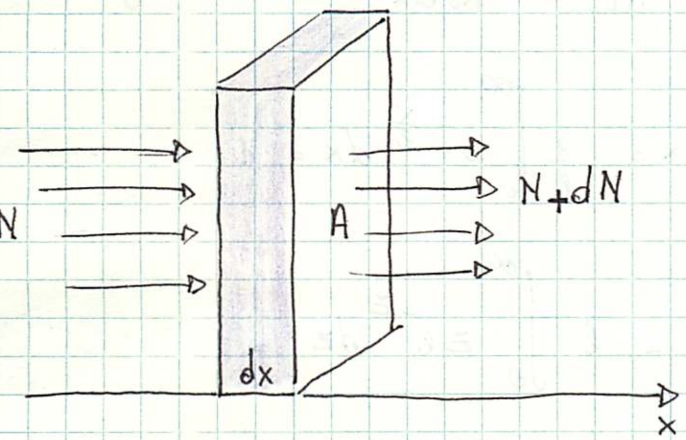
TEORIA CINETICA

Un fascio ben collimato di molecole aventi raggio r_1 si propaga attraverso un gas di densità n le cui molecole hanno raggio r_2.
Si determini il numero di molecole del fascio $N(x)$ che risultano non deviate dopo aver attraversato uno spessore x di gas.
Trovare il libero cammino medio e valutarlo per $r_1 = r_2 = 1.9\,\mathring{A}$ ed in condizioni normali di pressione e temperatura.



Si consideri un volume di gas di sezione A e spessore dx attraversato dalle molecole incidenti

La sezione d'urto di una particella incidente è: $dS = \pi(r_1+r_2)^2 \cdot nA\,dx$

La probabilità che essa subisca un urto è allora $\frac{dS}{A} = \pi(r_1+r_2)^2 n\,dx$

Se $N(x)$ è il numero di particelle incidenti a x, il numero di particelle deflesse in dx è $+N\frac{dS}{A}$ quindi il numero di particelle non deflesse varia di

$$dN = -N\pi(r_1+r_2)^2 n\,dx$$

$$\frac{dN}{N} = -\pi(r_1+r_2)^2 n\,dx \qquad N(x) = N_0\, e^{-\pi(r_1+r_2)^2 n x} =$$

$$= N_0 e^{-\frac{x}{l}} \qquad l^{-1} \equiv \pi(r_1+r_2)^2 n$$

Il libero cammino medio è dato:

$$\bar{l} = \int_0^\infty x \, P(x) \, dx$$

dove $P(x)\,dx$ è la probabilità di subire un urto nel tratto dx

$$P(x)\,dx = \frac{N(x)}{N_0} - \frac{N(x+dx)}{N_0} = \frac{-1}{N_0}\frac{dN(x)}{dx}\,dx = \frac{1}{l} e^{-\frac{x}{l}}\,dx$$

si noti che $\displaystyle\int_0^\infty P(x)\,dx = \frac{1}{l}\int_0^\infty e^{-\frac{x}{l}}\,dx = 1$

$$\bar{l} = \int_0^\infty \frac{x}{l} e^{-\frac{x}{l}}\,dx = l \int_0^\infty z e^{-z}\,dz =$$

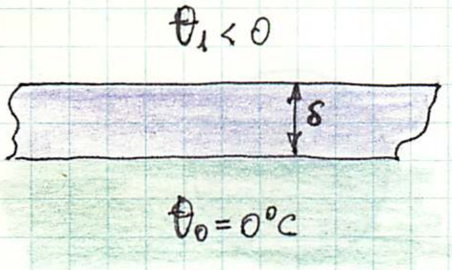
$$= l \left\{ -z e^{-z}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-z}\,dz \right] = l \quad e^{-z}\Big|_\infty^0 = l$$

In condizioni normali di pressione e temperatura una mole di gas occupa 22.4 litri quindi

$$n = \frac{N_A}{22.4\ 10^{-3}\ m^3} = 2.7\ 10^{25}\ m^{-3}$$

$$\bar{l} = l = \frac{1}{\pi (r_1+r_2) n} = 8.2\ 10^{-8}\ m \qquad \sim 430\ r_1$$

Ad un certo istante ($t=0$) la temperatura dell'acqua di uno stagno è $\theta_0 = 0°C$ e lo spessore dello strato di ghiaccio formatosi sopra la sua superficie è δ. Si determini come varia col tempo lo spessore x dello strato di ghiaccio se la temperatura dell'ambiente esterno è $\theta_1 < 0$.



