8h

CINEMATICA

3 × 2h

Metodo Scientifico

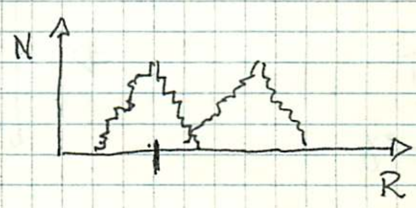
Metodi induttivo e deduttivo $\Rightarrow$ necessità di misurare grandezze fisiche

misura diretta o indiretta

indiretta $\rightarrow$ legge funzionale

diretta $\rightarrow$
- criterio di confronto
- " " somma
- unità di misura es: metro = 1'650'763.7 λ rosso-arancio del cripton

errori casuali e sistematici



Sistema di unità di misura
- grandezze fondamentali
- " derivate

Equazione dimensionale = espressione di una grandezza derivata in termini di quelle fondamentali

Grandezze adimensionali, omogeneità dimensionale

Sistema Internazionale di unità di misura

Grandezza fondam.		unità	
lunghezza	[L]	metro	m
massa	[M]	kilogrammo	Kg
tempo	[T]	secondo	s

Esempio di analisi dimensionale

Un pendolo di massa m e lunghezza l è sottoposto ad accelerazione di gravità g. Trovare la dip. funzionale del periodo T da queste grandezze con analisi dimensionale.

$$T = k\, l^{\alpha} m^{\beta} g^{\gamma}$$ si suppone che valga:

$$[T] = [L^{\alpha}][M^{\beta}][L^{\gamma} T^{-2\gamma}] = [L^{\alpha+\gamma}][M^{\beta}][T^{-2\gamma}]$$

$$\begin{cases} 0 = \alpha + \gamma \\ 0 = \beta \\ 1 = -2\gamma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = -\frac{1}{2} \\ \beta = 0 \\ \alpha = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$T = k\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (k = 2\pi)$$

Cinematica del punto materiale

cinematica = descrizione del moto (senza cause)

grandezze fondamentali rilevanti : [L] [T]

punto materiale : limiti della definizione

posizione, : sistemi di riferimento

gradi di libertà e vincoli : esempio di sbarretta schematizzata da uno o due punti materiali che ha 3 o 5 gradi di libertà

posizione in funzione del tempo : $\underline{r}(t)$ = legge oraria (equazion oraria)

rappresentazione cartesiana : $x(t)$ $y(t)$ $z(t)$

" polare : $r(t)$ $\theta(t)$ $\varphi(t)$

" cilindrica : $z(t)$ $r(t)$ $\varphi(t)$

equazione della traiettoria : eliminando il tempo si ottiene

$y = y(x)$ in 2D e $z = z(x, y)$ in 3D che sono le equaz. di una curva in 2 e 3 dimensioni.

coordinata curvilinea : s = lunghezza della traiettoria

$$\begin{cases} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{cases} \quad \text{descrizione equivalente} \quad \begin{cases} x(s) \\ y(s) \\ z(s) \end{cases} + \quad s(t)$$

↳ equaz. parametrica della traiettoria

velocità media : $\quad \underline{v}_m(t_1, t_2) \equiv \dfrac{\underline{r}(t_2) - \underline{r}(t_1)}{t_2 - t_1}$

velocità istantanea : $\quad \underline{v}(t) = \dfrac{d}{dt}\,\underline{r}(t) = \dot{\underline{r}}(t)$

$\underline{v}$ è tangente alla traiettoria

$\underline{v} = |\underline{v}|\,\hat{t}$

$\dot{s} = \dfrac{ds}{dt} = \dfrac{(\underline{v}\cdot\hat{t})\,dt}{dt} = |\underline{v}|$

accelerazione : $\quad \underline{a}(t) = \dfrac{d}{dt}\,\underline{v}(t) = \ddot{\underline{r}}(t)$

esempi:

moto rettilineo uniforme : $\begin{cases} x = a + bt \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

$\underline{v} = (b, 0, 0) = \text{costante} \qquad \underline{a} = 0$

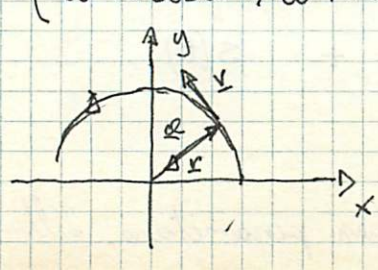
moto rettilineo uniformemente accelerato : $\begin{cases} x(t) = a + bt + ct^2 \\ y(t) = 0 \\ z(t) = 0 \end{cases}$

$\underline{v}(t) = (b + 2ct, 0, 0) \neq \underline{v}_m \qquad \underline{a} = (2c, 0, 0) = \text{costante}$

moto circolare uniforme : $\begin{cases} r(t) = R \\ \theta(t) = \frac{\pi}{2} \\ \varphi(t) = \omega t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = R\cos\omega t \\ y(t) = R\sin\omega t \\ z(t) = 0 \end{cases}$

$\underline{v} = (-\omega R\sin\omega t, \ \omega R\cos\omega t, \ 0) \qquad |\underline{v}| = \omega R = \text{costante}$

$\underline{a} = (-\omega^2 R\cos\omega t, -\omega^2 R\sin\omega t, 0) \qquad |\underline{a}| = \omega^2 R = \text{costante} = \dfrac{v^2}{R}$

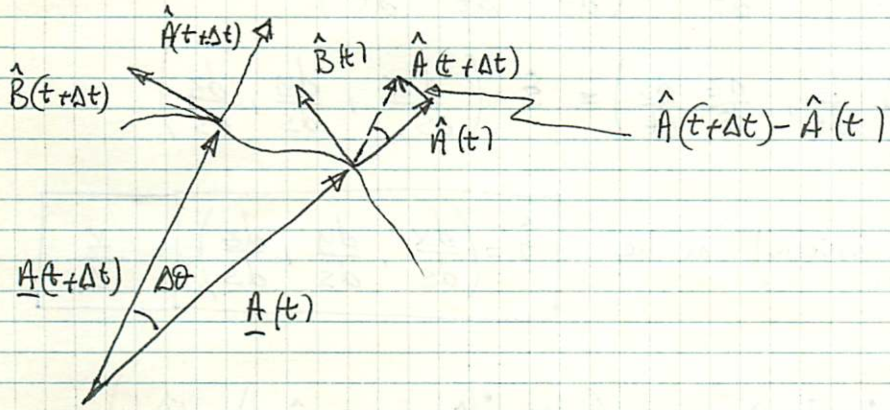


Derivata di un vettore in termini della derivata del suo modulo e del suo versore.

Sia $\underline{A}(t) = A(t)\,\hat{A}(t)$

$$\frac{d}{dt}\underline{A}(t) = \frac{dA}{dt}\hat{A} + A\frac{d\hat{A}}{dt}$$

Si consideri il versore $\hat{B}$ ortogonale ad $\hat{A}$ e concorde con il verso di moto di $\underline{A}(t)$



$$\frac{d\hat{A}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\hat{A}(t+\Delta t) - \hat{A}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2 \cdot 1 \cdot \sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)\left(\hat{B} + \ldots\right)}{\Delta t}$$

$$= \hat{B}\,\dot{\theta}$$

$$\boxed{\frac{d\bar{A}}{dt} = \dot{A}\,\hat{A} + A\dot{\theta}\,\hat{B}}$$

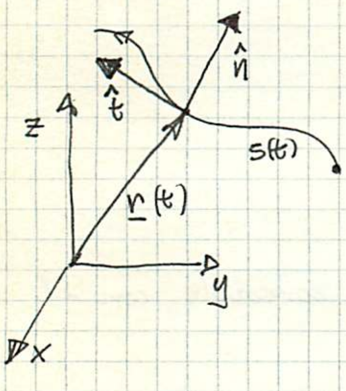
$\dot{\theta}$ = velocità angolare istantanea

se $\underline{A}$ ha modulo costante $\quad \frac{d\bar{A}}{dt} = A\dot{\theta}\,\hat{B} = \underline{\omega} \times \underline{A}$

essendo $\underline{\omega}$ il vettore ortogonale al piano di rotazione di $\underline{A}$ (verso della mano destra) e di modulo $|\underline{\omega}| = \dot{\theta}$

