma = \text{costante}$) e che il rapporto tra i volumi occupati dal gas negli stati 2 e 1 sia $V_2/V_1 = 5.0 = \epsilon$, si determini a) il lavoro L eseguito dal gas in un ciclo, b) il rendimento η di una macchina che utilizzi il ciclo descritto e c) la variazione di entropia del gas ΔS_{13} tra gli stati 1 e 3.



La variazione di energia interna nel ciclo $\bar{\Delta}U = Q - L = 0$

quindi $L = Q$

Nelle adiabatiche $Q_{12} = Q_{34} = 0 \Rightarrow Q = Q_{23} + Q_{41}$

Nelle isocore $L_{23} = L_{41} = 0 \Rightarrow Q_{23} = U_3 - U_2 \quad Q_{41} = U_4 - U_1$

per una trasformazione isocora

$$U_f - U_i = a(T_f - T_i)$$

quindi $Q_{23} = \omega(T_3 - T_2)$

$Q_{41} = \omega(T_1 - T_4)$

$$L = \omega(T_3 + T_1 - T_2 - T_4)$$

poiché $T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$ e $T_3 V_3^{\gamma-1} = T_4 V_4^{\gamma-1}$ si ha

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = T_1 \frac{1}{\varepsilon^{\gamma-1}}$$

$$T_4 = T_3 \left(\frac{V_3}{V_4}\right)^{\gamma-1} = T_3 \varepsilon^{\gamma-1}$$

$$L = \omega \left[T_1 \left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{\gamma-1}}\right) + T_3 (1 - \varepsilon^{\gamma-1}) \right] = 3749 \text{ J}$$

Si noti che $T_1 > T_4 \sqrt{\varepsilon} = 571.1 \text{ K}$ e $T_3 < T_2 = 630.4 \text{ K}$ quindi $Q_{23} < 0$ e $Q_{41} > 0$

Il rendimento vale

$$\eta = \frac{L}{Q_{41}} = 1 - \frac{T_2 - T_3}{T_1 - T_4} = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\gamma-1}} = 0.47$$

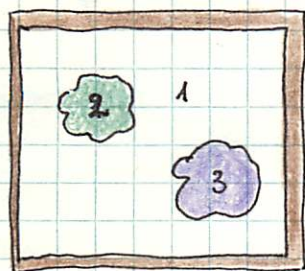
Poiché $\Delta S_{12} = 0$ si ha $\Delta S_{13} = \Delta S_{23}$

Per una trasformazione isocora infinitesima: $dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{dU}{dT} = \omega \frac{dT}{T}$

$$\Delta S_{23} = \int_2^3 dS = \int_{T_2}^{T_3} \omega \frac{dT}{T} = \omega \ln \frac{T_3}{T_2} = \omega \ln \left(\frac{T_3}{T_1} \varepsilon^{\gamma-1} \right)$$

$$\Delta S_{13} = \omega \ln \left(\frac{T_3}{T_1} \varepsilon^{\gamma-1} \right) = -9.3 \text{ J K}^{-1}$$

In un termostato di capacità termica trascurabile si uniscono le masse $m_1 = 1 \text{ kg}$ di acqua alla temperatura $\theta_1 = 80^\circ\text{C}$, $m_2 = 100 \text{ g}$ di ghiaccio fondente e $m_3 = 200 \text{ g}$ di ghiaccio alla temperatura $\theta_3 = -40^\circ\text{C}$. Sapendo che il calore specifico del ghiaccio è $c^* = 0.5 \text{ kcal kg}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ ed il calore latente di fusione $\lambda = 80 \text{ kcal kg}^{-1}$, si calcoli la temperatura θ_f della miscela all'equilibrio termico e le variazioni di entropia $\Delta S_1, \Delta S_2, \Delta S_3$ subite dalle 3 masse.



Per fondere le masse m_2 e m_3 di ghiaccio occorrono le quantità di calore

$$Q_2 = m_2 \lambda = 8 \text{ kcal} \quad Q_3 = m_3 c^* (0 - \theta_3) + m_3 \lambda = 20 \text{ kcal}$$

Poiché la quantità di calore che la massa m_1 di acqua cederebbe raffreddandosi a 0°C è

$$|Q| = m_1 c (\theta_1 - 0) = 80 \text{ kcal} > Q_3 + Q_2 \quad c = 1 \text{ cal g}^{-1} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$$

La temperatura finale di equilibrio θ_f è maggiore di 0°C .