Sia x lo spessore del ghiaccio al tempo t. Nell'intervallo di tempo dt la quantità di calore che passa dall'acqua all'ambiente in una superficie S è:

$$dQ = kS\,\frac{\theta_0 - \theta_1}{x}\,dt = -k\,S\,\frac{\theta_1 - \theta_0}{x}\,dt > 0$$

dove k è il coefficiente di conducibilità termica del ghiaccio.

dQ provoca la formazione di un volume Sdx di ghiaccio dato da:

$$dQ = \lambda \cdot \rho S dx$$

essendo ρ la densità del ghiaccio e λ il calore latente

$$x\,dx = k\,\frac{\theta_0 - \theta_1}{\lambda\rho}\,dt$$

$$\int_{\delta}^{x(t)} x\,dx = k\,\frac{\theta_0 - \theta_1}{\lambda\rho}\int_0^t dt \qquad \frac{1}{2}\left[x(t)^2 - \delta^2\right] = k\,\frac{\theta_0 - \theta_1}{\lambda\rho}\,t$$

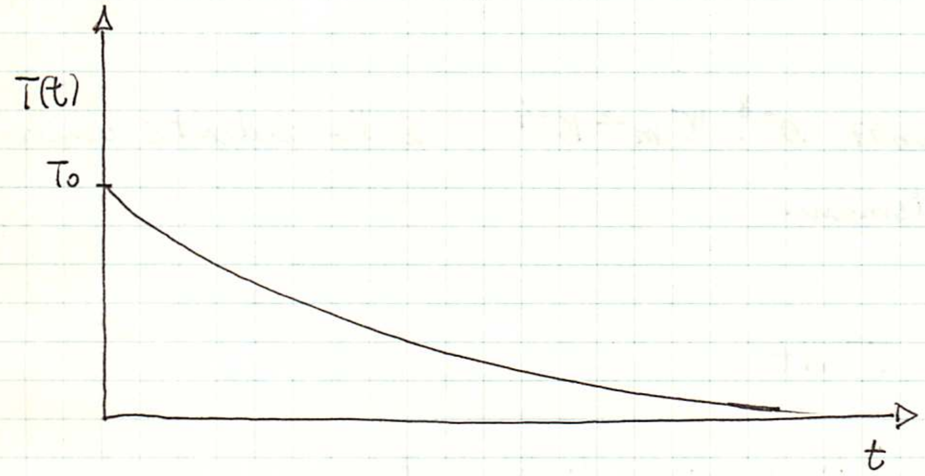
$$-\frac{dT}{T^4} = \frac{3\sigma}{\rho r c}\, dt$$

$$\int_{T_0}^{T(t)} -\frac{dT}{T^4} = \frac{3\sigma}{\rho r c}\int_0^t dt$$

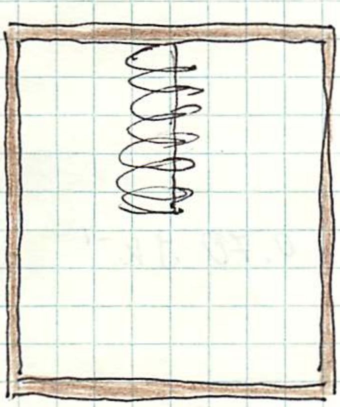
$$\frac{1}{3}\left(T(t)^{-3} - T_0^{-3}\right) = \frac{3\sigma}{\rho r c}\, t$$

$$\frac{1}{T(t)^3} = \frac{1}{T_0^3} + \frac{9\sigma}{\rho r c}\, t$$

$$T(t) = \frac{T_0}{\sqrt[3]{1 + \frac{9\sigma T_0^3}{\rho r c}\, t}}$$



Un sistema termicamente isolato alla temperatura $t_1 = 15°C$ è costituito da un recipiente contenente una massa di acqua $m = 400$ g nella quale è immersa una molla di costante elastica $k = 500\ N\,m^{-1}$ e lunghezza di riposo $l_0 = 100$ cm. La molla è tenuta compressa a $l = 10$ cm da un filo. Ad un certo istante il filo si rompe e la molla comincia ad oscillare di moto smorzato. Trascurando le capacità termiche della molla e del contenitore si determini la variazione di entropia ΔS del sistema tra l'istante di rottura del filo e quello in cui la molla è di nuovo in quiete.