Scomposizione del moto lungo la tangente e la normale alla traiettoria

Nel caso di moto generico $\underline{r} = \underline{r}(t)$ si considerino i versori istantanei $\hat{t}$ ed $\hat{n}$ tangente e normale alla traiettoria con $\hat{n}$ nella direzione della concavità.



poiché risulta $\boxed{\underline{v} = v\,\hat{t} = \dot{s}\,\hat{t}}$ $\quad \hat{t} = \underline{v}/\dot{s} = \dfrac{\underline{v}}{|\underline{v}|}$

ed anche

$$\underline{v} = \frac{d}{dt}\underline{r} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) =$$

$$= \left(\frac{dx}{ds}\frac{ds}{dt}, \frac{dy}{ds}\frac{ds}{dt}, \frac{dz}{ds}\frac{ds}{dt}\right) = \dot{s}\left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right)$$

(essendo $\dot{s} = v$ per definizione) si ha $\boxed{\hat{t} = \left(\dfrac{dx}{ds}, \dfrac{dy}{ds}, \dfrac{dz}{ds}\right)} \boxed{= \dfrac{\underline{v}}{|\underline{v}|}}$

$$\underline{a} = \frac{d}{dt}\underline{v} = \ddot{s}\,\hat{t} + \dot{s}\,\dot{\theta}\,\hat{n} \qquad \left(\text{nota } \dot{\theta}\hat{n} = \underline{\omega} \times \hat{t} = \frac{d\hat{t}}{dt}\right)$$

introdotto il raggio di curvatura $R(t)$ cioè il raggio del cerchio osculatore alla traiettoria, si ha $\dot{\theta} = \dfrac{\dot{s}}{R}$

$$\boxed{\underline{a} = \ddot{s}\,\hat{t} + \frac{\dot{s}^2}{R}\,\hat{n}} \qquad a_n \equiv \frac{\dot{s}^2}{R} = \text{accelerazione centripeta}$$

poiché $\dot{\theta}\,\hat{n} = \dfrac{d\hat{t}}{dt} = \dfrac{d\hat{t}}{ds}\,\dot{s} = \dfrac{\dot{s}}{R}\,\hat{n}$ $\qquad \dfrac{d\hat{t}}{ds} = \dfrac{1}{R}\,\hat{n}$

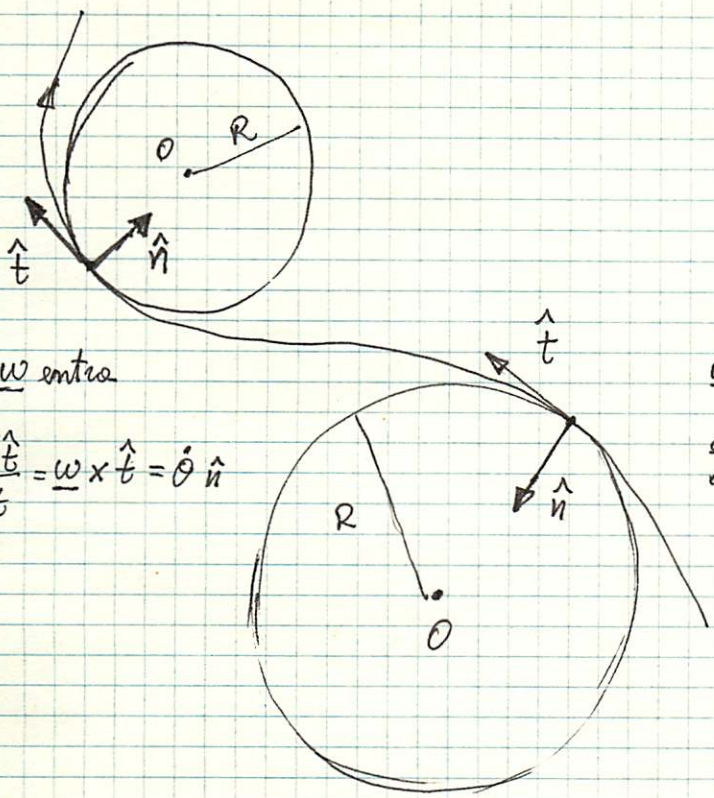
poiché $\hat{n}$ è un versore

$$\boxed{\frac{1}{R} = \left|\frac{d\hat{t}}{ds}\right| = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}} \boxed{= \frac{a_n}{|\underline{v}|^2}}$$

NB: non confondere le componenti tangenziale e normale con quelle trasversale e radiale (coordinate polari)

accelerazione centripeta

Si consideri per semplicità una traiettoria piana.



$\underline{w}$ entra

$$\frac{d\hat{t}}{dt} = \underline{\omega} \times \hat{t} = \dot{\theta}\,\hat{n}$$

$\underline{w}$ esce

$$\frac{d\hat{t}}{dt} = \underline{\omega} \times \hat{t} = \dot{\theta}\,\hat{n}$$

Il versore $\hat{n}$, e quindi l'accelerazione normale è sempre centripeta, cioè diretta verso il centro di curvatura (centro del cerchio osculatore)

$$\boxed{\underline{a}_n = \frac{\dot{s}^2}{R}\,\hat{n}} \qquad \theta = \frac{s}{R}$$

l'accelerazione centripeta è nulla solo per moti rettilinei $R^{-1}=0$

Moti piani : coordinate cartesiane

Nel caso di moto piano $\begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}$ ovvero $\begin{cases} x(s) \\ y(s) \end{cases}$ + $s(t)$

valgono sempre le relazioni

$\underline{v} = \dot{s}\,\hat{t}$ $\qquad \hat{t} = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}\right)$ oppure $\hat{t} = \frac{\underline{v}}{\dot{s}} = \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|}$

$\underline{a} = \ddot{s}\,\hat{t} + \frac{\dot{s}^2}{R}\hat{n}$ $\qquad \frac{1}{R} = \left|\frac{d\hat{t}}{ds}\right| = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2}$ oppure $\frac{1}{R} = \frac{a_n}{|\underline{v}|^2}$

e si può dare una semplice espressione per $\hat{t}$ e R in termini di $y(x)$

$$d\underline{s} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j}$$

$$ds = \sqrt{d\underline{s}\cdot d\underline{s}} = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$= dy\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$$

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} \qquad \frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{ds} = \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

$$\boxed{\hat{t} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}, \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}\right)}$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{d}{ds}\frac{dx}{ds} = \frac{d}{dx}\frac{dx}{ds}\cdot\frac{dx}{ds} = \frac{-\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dy}{dx}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} = \frac{d}{ds}\frac{dy}{ds} = \frac{d}{dx}\frac{dy}{ds}\cdot\frac{dx}{ds} = \left(\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} - \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^2} \qquad \frac{d^2y}{ds^2} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^2}$$

$$\frac{1}{R} = \sqrt{\frac{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^4}}$$

$$\boxed{R = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}}$$

per una traiettoria $x(y)$

$$R = \frac{\left[1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]^{3/2}}{\left|\frac{d^2x}{dy^2}\right|}$$