Dal bilancio energetico $\sum Q = 0$ segue:

$$m_1 c (\theta_f - \theta_1) + m_2 \lambda + m_2 c (\theta_f - 0) + m_3 c^* (0 - \theta_3) + m_3 \lambda + m_3 c (\theta_f - 0) = 0$$

$$\theta_f = \frac{m_1 c \theta_1 - (m_2 + m_3) \lambda + m_3 c^* \theta_3}{(m_1 + m_2 + m_3) c} = 40^\circ\text{C}$$

Il processo non è reversibile; ai fini del calcolo delle variazioni di entropia ci si può riferire ad un ausiliario processo reversibile con le medesime condizioni iniziali e finali.

Alle finzioni associamo una temp. isoterna reversibile a temperatura

$$T_0 = 273.16 \text{ K} \quad \text{per cui} \quad \Delta S = \frac{\Delta Q}{T_0} = \frac{m\lambda}{T_0}$$

Al riscaldamento (raffreddamento) dell'acqua associamo tante

$$\text{temp. reversibili infinitesime tali da} \quad dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{mc dT}{T}$$

$$\text{e } \Delta S = \int_{T_i}^{T_f} dS = mc \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right)$$

$$\text{posto } T_i = \theta_i + 273.16 \text{ K}$$

$$\Delta S_1 = \int_{T_1}^{T_f} m_1 c \frac{dT}{T} = m_1 c \ln\left(\frac{T_f}{T_1}\right) = -120 \text{ cal K}^{-1}$$

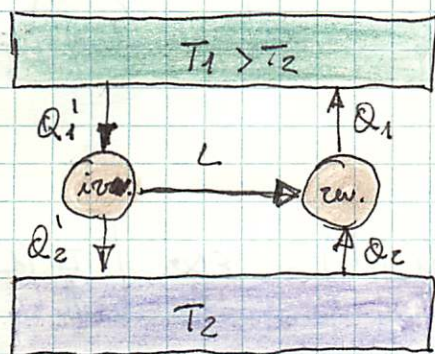
$$\Delta S_2 = \frac{m_2 \lambda}{T_0} + \int_{T_0}^{T_f} m_2 c \frac{dT}{T} = \frac{m_2 \lambda}{T_0} + m_2 c \ln\left(\frac{T_f}{T_0}\right) = 43 \text{ cal K}^{-1}$$

$$\begin{aligned} \Delta S_3 &= \int_{T_3}^{T_0} m_3 c^* \frac{dT}{T} + \frac{m_3 \lambda}{T_0} + \int_{T_0}^{T_f} m_3 c \frac{dT}{T} = \\ &= m_3 c^* \ln\left(\frac{T_0}{T_3}\right) + \frac{m_3 \lambda}{T_0} + m_3 c \ln\left(\frac{T_f}{T_0}\right) = 102 \text{ cal K}^{-1} \end{aligned}$$

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 = 25 \text{ cal K}^{-1} \quad \text{il processo è spontaneo}$$

Una macchina termica irreversibile opera tra due sorgenti:
 alle temperature $t_1 = 273^\circ\text{C}$ e $t_2 = 0^\circ\text{C}$ producendo in un ciclo
 un lavoro L ed assorbendo dalla sorgente a temperatura superiore
 una quantità di calore Q_1' . Tra le stesse sorgenti opera una
 macchina frigorifera reversibile che utilizzando il lavoro L
 prodotto dalla prima macchina assorbe dalla sorgente a
 temperatura inferiore una quantità di calore Q_2 e cede a
 quella a temperatura superiore una quantità Q_1 .