Smorzandosi la molla cede all'acqua una quantità di energia pari a $\Delta E = \frac{1}{2} k (l_0 - l)^2$

Poiché la variazione di energia interna del sistema isolato molla + acqua è nulla

$$\Delta U = 0 = Q_m + Q_{H_2O} - L_m - L_{H_2O}$$

ed essendo $L_{H_2O} = 0$ $\quad Q_m = 0$ $\quad L_m = \Delta E$

si ha $Q_{H_2O} = \Delta E$

il calore assorbito dall'acqua fa innalzare la sua temperatura di ΔT :

$$\Delta E = m c_{H_2O} \Delta T \qquad \Delta T = \frac{k(l_0 - l)^2}{2 m c_{H_2O}}$$

Per calcolare ΔS si consideri una trasf. reversibile ausiliaria con gli stessi stati iniziale e finale

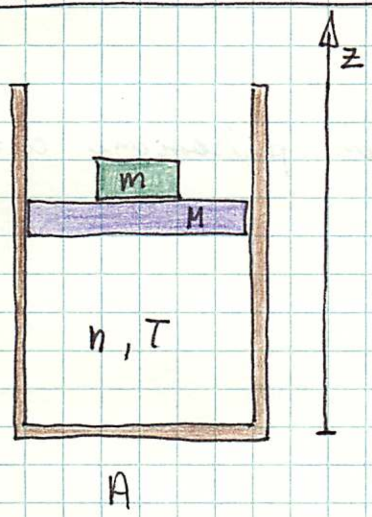
$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{m c_{H_2O}}{T} dT$$

$$\Delta S = \int dS = m c_{H_2O} \int_{T_i}^{T_f} \frac{dT}{T} = m c_{H_2O} \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) =$$

$$= m c_{H_2O} \ln\left(1 + \frac{\Delta T}{T_1}\right) =$$

$$= m c_{H_2O} \ln\left(1 + \frac{k(l_0 - l)^2}{2 m c_{H_2O} T_1}\right) = 0.70 \ J K^{-1}$$

Un recipiente cilindrico posto nel vuoto è chiuso da un pistone di massa $M = 10$ kg scorrevole senza attrito e contiene un gas perfetto. Il pistone è inizialmente in equilibrio con il gas alla temperatura $t = 20\,°C$. Poggiando sopra al pistone una massa $m = 100$ g questo inizia ad oscillare con frequenza $\nu = 3.24 \; 10^{-2} \, s^{-1}$.
Calcolare il numero di moli n di gas contenuto nel cilindro supponendo che la temperatura del gas rimanga costante e le oscillazioni non si smorzino.



Detto z la quota del pistone con la massa m sopra ed A la sezione del cilindro, si ha:

$$(m+M)\,\ddot{z} = F(z)$$

dove
$$F(z) = -(m+M)g + p(z)\,A$$
$$= -(m+M)g + \frac{nRT\cancel{A}}{z\cdot\cancel{A}}$$

la quota di equilibrio z_0 è definita da: $F(z_0) = 0$

$$z_0 = \frac{nRT}{(m+M)\,g}$$

Sviluppando intorno alla posizione di equilibrio

$$(m+M)\ddot{z} = F(z_0) + \left.\frac{dF}{dz}\right|_{z_0}(z-z_0) =$$

$$= -\frac{nRT}{z_0^2}(z-z_0) = -\frac{nRT}{(nRT)^2}(m+M)^2 g^2 (z-z_0)$$

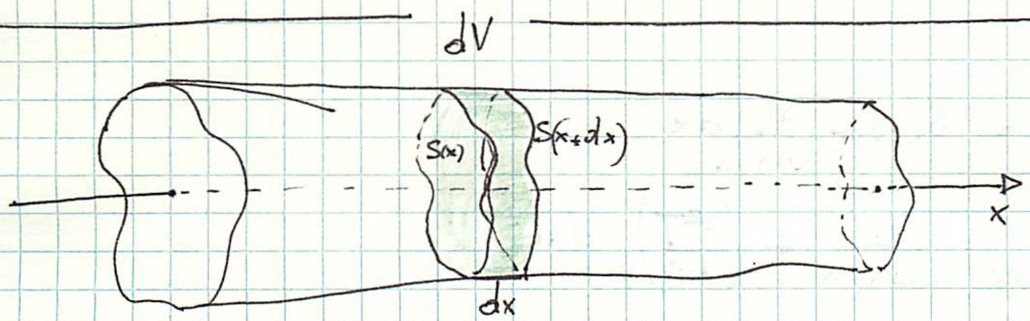
$$\ddot{z} + \frac{(m+M)g^2}{nRT}(z-z_0) = 0$$