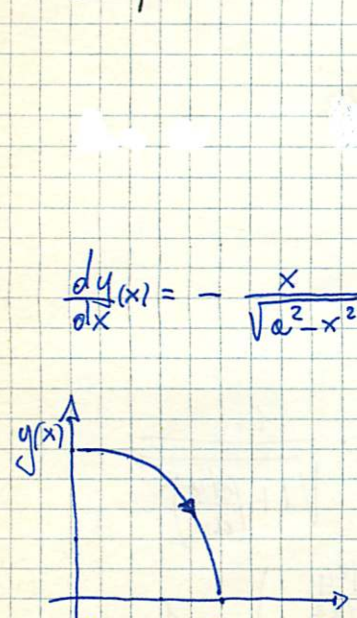
la lunghezza della traiettoria tra gli istanti t_1 e t_2 in cui $x(t_1) = x_1$ ed $x(t_2) = x_2$ è data da:

$$l_{12} = s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} ds = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

esempio: se $y(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ (moto circolare di raggio a)

$$\hat{t} = \left(\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}, -\frac{x}{a}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}(x) = -\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} \qquad l_{0a} = \int_0^a \frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx = -a \arctan\left(\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{x^2-a^2}\right)\Bigg|_0^a = \frac{\pi}{2} a$$

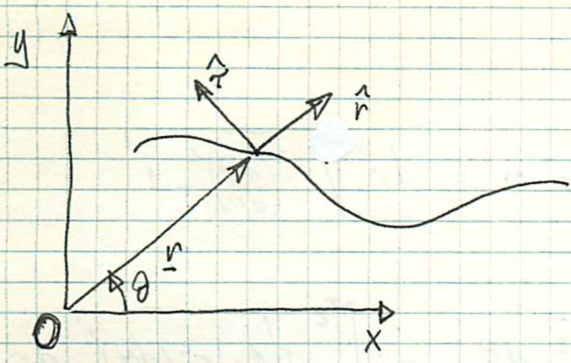


$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} - x\frac{x}{(a^2-x^2)^{3/2}} = \frac{-a^2}{(a^2-x^2)^{3/2}}$$

$$R = \frac{\left(\frac{a^2}{a^2-x^2}\right)^{3/2}}{\frac{a^2}{(a^2-x^2)^{3/2}}} = a$$

Moti piani : coordinate polari

Usando coordinate polari di versori $\hat{\tau}$ ed $\hat{r}$



dove $\hat{\tau}$ è ortogonale ad $\hat{r}$

il moto è descritto da:

$$\begin{cases} r(t) \\ \theta(t) \end{cases} \quad \text{ovvero}$$

$\underline{r}(t) = r\,\hat{r}$ si noti che $\hat{r} = \hat{r}(t)$

$$\frac{d\hat{r}}{dt} = \underline{\omega} \times \hat{r} = \hat{\tau}$$

$$\frac{d\hat{\tau}}{dt} = \underline{\omega} \times \hat{\tau} = -\hat{r}$$

$$\dot{\underline{r}} = \dot{r}\,\hat{r} + r\,\frac{d\hat{r}}{dt} = \dot{r}\,\hat{r} + r\dot{\theta}\,\hat{\tau}$$

$$\ddot{\underline{r}} = \ddot{r}\,\hat{r} + \dot{r}\,\frac{d\hat{r}}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\,\hat{\tau} + r\ddot{\theta}\,\hat{\tau} + r\dot{\theta}\,\frac{d\hat{\tau}}{dt} =$$

nota $\underline{\omega} \times \hat{\tau} = -\hat{r}$

$$= \ddot{r}\,\hat{r} + \dot{r}\dot{\theta}\,\hat{\tau} + \dot{r}\dot{\theta}\,\hat{\tau} + r\ddot{\theta}\,\hat{\tau} - r\dot{\theta}\,\dot{\theta}\,\hat{r}$$

$$= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{\tau}$$

si definiscono velocità e accelerazione radiale e trasversale

$$\begin{cases} v_r = \dot{r} \\ v_\tau = r\dot{\theta} \end{cases} \qquad \begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\tau = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \end{cases}$$

$$-r\dot{\theta}^2 = -\frac{v_\tau^2}{r} \neq \text{accelerazione centripeta}$$

solo quando $v_r = 0$ cioè $r = \text{costante} = R$, $v_\tau = |\underline{v}|$ e $-\frac{v_\tau^2}{r} = -\frac{|\underline{v}|^2}{R}$

= accelerazione centripeta (in questo caso il polo O è il centro del cerchio osculatore) nota l'equazione della traiettoria $r(\theta)$ la lunghezza della traiettoria è:

$$\underline{ds} = \dot{\underline{r}}\, dt = dr\, \hat{r} + r\, d\theta\, \hat{\tau}$$

$$ds = \sqrt{\underline{ds} \cdot \underline{ds}} = d\theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} = dr \sqrt{r^2 \left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2 + 1}$$

$$s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} ds = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{1 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2}\, dr$$

Integrazione dell'equazione del moto

Siano noti $\underline{a}(t)$, $\underline{v}(0)$ ed $\underline{r}(0)$

$$\underline{v}(t) = \underline{v}(0) + \int_0^t \underline{a}(t')\, dt'$$

$$\underline{r}(t) = \underline{r}(0) + \int_0^t \underline{v}(t')\, dt'$$

nel moto uniforme $\underline{v}(t) =$ costante

$$\underline{r}(t) = \underline{r}(0) + \underline{v}\, t$$

nel moto uniformemente accelerato $\underline{a}(t) =$ costante

$$\underline{v}(t) = \underline{v}(0) + \underline{a}\, t$$

$$\underline{r}(t) = \underline{r}(0) + \underline{v}(0)\, t + \frac{1}{2} \underline{a}\, t^2$$

Un punto materiale si muove nel piano xy con equazione $\underline{r}(t) = ct\,\hat{i} + b\,e^{-kt}\,\hat{j}$. Determinare le dimensioni fisiche di c, b e k; l'equazione della traiettoria; la velocità e l'accelerazione. Studiare il moto nel limite $t \to \infty$

$[c] = [L\,M^0\,T^{-1}]$

$[b] = [L\,M^0\,T^0]$

$[k] = [L^0\,M^0\,T^{-1}]$

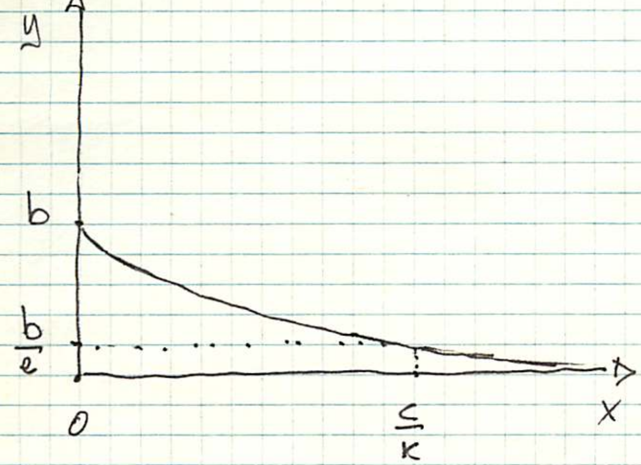
Le coordinate cartesiane del punto sono:

$x(t) = ct$

$y(t) = b\,e^{-kt}$

eliminando il tempo: $\quad y(x) = b\,e^{-\frac{k}{c}x}$

che è l'equazione della traiettoria



la velocità è: $\quad \dot{\underline{r}} = c\,\hat{i} - bk\,e^{-kt}\,\hat{j}$

$$|\dot{\underline{r}}| = \sqrt{c^2 + b^2 k^2 e^{-2kt}}$$

l'accelerazione è: $\ddot{\underline{r}} = b u^2 e^{-ut} \hat{j}$

$$|\ddot{\underline{r}}| = |b| u^2 e^{-ut}$$

Nel limite $t \to \infty$ $\qquad \underline{r} \to c t \hat{i}$

$$\dot{\underline{r}} \to c \hat{i}$$

$$\ddot{\underline{r}} \to 0$$

il moto diventa uniforme lungo l'asse x.