Supposto $\varepsilon = \left| \frac{Q_1'}{Q_1} \right| = 2$ e $Q_2 = 1000 \text{ cal}$, si determini il
 rendimento η' della macchina irreversibile e la variazione ΔS
 di entropia delle sorgenti durante un ciclo.



il rendimento della macchina termica irreversibile è:

$$\eta' = \frac{L}{Q_1'} = \frac{L}{Q_1} \frac{Q_1}{Q_1'} = \varepsilon^{-1} \frac{L}{Q_1} = \frac{\eta}{\varepsilon}$$

dove $\eta = \frac{L}{Q_1}$ è il rendimento di una macchina termica reversibile
 (inversione termica del frigorifero) che opera alle temperature T_1 e T_2

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$$

$$\eta' = \frac{1}{\varepsilon} \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right) = 0.25$$

La variazione di entropia delle due sorgenti è

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = -\left(\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_1'}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_2'}{T_2}\right)$$

La variazione di entropia per le macchine termiche reversibili

durante un ciclo: $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0$ coincide con l'integrale di Clausius e

$$\Delta S = -\left(\frac{Q_1'}{T_1} + \frac{Q_2'}{T_2}\right)$$

$\frac{Q_1'}{T_1} + \frac{Q_2'}{T_2} \neq$ variazione di entropia macchina irreversibile $\Rightarrow 0$

ma $Q_1' = -\varepsilon Q_1 = \varepsilon Q_2 \frac{T_1}{T_2}$

$$\left(\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} = \frac{L}{Q_1} = \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}\right)$$

inoltre $\eta' = \frac{L}{Q_1'} = \frac{Q_1' + Q_2'}{Q_1'}$

$$Q_2' = -Q_1'(1 - \eta') = -\varepsilon Q_2 \frac{T_1}{T_2} (1 - \eta')$$

$$\Delta S = -\varepsilon Q_2 \frac{1}{T_2} + \varepsilon Q_2 \frac{T_1}{T_2^2} (1 - \eta') = \frac{\varepsilon Q_2}{T_2} \left[\frac{T_1}{T_2} (1 - \eta') - 1 \right] =$$

$$= \frac{\varepsilon Q_2}{T_2} \left[\frac{T_1}{T_2} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon} \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right) \right) - 1 \right] =$$

$$= \frac{\varepsilon Q_2}{T_2} \left[\frac{\varepsilon T_1 - T_1 + T_2 - \varepsilon T_2}{\varepsilon T_2} \right] =$$

$$= \frac{Q_2}{T_2} \left[(\varepsilon - 1) \frac{T_1}{T_2} - (\varepsilon - 1) \frac{T_2}{T_2} \right]$$

$$= \frac{Q_2}{T_2} (\varepsilon - 1) \frac{T_1 - T_2}{T_2} = 15.3 \text{ J K}^{-1}$$

Per mantenere una stanza alla temperatura $t_1 = 20.0^\circ\text{C}$ quando la temperatura esterna è $t_2 = -6.0^\circ\text{C}$ è necessario fornire ogni ora una quantità di calore Q_1 . Questo può essere ottenuto in due modi diversi di utilizzare entrambi una stufa in cui viene bruciato del combustibile: in un caso si utilizza direttamente il calore Q_1 fornito dalla stufa, nel secondo caso il calore Q'_1 sviluppato dalla stufa serve ad alimentare una macchina termica reversibile che opera tra le temperature $t'_1 = 100.0^\circ\text{C}$ e $t'_2 = 0.0^\circ\text{C}$ ed il cui lavoro viene poi utilizzato da una macchina frigorifera reversibile che opera tra l'ambiente esterno e la stanza fornendo a quest'ultima la quantità di calore Q_1 . Si determini il rapporto ε tra il quantitativo di combustibile bruciato nei due casi.