$z(t)$ oscilla intorno a z_0 con pulsazione $\omega = \sqrt{\frac{(m+M)g^2}{nRT}}$

$$4\pi^2\nu^2 = \frac{(m+M)g^2}{nRT}$$

$$n = \frac{(m+M)g^2}{4\pi^2\nu^2 RT} = 9{,}6\ 10^{-4}$$

Scrivere l'equazione differenziale che regola la temperatura in funzione del tempo lungo una sbarra di sezione variabile $S(x)$ nell'ipotesi che la temperatura sia uniforme in ogni punto della sezione.



Detto x l'asse della sbarra si consideri il volume dV compreso tra le sezioni $S(x)$ ed $S(x+dx)$

La quantità di calore che passa attraverso le due superfici $S(x)$ ed $S(x+dx)$ nel tempo dt è:

$$dQ_1 = -K\, S(x) \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_x dt$$

$$dQ_2 = -K\, S(x+dx) \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+dx} dt$$

La quantità di calore che entra nel volume dV nel tempo dt è:

$$dQ = dQ_1 - dQ_2 = K\left[S(x+dx)\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x+dx} - S(x)\left(\frac{dT}{dx}\right)_x\right] dt$$

questo provoca una variazione di temperatura dT:

$$dQ = c\rho\, dV\, dT = c\rho S(x)\, dx\, dT = c\rho S(x)\, dx \frac{\partial T}{\partial t} dt$$

$$c\rho\, S(x)\, dx\, \frac{\partial T}{\partial t}\, \cancel{dt} = K \cancel{dt} \left[S(x+dx) \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+dx} - S(x) \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_x \right]$$

usando

$$S(x+dx) = S(x) + \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_x dx$$

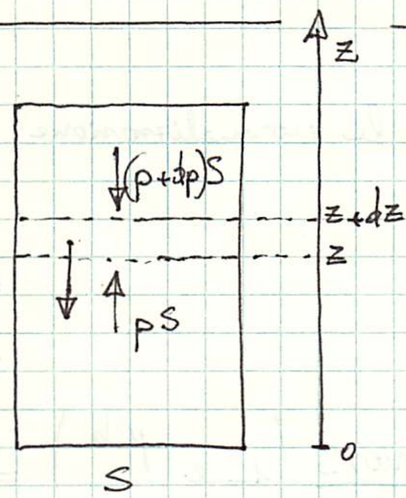
$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+dx} = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_x + \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_x dx$$

$$c\rho\, S(x)\, dx\, \frac{\partial T}{\partial t} = K \left[S(x) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx + \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} dx \right]$$

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + \frac{1}{S(x)} \frac{\partial S(x)}{\partial x} \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = \frac{c\rho}{K} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t}$$

Un gas ideale, formato da N particelle uguali di massa m, è contenuto in un recipiente cilindrico chiuso di sezione S ed altezza h; l'asse del cilindro è disposto verticalmente e la temperatura del gas è uniforme e vale T. Si calcoli come varia, a causa della forza peso, il numero di particelle per unità di volume in funzione della quota e la pressione esercitata dal gas sulla parete superiore

---



Considerato un asse verticale z con l'origine coincidente con il fondo del cilindro, si consideri il gas compreso tra le quote z e $z+dz$; siano p e $p+dp$ i valori della pressione sui due piani $p = p(z)$. Se $n(z)$ è il numero di particelle per unità di volume alla quota z, all'equilibrio si ha:

$$\cancel{p(z)}S - \left(\cancel{p(z)} + dp\right)S - mg\,n(z)\,S\,dz = 0$$

$$-\cancel{S}\,dp = mg\,n(z)\,\cancel{S}\,dz$$

L'equazione di stato del gas ideale contenuto nel volumetto Sdz è:

$$p(z)\,S\,dz = \frac{n(z)\,S\,dz}{N_A}\,RT \qquad \text{cioè} \qquad p(z) = \frac{RT}{N_A}\,n(z)$$

$$dp = \frac{RT}{N_A}\, dn \qquad \text{quindi}$$

$$\frac{dn}{n} = -\frac{N_A m g}{RT}\, dz \qquad \text{posto } \mu = \frac{N_A m g}{RT}$$

$$n(z) = n(0)\, e^{-\mu z}$$

$n(0)$ si trova imponendo la normalizzazione

$$\int_0^h n(z)\, dz\, S = N$$

$$n(0) S \left.\frac{e^{-\mu z}}{-\mu}\right|_0^h = \frac{n(0) S}{\mu}\left(1 - e^{-\mu h}\right) = N$$

$$n(0) = \frac{\mu N}{S\left(1 - e^{-\mu h}\right)} \qquad n(z) = \frac{\mu N e^{-\mu z}}{S\left(1 - e^{-\mu h}\right)}$$