Il moto di un punto è descritto dal vettore posizione

$$\underline{r}(t) = A\cos\alpha t\ \hat{i} + A\sin\alpha t\ \hat{j} + (\beta t - \gamma)\ \hat{k}$$

Determinare le dimensioni fisiche di A, α, β, γ.

Trovare il versore tangente alla traiettoria per $A = 2\ m$ $\alpha = 2\ s^{-1}$ $\beta = 3\ m s^{-1}$ Determinare il raggio di curvatura della traiettoria e l'equazione oraria $s(t)$.

Studiare la forma della traiettoria

Per omogeneità con $[\underline{r}] = [L M^0 T^0]$ e dovendo essere $[\alpha t] = [L^0 M^0 T^0]$

$[A] = [L M^0 T^0]$ $\qquad [\alpha] = [L^0 M^0 T^{-1}]$ $\qquad [\beta] = [L M^0 T^{-1}]$

$[\gamma] = [L M^0 T^0]$

il versore tangente è $\hat{t} = \dfrac{\bar{v}}{|\bar{v}|} = \dfrac{\dot{r}}{|\dot{r}|}$

$$\underline{\dot{r}} = -A\alpha\sin\alpha t\ \hat{i} + A\alpha\cos\alpha t\ \hat{j} + \beta\ \hat{k}$$

$$|\underline{\dot{r}}| = \sqrt{A^2\alpha^2\sin^2\alpha t + A^2\alpha^2\cos^2\alpha t + \beta^2} = \sqrt{A^2\alpha^2 + \beta^2} = \text{costante}$$

$$\hat{t} = \frac{1}{\sqrt{A^2\alpha^2 + \beta^2}}\left(-A\alpha\sin\alpha t\ \hat{i} + A\alpha\cos\alpha t\ \hat{j} + \beta\ \hat{k}\right)$$

$|\underline{\dot{r}}| = 5\ m s^{-1}$ essendo il moto uniforme l'accelerazione è solo normale alla traiettoria

$$\underline{a} = \cancel{\ddot{s}\,\hat{t}} + \frac{\dot{s}^2}{R}\hat{n} = \frac{|\dot{r}|^2}{R}\hat{n}$$

$$\underline{a} = \ddot{\underline{r}} = -A\alpha^2 \cos\alpha t \,\hat{i} - A\alpha^2 \sin\alpha t\,\hat{j}$$

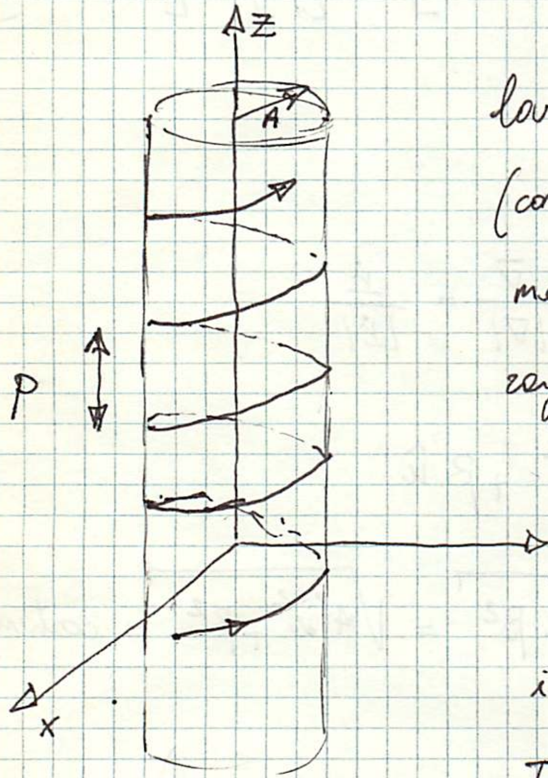
$$|\underline{a}| = \sqrt{A^2\alpha^4\cos^2\alpha t + A^2\alpha^4 \sin^2\alpha t} = \sqrt{A^2\alpha^4} = |A|\,\alpha^2$$

$$= \frac{|\dot{\underline{r}}|^2}{R}$$ il raggio di curvatura è:

$$R = \frac{|\dot{\underline{r}}|^2}{|\underline{a}|} = \frac{A^2\alpha^2 + \beta^2}{|A|\,\alpha^2} = \frac{25}{8} = 3.125 \text{ m}$$

$$d\underline{s} = \dot{\underline{r}}\,dt \qquad ds = |\dot{\underline{r}}|\,dt = \sqrt{A^2\alpha^2+\beta^2}\,dt$$

$$\int_0^{s(t)} ds = \int_0^t \sqrt{A^2\alpha^2+\beta^2}\,dt \qquad s(t) = \sqrt{A^2\alpha^2+\beta^2}\;t$$ moto uniforme



la traiettoria è un elica (composizione di moto circolare nel piano xy su cerchio di raggio A centrato nell'origine e moto uniforme lungo l'asse z).

il periodo dell'elica è

$T = \frac{2\pi}{\alpha}$ ed il passo

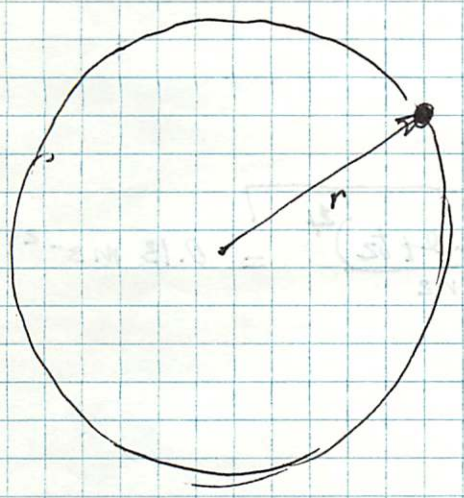
$p = \dot{z}\,T = \beta\,\frac{2\pi}{\alpha}$

esercizio: ricavare $x(s)$ $y(s)$ $z(s)$ e dimostrare che

$$\hat{t} = \left(\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial s}\right) \quad e \quad \frac{1}{R} = \sqrt{\left(\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}\right)^2}$$ coincidono

con quelli già trovati.

Un punto si muove su una circonferenza di raggio $r = 1\,m$ con moto uniformemente accelerato. Agli istanti di tempo $t_1 = 1\,s$ e $t_2 = 2\,s$ la lunghezza di circonferenza percorsa è $\ell_1 = 0.15\ m$ e $\ell_2 = 0.4\ m$. Calcolare l'accelerazione tangenziale e la velocità all'istante $t = 0$, il valore medio dei moduli della velocità e dell'accelerazione tangenziale nell'intervallo $0 \le t \le t_2$, la velocità angolare ω ed il modulo dell'accelerazione all'istante t_2.



Sia $s(t)$ la lunghezza dell'arco di circonferenza percorsa al tempo t.
Detta v_0 la velocità iniziale ed a_{0t} la accelerazione tangenziale iniziale:

$$\ddot{s}(t) = a_{0t} = \text{costante}$$

$$\dot{s}(0) = v_0 \qquad s(0) = 0$$

$$s(t) = v_0 t + \frac{1}{2} a_{0t} t^2$$

$$\begin{cases} \ell_1 = v_0 t_1 + \frac{1}{2} a_{0t} t_1^2 \\ \ell_2 = v_0 t_2 + \frac{1}{2} a_{0t} t_2^2 \end{cases}$$

$$a_{0t} = 2\,\frac{\ell_2 t_1 - \ell_1 t_2}{t_2^2 t_1 - t_1^2 t_2} = 0.1\ m s^{-2}$$

$$v_0 = \frac{\ell_2 t_1^2 - \ell_1 t_2^2}{t_2 t_1^2 - t_1 t_2^2} = 0.1\ m s^{-1}$$