Poiché il combustibile è bruciato dalla stessa stufa che nel primo caso fornisce un calore Q_1 e nel secondo Q'_1 si ha

$$\varepsilon = \frac{Q_1}{Q'_1}$$

Il calore Q'_1 è prodotto da una macchina termica reversibile il cui rendimento è:

$$\frac{L}{Q'_1} = \frac{T'_1 - T'_2}{T'_1} \quad \text{dove } T'_i = t'_i + 273.16 \quad i=1,2$$

il lavoro sviluppato da questa macchina

$$L = Q'_1 \frac{T'_1 - T'_2}{T'_1}$$

alimenta il frigorifero che cede una quantità di calore Q_1 alla stanza

la macchina frigorifera è reversibile e il suo rendimento è:

$$\frac{L}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \quad \text{dove } T_i = t_i + 273.16 \quad i=1,2$$

quindi

$$Q'_1 = L \frac{T_1}{T_1 - T_2} = Q_1 \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot \frac{T_1}{T_1 - T_2'}$$

$$\varepsilon = \frac{Q_1}{Q'_1} = \frac{T_1}{T_1 - T_2} \cdot \frac{T_1 - T_2'}{T_1} = \frac{293.16}{373.16} \cdot \frac{100.0}{26.0} = 3.0$$

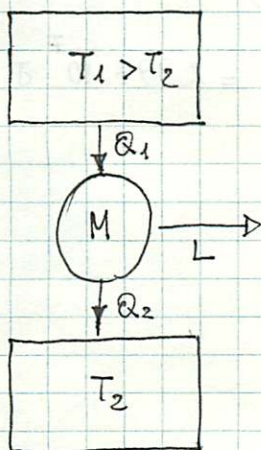
si consuma più combustibile nel primo caso.

Due corpi identici ciascuno caratterizzato da una capacità di calore a pressione costante $C = 3.70 \cdot 10^5 \text{ cal K}^{-1}$ indipendente dalle temperature, sono usati come sorgenti di calore per una macchina termica. I corpi rimangono a pressione costante.

Inizialmente le loro temperature sono $T_{1i} = 190.0 \text{ }^\circ\text{C}$ e $T_{2i} = 20.0 \text{ }^\circ\text{C}$

In seguito al funzionamento della macchina termica i due corpi raggiungono ^{una} stessa temperatura finale T_f .

Si ricavi il valore minimo per T_f ed il massimo lavoro L ottenibile dalla macchina termica.



la variazione di entropia delle

sorgenti vale:

$$\Delta S = \int_i^f dS = \int_i^f \left(C \frac{dT_1}{T_1} + C \frac{dT_2}{T_2} \right) = C \ln \frac{T_f}{T_{1i}} + C \ln \frac{T_f}{T_{2i}} =$$

$$= C \ln \left(\frac{T_f^2}{T_{1i} T_{2i}} \right)$$

Poiché deve essere $\Delta S \geq 0$ si ha $\frac{T_f^2}{T_{1i} T_{2i}} \geq 1$ ovvero

$$T_f \geq \sqrt{T_{1i} T_{2i}} = 61.6 \text{ }^\circ\text{C}$$

Il lavoro compiuto dalla macchina durante tutto il funzionamento è

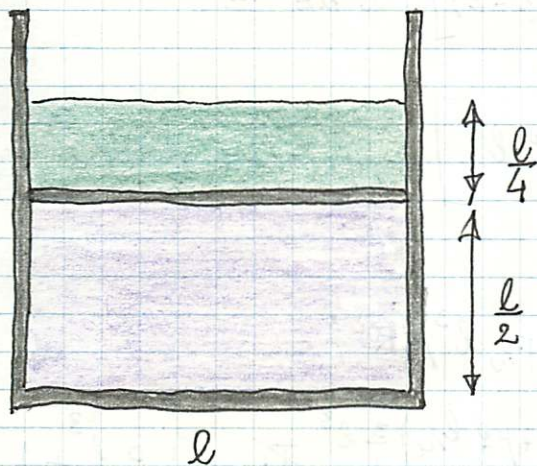
$L = \text{calore assorbito da 1} - \text{calore ceduto a 2} =$

$$= c(T_{1i} - T_p) - c(T_p - T_{2i}) = c(T_{1i} + T_{2i} - 2T_p)$$

tale lavoro risulta massimo quando la temperatura finale è minima perciò:

$$L \leq c(T_{1i} + T_{2i} - 2\sqrt{T_{1i}T_{2i}}) = c\left(\sqrt{T_{1i}} - \sqrt{T_{2i}}\right)^2 = 7.161 \cdot 10^6 \text{ cal}$$
$$= 2.997 \cdot 10^7 \text{ J}$$