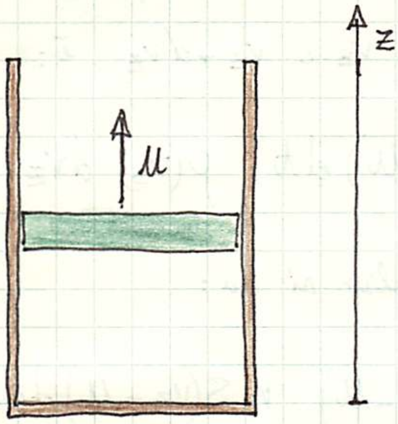
alla quota h:

$$p(h) = \frac{RT}{N_A}\, n(h) = \frac{RT}{N_A}\, \frac{\mu N e^{-\mu h}}{S(1 - e^{-\mu h})} = \frac{N m g}{S}\, \frac{1}{e^{\mu h} - 1}$$

$$p(0) = \frac{N m g}{S}\, \frac{1}{e^{-\mu h} - 1}$$

$$\frac{p(h)}{p(0)} = e^{-\mu h}$$

Un recipiente cilindrico di sezione S, contenente n molecole di gas per unità di volume, è chiuso da un pistone scorrevole. Ad un certo istante il pistone si muove con velocità u e la distribuzione delle velocità può considerarsi Maxwelliana corrispondente alla temperatura T. Supponendo elastici gli urti delle molecole con il pistone si calcoli il modulo F della forza esercitata dal gas sul pistone corretto $O(u^2)$



S

Posto $\lambda \equiv \dfrac{m}{2k_BT}$ il numero di molecole per unità di volume aventi componente z della velocità compresa tra v_z e v_z+dv_z e componenti x y arbitrarie è:

$$n(v_z)\,dv_z = n\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\lambda v_z^2}\,dv_z$$

Una molecola può urtare il pistone solo se $v_z > u$; poiché la massa del pistone è molto più grande di quella della molecola questa nell'urto inverte la propria velocità rispetto al pistone (mobile):

prima dell'urto: $v_z - u$ dopo l'urto: $u - v_z$

(2)

Nel sistema di riferimento fisso si ha:

prima dell' urto : v_z dopo l'urto : $2u - v_z$

La quantità di moto trasferita da una molecola al pistone è

$$\Delta q_z = 2m(v_z - u)$$

Il numero di molecole che urtano il pistone nel tempo dt avendo velocità ~~v_z~~ compresa tra v_z e $v_z + dv_z$ è:

$$n \cdot S(v_z - u)\,dt \quad (v_z)\,dv_z$$

Per il teorema dell' impulso si ha:

$$F\,dt = \int_u^\infty 2m(v_z - u)\; nS(v_z - u)\,dt \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\lambda v_z^2}\,dv_z$$

usando $F(u) = F(0) + \frac{dF}{du}\Big|_{u=0} u + \frac{1}{2}\frac{d^2F}{du^2}\Big|_{u=0} u^2$

$$F(0) = 2mSn\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty \left(v_z^2 - \cancel{2v_z u} \cancel{+ u^2}\right) e^{-\lambda v_z^2}\,dv_z =$$

$$= 2mSn\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\;\frac{1}{4\lambda}$$

$$= nSk_BT$$

$$= pS$$

$$\left.\frac{dF}{du}\right|_{u=0} = -\int_0^\infty 4m(v_z - \cancel{0})\, nS\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\lambda v_z^2}\, dv_z =$$

$$= -4mnS\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2\lambda} = -2nS\, k_BT \;\frac{1}{k_BT}\, m\sqrt{\frac{1}{\pi\lambda}} =$$

$$= -Sp\,2\sqrt{\frac{m^{\cancel{2}}\,\cancel{2k_BT}}{\cancel{4}\pi\,\cancel{m}(k_BT)^{\cancel{2}}}} = -pS\sqrt{\frac{8m}{\pi k_BT}}$$