Il valore medio del modulo della velocità nell'intervallo $[0, t_2]$ vale

$$v_m = \frac{\ell(t_2)}{t_2} = \frac{1}{t_2}\int_0^{t_2} v(t)\, dt = 0.2\ m s^{-1}$$

l'accelerazione tangenziale media è:

$$a_{t\,m} = \frac{v(t_2)-v(0)}{t_2} = \frac{1}{t_2}\int_0^{t_2} a_t(t)\,dt = a_t = 0.1\ ms^{-2}$$

All'istante t_2 la velocità angolare è:

$$\omega(t_2) = \frac{v(t_2)}{r} = \frac{a_t t_2 + v_0}{r} = 0.3\ rad\,s^{-1}$$

A questo stesso istante si ha una accelerazione centripeta

$$a_n(t_2) = \frac{v(t_2)^2}{r} = \omega(t_2)^2 r$$

e quindi una accelerazione di modulo

$$a(t_2) = \sqrt{a_t^2 + a_n(t_2)^2} = \sqrt{a_t^2 + \frac{(v_0 + a_t t_2)^4}{r^2}} = 0.13\ ms^{-2}$$

si noti che:

il valore medio del modulo della velocità $= \frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = \frac{s(t_2)-s(t_1)}{t_2-t_1}$

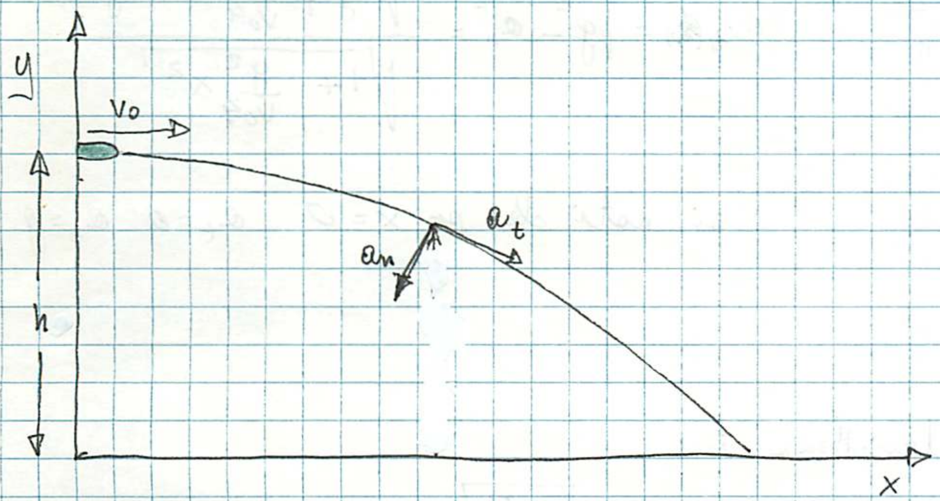
è in generale diverso dal modulo della velocità media $\underline{v}_m = \frac{\underline{r}(t_2)-\underline{r}(t_1)}{t_2-t_1} =$

$$= \frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} \underline{v}(t)\,dt$$

e così anche per l'accelerazione o un qualsiasi vettore $\underline{A}(t)$ funzione del parametro t

$$\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} |\underline{A}(t)|\,dt \neq \left|\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2} \underline{A}(t)\,dt\right|$$

Un corpo viene lanciato orizzontalmente da una altezza h rispetto al suolo con velocità $\underline{v_0}$. Trascurando la resistenza dell'aria si calcoli le componenti tangenziale a_t e normale a_n dell'accelerazione del corpo rispetto alla traiettoria in un punto generico; la lunghezza della traiettoria dall'istante di lancio a quello di caduta al suolo.



Rispetto al sistema scelto si ha: $x(0)=0 \quad y(0)=h \quad \dot{x}(0)=v_0 \quad \dot{y}(0)=0$

$$\begin{cases} \ddot{x}(t)=0 \\ \ddot{y}(t)=-g \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}(t)=v_0 \\ \dot{y}(t)=-gt \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t)=v_0 t \\ y(t)=h-\frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

eliminando t si ricava l'equazione della traiettoria:

$$y=h-\frac{g}{2v_0^2}x^2 \qquad \dot{y}(x)=-\frac{g}{v_0}x \qquad 0\le x\le \sqrt{\frac{2v_0^2 h}{g}}$$

si ha $a_n=\frac{v^2}{R}$ dove $v^2=\dot{x}^2+\dot{y}^2=v_0^2+\frac{g^2}{v_0^2}x^2=$

$$= v_0^2+2g(h-y)$$

$$\frac{1}{R}=\frac{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}=\frac{\left|-\frac{g}{v_0^2}\right|}{\left[1+\left(-\frac{g}{v_0^2}x\right)^2\right]^{3/2}}=\frac{g/v_0^2}{\left[1+\frac{g^2}{v_0^4}x^2\right]^{3/2}}$$

$$a_n = \frac{\left(v_0^2 + \frac{g^2}{v_0^2} x^2\right) \frac{g}{v_0^2}}{\left[1 + \frac{g^2}{v_0^4} x^2\right]^{3/2}} = g \frac{1 + \frac{g^2}{v_0^4} x^2}{\left(1 + \frac{g^2}{v_0^4} x^2\right)^{3/2}} = \frac{g}{\sqrt{1 + \frac{g^2}{v_0^4} x^2}}$$

poichè $g^2 = a_t^2 + a_n^2$ $\qquad a_t = \sqrt{g^2 - a_n^2} = \dfrac{\sqrt{g^2 + \frac{g^4}{v_0^4} x^2 - g^2}}{\sqrt{1 + \frac{g^2}{v_0^4} x^2}}$

$$a_t = \frac{\frac{g^2}{v_0^2} x^2}{\sqrt{1 + \frac{g^2}{v_0^4} x^2}}$$

si noti che per $x = 0$ $\quad a_t = 0 \quad a_n = g$

la lunghezza della traiettoria è:

$$l = \int ds = \int_0^{\sqrt{\frac{2 v_0^2 h}{g}}} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_0^{\sqrt{\frac{2 v_0^2 h}{g}}} \sqrt{1 + \frac{g^2}{v_0^4} x^2}\, dx =$$

$$= \frac{v_0^2}{g} \int_0^{\sqrt{\frac{2hg}{v_0^2}}} \sqrt{1 + z^2}\, dz =$$

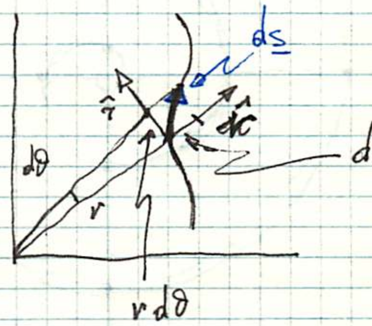
$$= \frac{v_0^2}{g} \left[\frac{1}{2} z \sqrt{1 + z^2} + \frac{1}{2} \ln \left(z + \sqrt{1 + z^2} \right) \right]_0^{\sqrt{\frac{2hg}{v_0^2}}} =$$

$$= \frac{v_0^2}{g} \left[\sqrt{\frac{2hg}{2 v_0^2}} \sqrt{1 + \frac{2hg}{v_0^2}} + \frac{1}{2} \ln \left(\sqrt{\frac{2hg}{v_0^2}} + \sqrt{1 + \frac{2hg}{v_0^2}} \right) \right]$$

Un punto materiale si muove su una traiettoria piana di equazione $r = r_0 e^{-\theta}$ $\quad \theta \geq 0$ e $r_0 = \frac{10}{\sqrt{2}}$ cm.
Calcolare la lunghezza della traiettoria per $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
Calcolare la lunghezza totale della traiettoria ed il tempo impiegato a percorrerla a velocità uniforme $v_0 = 1 \text{ mm s}^{-1}$.
Trovare velocità ed accelerazione radiale e trasversale in funzione del tempo.