Un recipiente di forma cubica con spigolo interno di lunghezza $l = 27.0$ cm ha parti rigide e termicamente isolate ed è chiuso da un diaframma di poro trascurabile anche esso rigido ed isolante termicamente. ^{di più, p_{gas} come raso ottico} All'interno del recipiente è contenuto un gas perfetto monatomico mentre all'esterno il recipiente contiene un liquido di densità $\rho = 1.5 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ per un'altezza $l/4$. All'equilibrio il gas ha temperatura $T_0 = 290.0 \text{ K}$ ed occupa metà del recipiente. Il gas viene poi scaldato lentamente e il diaframma si innalza. Nota l'accelerazione di gravità $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$ e il valore della pressione atmosferica $p_a = 1.0 \text{ atm}$ calcolare: 1) la temperatura T_1 del gas alla quale il liquido comincia a traboccare, 2) la corrispondente variazione di entropia 3) la quantità di calore Q totale da essere fornita al gas affinché tutto il liquido fuoriesca.



La condizione di equilibrio meccanico del diaframma valido ad ogni istante fintanto che il liquido non comincia a traboccare è:

$$P = P_a + \rho g \frac{l}{4} \quad \text{ovvero } p \text{ la pressione del gas}$$

La trasformazione del gas è dunque isobara: $TV^{-1} = \text{costante}$

$$\frac{T_0}{V_0} = \frac{T_1}{V_1} \quad T_1 = T_0 \frac{V_1}{V_0} = T_0 \frac{l^2 \frac{l}{4}}{l^2 \frac{l}{2}} = \frac{3}{2} T_0 = 435.0 \text{ K}$$

la variazione di entropia tra 0 ed 1 vale

$$\Delta S = \int_0^1 \frac{dQ}{T} = \int_{T_0}^{T_1} \frac{n c_p dT}{T} = n c_p \ln \frac{T_1}{T_0} =$$

$$= \left(\frac{RT_0}{pV_0} \right)^{-1} \frac{5R}{2} \ln \frac{3}{2} = \frac{(p_a + \rho g \frac{l}{4}) l^3 / 2}{T_0} \frac{5}{2} \ln \frac{3}{2} = 3.5 \text{ JK}^{-1}$$

la quantità di calore assorbita dal gas tra 0 ed 1 vale

$$Q_{01} = n c_p (T_1 - T_0) = n \frac{5R}{2} \frac{1}{2} T_0 = \frac{5}{4} (p_a + \rho g \frac{l}{4}) \frac{l^3}{2} = \frac{5}{8} p_a l^3 + \frac{5}{32} \rho g l^4$$

nel passaggio da 1 a 2 (= completa espulsione del liquido) vale:

$$Q_{12} = \Delta U_{12} + L_{12}$$

$$\text{dove } \Delta U_{12} = \int_{T_1}^{T_2} n c_v dT = n c_v (T_2 - T_1) \quad \text{con } T_2 = \frac{p_a l^3}{nR}$$

$$L_{12} = \int_1^2 p dV = \int_{\frac{3}{4}l}^l [p_a + \rho g (l-z)] l^2 dz =$$

$$= l^2 \left[(p_a + \rho g l) \frac{1}{4} l - \rho g \frac{7}{32} l^2 \right] = \frac{1}{4} p_a l^3 + \frac{1}{32} \rho g l^4$$

$$Q_{12} = \frac{3R}{2} n \frac{p_a l^3}{nR} - \frac{3R}{2} \frac{(p_a + \rho g l/4) \frac{3}{4} l^3}{R T_1} T_1 + \frac{1}{4} p_a l^3 + \frac{1}{32} \rho g l^4 =$$

$$= p_a l^3 \left(\frac{3}{2} - \frac{9}{8} + \frac{1}{4} \right) - \rho g l^4 \left(\frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 16} - \frac{1}{32} \right) = \frac{5}{8} p_a l^3 - \frac{1}{4} \rho g l^4$$

$$Q = Q_{01} + Q_{12} = \frac{5}{4} p_a l^3 - \frac{3}{32} \rho g l^4 = 2485.0 \text{ J}$$