$$\left.\frac{d^2F}{du^2}\right|_{u=0} = \int_0^\infty 4\, m\, nS\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\lambda v_z^2}\, dv_z =$$

$$= nSm\,\frac{4}{2} = nSk_BT\;4\frac{m}{2k_BT} = pS\,\frac{4m}{2k_BT}$$

$$F(u) = F(0) + \left.\frac{dF}{du}\right|_{u=0} u + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2F}{du^2}\right|_{u=0} u^2 \mp \cdots =$$

$$= pS\left[1 - u\sqrt{\frac{m}{\pi k_BT}} \qquad + \qquad \frac{mu^2}{k_BT} + \cdots\right]$$

$$P(v_z)\, dv_z = \int dv_x \int dv_y P(v_x, v_y, v_z)\, dv_z$$

$$P(v_x, v_y, v_z) = \frac{1}{A} e^{-\frac{\frac{1}{2} m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{k_B T}} \quad dv_x\, dv_y\, dv_z$$

$$1 = \int dv_x \int dv_y \int dv_z \quad P(v_x, v_y, v_z) =$$

$$= \frac{1}{A} \left(\frac{2\pi k_B T}{m}\right)^{3/2} \qquad A = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{-3/2}$$

$$P(v_z) dv_z = \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} e^{-\frac{\frac{1}{2} m v_z^2}{k_B T}} dv_z \quad \cdot \quad \left(\frac{2\pi k_B T}{m}\right)^{2/2}$$

$$= \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{1/2} e^{-\frac{\frac{1}{2} m v_z^2}{k_B T}} dv_z$$

0.85 g di gas perfetto monoatomico sono racchiusi in un recipiente inizialmente isolato termicamente all'equilibrio con $p_0 = 1.25$ atm $t_0 = 20\ °C$. In queste condizioni si misura la velocità quadratica media $v_0 = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = 570$ m/s per le molecole.
Comprimendo il gas fino a che il volume diventa $V_1 = \frac{2}{3} V_0$ si osserva una temperatura di equilibrio $t_1 = 120\ °C$. Determinare la velocità quadratica media in queste condizioni. e il lavoro fatto dal gas durante la compressione. Successivamente viene sottratto calore al gas, mantenendo costante il volume, fino a che la pressione ritorna al valore iniziale p_0. Determinare il calore ceduto dal gas.

In base al teorema di equipartizione le velocità quadratiche medie sono legate alla temperatura per un gas monoatomico da:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{3}{2} k_B T_0$$

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{3}{2} k_B T_1$$

essendo m la massa di una molecola.

Segue $\quad v_1 = v_0 \sqrt{\frac{T_1}{T_0}} = 660\ m\,s^{-1}$

Poiché la compressione è adiabatica si ha $\quad L = -\Delta U$

$$\Delta U = n\, c_V\, \Delta T = n \frac{3}{2} R (T_1 - T_0) = n \frac{3}{2} N_A k_B (T_1 - T_0) =$$

$$= N \frac{3}{2} k_B (T_1 - T_0) = N \frac{1}{2} m (v_1^2 - v_0^2) = \frac{1}{2} m N v_0^2 \left(\frac{T_1}{T_0} - 1 \right)$$

$$= \frac{1}{2} M v_0^2 \left(\frac{T_1}{T_0} - 1 \right)$$

dove $M = mN = m\, n N_A$ è la massa totale del gas

$$L = -\frac{1}{2} M v_0^2 \left(\frac{T_1}{T_0} - 1\right) = -47.1\ J$$

(il gas riceve lavoro).

Nella condizione di equilibrio finale la pressione vale p_0 il volume è $\frac{2}{3} V_0$ e la temperatura è :

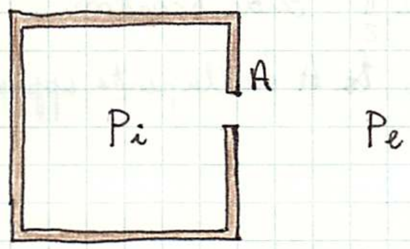
$$T_2 = \frac{p_0 \frac{2}{3} V_0}{nR} = \frac{\frac{2}{3}\, nRT_0}{nR} = \frac{2}{3} T_0$$