l'elemento infinitesimo di lunghezza della traiettoria è:

$$d\underline{s} = dr\,\hat{r} + r\,d\theta\,\hat{\tau}$$



$$ds = d\theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} =$$

$$= d\theta \sqrt{r_0^2 e^{-2\theta} + \left(-r_0 e^{-\theta}\right)^2} = \sqrt{2}\, r_0\, e^{-\theta}\, d\theta$$

Per $0 \leq \theta \leq 2\pi$ la lunghezza della traiettoria è l:

$$l = \int_0^{2\pi} ds(\theta) = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, r_0 e^{-\theta} d\theta = \sqrt{2}\, r_0\, e^{-\theta} \Big|_{2\pi}^{0} =$$

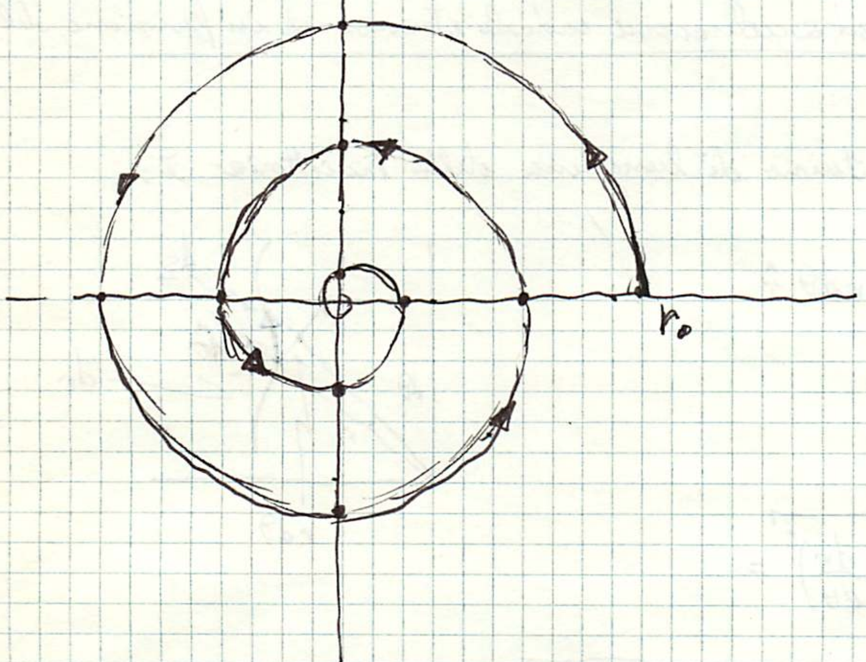
$$= \sqrt{2}\, r_0 \left(1 - e^{-2\pi}\right)$$

la lunghezza totale della traiettoria è:

$$L = \lim_{\theta \to \infty} \int_0^{\theta} \sqrt{2}\, r_0 e^{-q} dq = \lim_{\theta \to \infty} \sqrt{2}\, r_0\, e^{-q} \Big|_{\theta}^{0} = \sqrt{2}\, r_0$$

il tempo impiegato a percorrerlo è:

$$t = \frac{L}{v_0} = \frac{\sqrt{2}\, r_0}{v_0} = \frac{\sqrt{2}\ 10/\sqrt{2}\ \text{cm}}{0.1\ \text{cm s}^{-1}} = 10\ \text{s}$$



$$\begin{cases} v_r = \dot{r} = -r_0 e^{-\theta}\dot{\theta} \\ v_\theta = r\dot{\theta} = r_0 e^{-\theta}\dot{\theta} \end{cases}$$

$$\sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = \sqrt{2}\, r_0 e^{-\theta}\dot{\theta} = v_0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} v_r = -\dfrac{v_0}{\sqrt{2}} \\ v_\theta = \dfrac{v_0}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

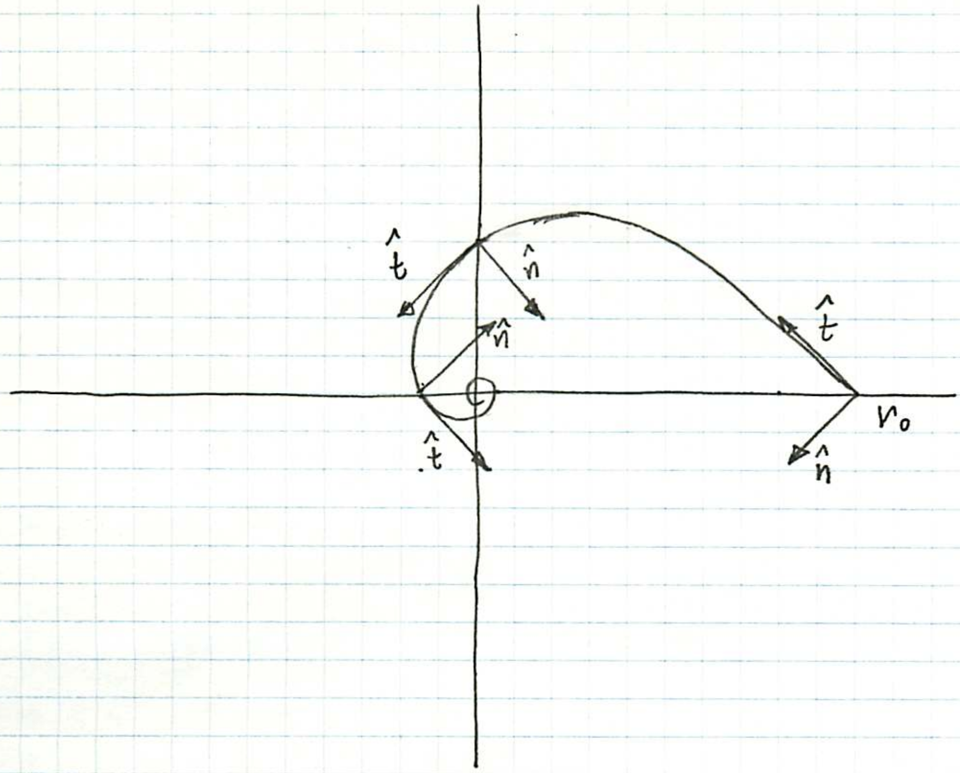
$$r_0 e^{-\theta}\dot{\theta} = \frac{v_0}{\sqrt{2}} \rightarrow e^{-\theta}\, d\theta = \frac{v_0}{r_0\sqrt{2}}\, dt \qquad 1 - e^{-\theta(t)} = \frac{v_0}{r_0\sqrt{2}}\, t$$

$$\dot{\theta} = \left(1 - \frac{v_0}{\sqrt{2}\, r_0} t\right)^{-1} \frac{v_0}{\sqrt{2}\, r_0} \qquad \ddot{\theta} = \left(\frac{v_0}{\sqrt{2}\, r_0}\right)^2 \left(1 - \frac{v_0}{\sqrt{2}\, r_0} t\right)^{-2}$$

$$\theta(t) = -\ln\left(1 - \frac{v_0}{\sqrt{2}\, r_0} t\right)$$

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -r\ddot{\theta} = -\dfrac{v_0^2}{2r_0} e^{-\theta(t)} \left(1 - \dfrac{v_0}{\sqrt{2}\, r_0} t\right)^{-2} = -\dfrac{v_0^2}{2r_0}\left(1 - \dfrac{v_0}{\sqrt{2}\, r_0} t\right)^{-1} \\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \left[\dfrac{v_0^2}{2r_0} e^{-\theta(t)} - \dfrac{v_0^2}{r_0} e^{-\theta(t)}\right]\left(1 - \dfrac{v_0}{\sqrt{2}\, r_0} t\right)^{-2} = -\dfrac{v_0^2}{2r_0}\left(1 - \dfrac{v_0}{\sqrt{2}\, r_0} t\right)^{-1} \end{cases}$$

il versore tangente alla traiettoria è $\hat{t} = \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|} = \left(\frac{v_r}{v_0}, \frac{v_\tau}{v_0}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$



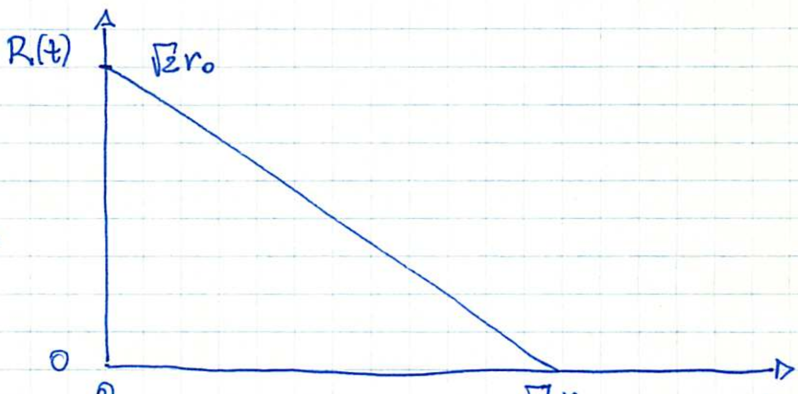
l'accelerazione è tutta normale alla traiettoria:

$$\underline{a} = \cancel{\ddot{s}\,\hat{t}} + \frac{\dot{s}^2}{R}\,\hat{n} \qquad \text{in quanto } \ddot{s} = 0$$

il raggio di curvatura vale

$$a_n = |\underline{a}| = \frac{\dfrac{v_0^2}{\sqrt{2}\,r_0}}{1 - \dfrac{v_0}{\sqrt{2}\,r_0}\,t}$$

$$R = \frac{|\underline{v}|^2}{a_n} = \sqrt{2}\,r_0\left(1 - \frac{v_0}{\sqrt{2}\,r_0}\,t\right) = \sqrt{2}\,r$$



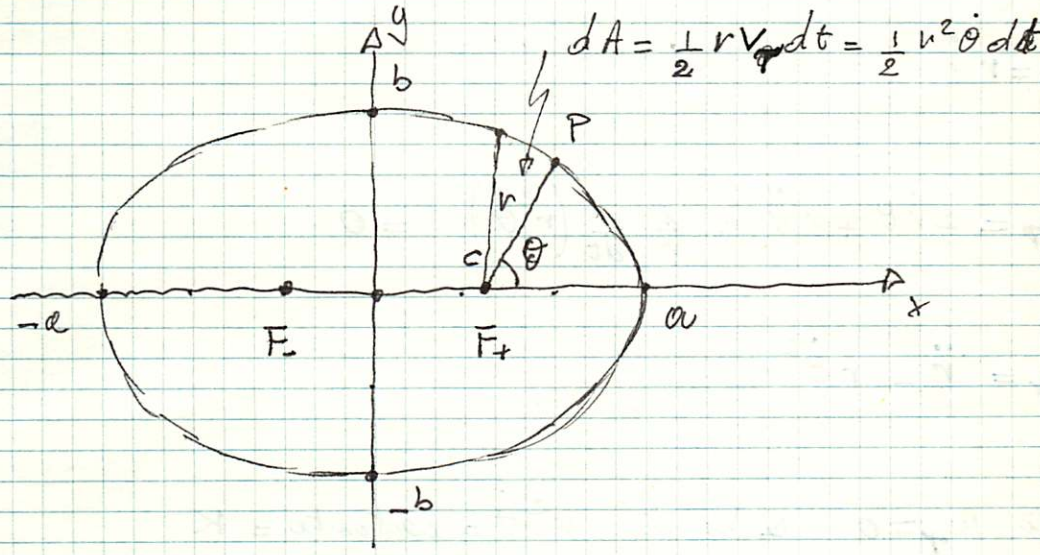
NB: $r\dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2}{2r_0}\left(1 - \frac{v_0}{\sqrt{2}\,r_0}\,t\right)^{-1} \neq a_n$ poichè $\dot{r} \neq 0$

Un punto materiale descrive una traiettoria ellittica di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $a > b$.

Scrivere l'equazione della traiettoria in coordinate polari con polo in uno dei fuochi dell'ellisse.

Calcolare velocità ed accelerazione radiali nell'ipotesi che l'accelerazione trasversale sia nulla. Esprimere l'accelerazione radiale in termini del periodo T del moto e del semiasse a

---



Posto $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ i fuochi $F_\pm$ hanno coordinate

$F_\pm = (\pm c, 0)$. Si scelga F_+ come polo.

$$\begin{cases} x = c + r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{c^2 + r^2\cos^2\theta + 2cr\cos\theta}{a^2} + \frac{r^2\sin^2\theta}{b^2} = 1$$

$$\cancel{1} - \frac{b^2}{a^2} + \frac{r^2}{a^2}\cos^2\theta + \frac{2cr}{a^2}\cos\theta + \frac{r^2}{b^2} - \frac{r^2}{b^2}\cos^2\theta = \cancel{1}$$

$$r^2\left(a^2 - c^2\cos^2\theta\right) + 2r\, c b^2 \cos\theta - b^4 = 0$$

$$r = \frac{-cb^2\cos\theta + \sqrt{\cancel{c^2b^4\cos^2\theta} + a^2b^4 - \cancel{c^2b^4\cos^2\theta}}}{a^2 - c^2\cos^2\theta} = \frac{ab^2 - cb^2\cos\theta}{(a - c\cos\theta)(a + c\cos\theta)}$$

$$r(\theta) = \frac{b^2}{a + c\cos\theta}$$

equazione della traiettoria in coordinate polari di fuoco F_+

$$\begin{cases} V_r = \dot r = \dfrac{dr}{d\theta}\,\dot\theta = \dfrac{b^2 c \sin\theta}{(a + c\cos\theta)^2}\,\dot\theta = \dfrac{c\sin\theta}{b^2}\, r^2\dot\theta \\ \\ V_\varphi = r\dot\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_\varphi = 2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta = \dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}\left(r^2\dot\theta\right) = 0 \\ \\ a_r = \ddot r - r\dot\theta^2 \end{cases}$$

poichè $a_\varphi = 0$ si ha che $r^2\dot\theta = \text{costante} = K$

$$V_r = \dot r = \frac{cK}{b^2}\sin\theta$$

$$a_r = \ddot r - r\dot\theta^2 = \frac{cK}{b^2}\cos\theta\,\dot\theta - r\dot\theta^2 = \dot\theta\left(\frac{cK\cos\theta}{b^2} - r\dot\theta\right) =$$

$$= \frac{K}{r^2}\left(\frac{cK\cos\theta}{b^2} - \frac{K}{r}\right) = \frac{K^2}{r^2}\left(\frac{c\cos\theta}{b^2} - \frac{a + c\cos\theta}{b^2}\right) =$$