Poiché durante questa trasformazione $L = 0$ si ha $Q = \Delta U$

$$Q = \Delta U = \frac{1}{2} M\, v_1^2 \left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) = \frac{1}{2} M\, v_0^2 \left(\frac{T_2}{T_0} - \frac{T_1}{T_0}\right) =$$

$$= -93.2\ J \qquad \text{(il gas cede calore)}$$

In un recipiente di volume $V = 5\,000 \text{ cm}^3$ viene fatto il vuoto fino a raggiungere la pressione di 10^{-6} mm Hg.
Trovare il rapporto $\frac{n_i}{n_e}$ tra il numero di molecole per unità di volume all'interno e all'esterno del recipiente all'equilibrio termico.
A causa di un foro di sezione A la pressione interna comincia a salire. Quali sono le dimensioni del foro se in un minuto la pressione interna raggiunge 10^{-3} mm Hg e la velocità media delle molecole è 500 m s^{-1}? (distribuzione δ non Maxwell Boltzmann)



Trattando i gas all'interno e all'esterno come perfetti

$$P_i = n_i k_B T \qquad P_e = n_e k_B T$$

All'equilibrio termico: $$\frac{n_i}{n_e} = \frac{P_i}{P_e}$$

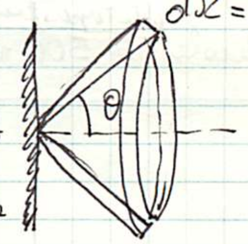
ma $P_e = 1 \text{ atm} = 760$ mm Hg $$\frac{n_i}{n_e} = 1.3 \; 10^{-9}$$

In presenza del foro di sezione A occorre calcolare il numero di particelle $dN_{e \to i}$ che entra e quello che esce $dN_{i \to e}$ in un tempo dt.

Supponendo che tutte le particelle di un gas di densità n, abbiano velocità v di direzione casuale ma costante in modulo. Il numero di particelle che nel tempo dt attraversano una superficie A da un verso è:

$$dN = \int_0^{\frac{\pi}{2}} n \cdot \left(A \ v \cos\theta \, dt \right) \cdot \frac{2\pi \sin\theta \, d\theta}{4\pi}$$

essendo $\frac{2\pi \sin\theta \, d\theta}{4\pi}$ la frazione di particelle che si muovono nella direzione compresa tra θ e $\theta + d\theta$



l'integrazione è tra 0 e $\frac{\pi}{2}$ onde scartare le particelle che attraversano A dalla parte opposta

$$dN = n A v \, dt \ \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \, d(\sin\theta) = \frac{1}{4} A v \, dt$$

Il numero di particelle per unità di volume all'interno del recipiente aumenta nel tempo dt della quantità: ($v_i = v_e$ poiché $T_i = T_e$)

$$dn_i = \frac{dN_{e \to i} - dN_{i \to e}}{V} = \frac{Av}{4V} \left(n_e - n_i \right) dt$$

$$\frac{dn_i}{n_e - n_i} = \frac{Av}{4V} dt \qquad \frac{n_e - n_i(t)}{n_e - n_i(0)} = e^{-\frac{Av}{4V} t}$$

$$p_i(t) = p_e \frac{n_i(t)}{n_e} = p_e \left[1 - \left(1 - \frac{n_i(0)}{n_e} \right) e^{-\frac{Av}{4V} t} \right]$$

$$\frac{Av}{4V} t = \ln \left(\frac{1 - \frac{n_i(0)}{n_e}}{1 - \frac{p_i(t)}{p_e}} \right)$$

$A = 8.8 \ 10^{-13} \ m^2$ che corrisponde ad un foro circolare di raggio $r = 0.5 \mu$

Si consideri una miscela di due gas ideali A e B formati da n_A e n_B molecole per unità di volume di massa m_A e m_B. La miscela sia in equilibrio a temperatura T. Si calcoli la distribuzione di probabilità per le velocità relative delle molecole A rispetto a quelle B.

La probabilità che una particella A abbia velocità compresa tra $\underline{v}_A$ e $\underline{v}_A + d\underline{v}_A$ è:

$$dP_A = \left(\frac{m_A}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-\frac{m_A v_A^2}{2k_B T}} \, d\underline{v}_A$$

Analogamente per B.

La probabilità che una coppia di particelle, la prima di tipo A e la seconda di tipo B, abbia velocità compresa tra $\underline{v}_A$ e $\underline{v}_A + d\underline{v}_A$, $\underline{v}_B$ e $\underline{v}_B + d\underline{v}_B$ è:

$$dP_A \cdot dP_B = \frac{(m_A \cdot m_B)^{3/2}}{(2\pi k_B T)^3} \, e^{-\frac{m_A v_A^2 + m_B v_B^2}{2k_B T}} \, d\underline{v}_A \, d\underline{v}_B$$

si passa:

$$\begin{cases} \underline{v} = \underline{v}_A - \underline{v}_B \\ \underline{V} = \dfrac{m_A \underline{v}_A + m_B \underline{v}_B}{m_A + m_B} \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} \underline{v}_A = \underline{V} + \dfrac{m_B}{m_A + m_B} \underline{v} \\ \underline{v}_B = \underline{V} - \dfrac{m_A}{m_A + m_B} \underline{v} \end{cases}$$

Poiché lo Jacobiano della trasformazione $\underline{v}_A, \underline{v}_B \to \underline{v}, \underline{V}$ è

$$J = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ \frac{m_A}{m_A+m_B} & \frac{m_B}{m_A+m_B} \end{vmatrix} = 1 \qquad \text{si ha} \quad d\underline{v}_A\, d\underline{v}_B = d\underline{v}\, d\underline{V}$$

La probabilità cercata si ottiene integrando $dP_A \cdot dP_B$ rispetto a $\underline{V}$

$$dP = \int d\underline{V} \; \frac{(m_A m_B)^{3/2}}{(2\pi k_B T)^3} \, e^{-\frac{(m_A+m_B)V^2 + \mu v^2}{2k_B T}} \, d\underline{v}$$

dove $\mu = \dfrac{m_A m_B}{m_A + m_B}$

$$dP = \frac{(m_A m_B)^{3/2}}{(2\pi k_B T)^3} \, e^{-\frac{\mu v^2}{2k_B T}} \, d\underline{v} \quad 4\pi \int_0^\infty V^2 e^{-\frac{(m_A+m_B)V^2}{2k_B T}} \, dV =$$

$$= \frac{(m_A m_B)^{3/2}}{(2\pi k_B T)^3} \, e^{-\frac{\mu v^2}{2k_B T}} \, d\underline{v} \; 4\pi . \frac{\sqrt{\pi}}{4} \left(\frac{2k_B T}{m_A+m_B}\right)^{3/2} =$$

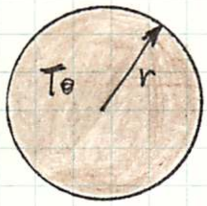
$$= \left(\frac{\mu}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} e^{-\frac{\mu v^2}{2k_B T}} \, d\underline{v}$$

la distribuzione di probabilità è:

$$f(\underline{v}) = \left(\frac{\mu}{2\pi k_B T}\right)^{3/2} e^{-\frac{\mu v^2}{2k_B T}}$$

se $m_A = m_B = m$ $\quad \overline{v_{rel}} = 4\sqrt{\dfrac{k_B T}{m}} \qquad \overline{v_{rel}^2} = \dfrac{6 k_B T}{m}$

Una sfera di raggio r costituita da un materiale di densità ρ e calore specifico c inizialmente alla temperatura T_0 si raffredda per irraggiamento. Trovare l'andamento della temperatura supponendo che la sfera sia assimilabile ad un corpo nero.



$m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$

c

La quantità di calore emessa dalla sfera per unità di tempo e di superficie è data dalla legge di Boltzmann:

$$\frac{dQ}{S\,dt} = -\sigma T^4$$

dove $\sigma = 5.6697\ 10^{-8}\ W\,m^{-2}\,K^{-4}$ è la costante universale di Stefan-Boltzmann

$$dQ = -4\pi r^2 \sigma T^4\, dt$$

ciò provoca una diminuzione di temperatura:

$$dQ = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho c\, dT$$

quindi

$$-4\pi r^2 \sigma T^4\, dt = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho c\, dT$$

$$-\frac{dT}{T^4} = \frac{3\sigma}{\rho r c}\, dt$$

$$\int_{T_0}^{T(t)} -\frac{dT}{T^4} = \frac{3\sigma}{\rho r c}\int_0^t dt$$

$$\frac{1}{3}\left(T(t)^{-3} - T_0^{-3}\right) = \frac{3\sigma}{\rho r c}\, t$$

$$\frac{1}{T(t)^3} = \frac{1}{T_0^3} + \frac{9\sigma}{\rho r c}\, t$$

$$T(t) = \frac{T_0}{\sqrt[3]{1 + \frac{9\sigma T_0^3}{\rho r c}\, t}}$$