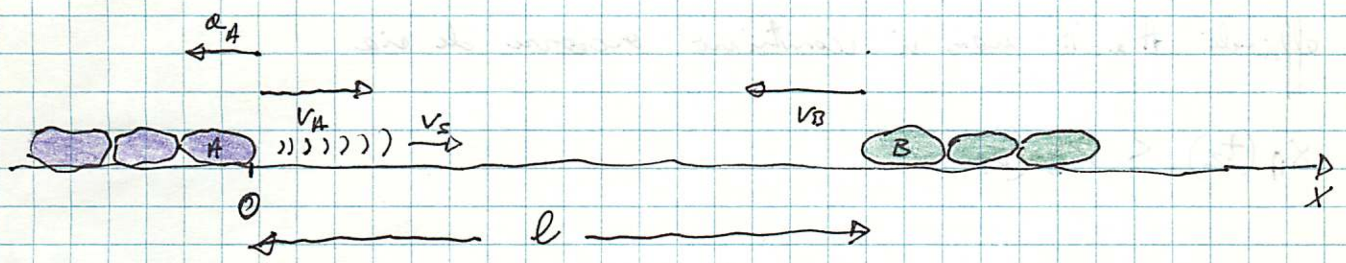
$$= \frac{K^2}{r^2}\left(-\frac{a}{b^2}\right) = -\frac{K^2 a}{b^2}\frac{1}{r^2}$$

velocità areolare $= \dfrac{dA}{dt} = \dfrac{1}{2}r^2\dot\theta = \dfrac{1}{2}K = \text{costante}$

area $= \pi a b = \dot A\, T$ $\qquad K = \dfrac{2\pi a b}{T} \qquad a_r = -\dfrac{4\pi^2 a^3}{T^2}\dfrac{1}{r^2}$

definizione di periodo

Due locomotive A e B viaggiano sullo stesso binario una contro l'altra con velocità $v_A = v_B = 90\ Km/h$. Quando A e B distano $l = 511\ m$ A aziona una sirena per avvertire B e inizia a decelerare con $a_A = 1.25\ m\,s^{-2}$.
Quando B percepisce il rumore della sirena incomincia a decelerare con acc. a_B. Quanto deve valere a_B affinché A e B non si scontrino? La velocità del suono sia $v_s = 340\ m\,s^{-1}$



Sia $t=0$ l'istante di tempo in cui A inizia a frenare ed emette il segnale sonoro. Sia $x_A(0) = 0$

si ha $\quad x_A(t) = v_A t - \frac{1}{2} a_A t^2 \qquad \dot{x}_A(t) = v_A - a_A t$

Il segnale sonoro giunge a B all'istante t_1 dato da:

$$v_s t_1 = l - v_B t_1 \qquad t_1 = \frac{l}{v_s + v_B}$$

All'istante t_1 le posizioni di A e B sono tali che

$x_A(t_1) < x_B(t_1) \equiv l - v_B \frac{l}{v_s + v_B}$ e B incomincia a muoversi con legge:

$$x_B(t) = l \frac{v_s}{v_s + v_B} - v_B(t - t_1) + \frac{1}{2} a_B (t - t_1)^2 \qquad \dot{x}_B(t) = -v_B + a_B(t - t_1)$$

A si arresta al tempo $t_2 = \dfrac{v_A}{a_A}$ nella posizione

$$x_A(t_2) = \frac{v_A^2}{a_A} - \frac{1}{2} a_A \frac{v_A^2}{a_A^2} = \frac{1}{2} \frac{v_A^2}{a_A}$$

B si arresta al tempo $t_3 = \dfrac{v_B}{a_B} + t_1$ nella posizione

$$x_B(t_3) = l \frac{v_S}{v_S + v_B} - v_B \frac{v_B}{a_B} + \frac{1}{2} a_B \frac{v_B^2}{a_B^2} = l \frac{v_S}{v_S + v_B} - \frac{1}{2} \frac{v_B^2}{a_B}$$

affinché A e B non si scontrino occorre che sia

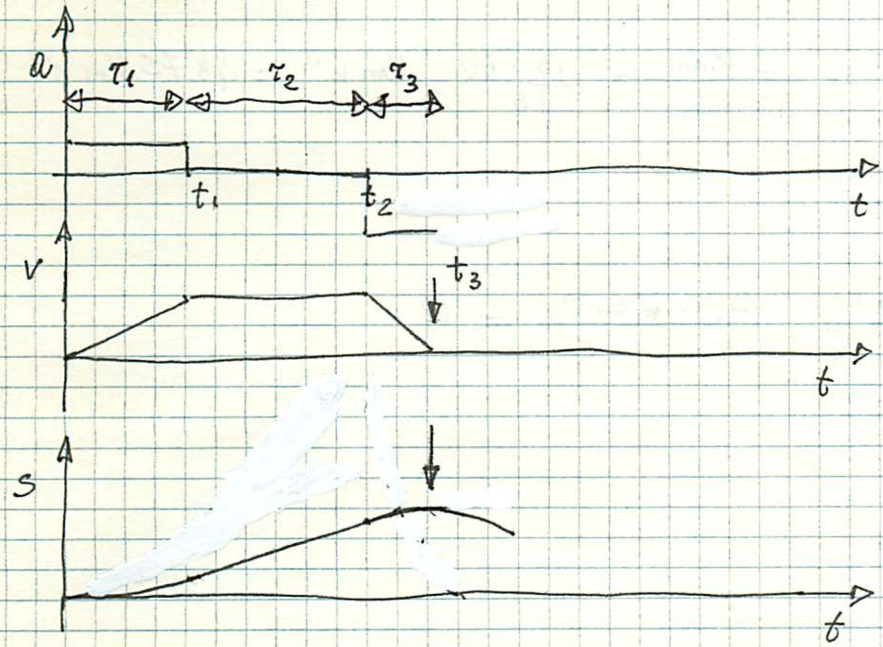
$$x_A(t_2) \leq x_B(t_3)$$

$$\frac{1}{2} \frac{v_A^2}{a_A} \leq l \frac{v_S}{v_S + v_B} - \frac{1}{2} \frac{v_B^2}{a_B}$$

$$\frac{1}{2} \frac{v_B^2}{a_B} \leq l \frac{v_S}{v_S + v_B} - \frac{1}{2} \frac{v_A^2}{a_A}$$

$$a_B \geq \frac{\frac{1}{2} v_B^2}{l \frac{v_S}{v_S + v_B} - \frac{1}{2} \frac{v_A^2}{a_A}} = \frac{a_A}{\frac{v_S}{v_S + v_B} \frac{2 l a_A}{v_B^2} - \frac{v_A^2}{v_B^2}} = 1.38 \ m s^{-2}$$

Un veicolo inizialmente fermo si mette in movimento rettilineo con accelerazione costante di modulo $a_1 = 900\ \text{Km h}^{-2}$. Dopo un tempo $\tau_1 = 4$ min l'accelerazione si annulla e la velocità rimane costante per un tempo $\tau_2 = 10$ min, dopodiché il veicolo comincia a rallentare con accelerazione $a_2 = 1800\ \text{Km h}^{-2}$. Si calcoli il tempo τ_3 impiegato dal veicolo per fermarsi e lo spazio totale percorso, la velocità media e l'accelerazione media sull'intero percorso.



si ponga $t_1 = \tau_1$

$t_2 = \tau_1 + \tau_2$

$t_3 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$

$t_3 =$ istante di arresto

$$a(t) = \begin{cases} a_1 & 0 \le t < t_1 \\ 0 & t_1 \le t < t_2 \\ -a_2 & t_2 \le t \end{cases} \qquad v(0) = 0$$

$$v(t) = \begin{cases} a_1 t & 0 \le t < t_1 & v(0) = 0 \\ a_1 \tau_1 & t_1 \le t \le t_2 & v(t_1) = a_1 \tau_1 \\ a_1 \tau_1 - a_2 (t - t_2) & t_2 \le t & v(t_2) = a_1 \tau_1 \end{cases}$$

istante di arresto $v(t_3) = 0$ $\qquad a_1 \tau_1 - a_2 \underset{\substack{\uparrow \\ t_3 - t_2 = \tau_3}}{\tau_3} = 0$

$\tau_3 = \dfrac{a_1}{a_2} \tau_1 = 2$ min $= 120$ s

$$s(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} a_1 t^2 & 0 \le t < t_1 & s(0) = 0 \\ \frac{1}{2} a_1 \tau_1^2 + a_1 \tau_1 (t - t_1) & t_1 \le t < t_2 & s(t_1) = \frac{1}{2} a_1 \tau_1^2 \\ \frac{1}{2} a_1 \tau_1^2 + a_1 \tau_1 \tau_2 - \frac{1}{2} a_2 (t - t_2)^2 + a_1 \tau_1 (t - t_2) & t_2 \le t & s(t_2) = \frac{1}{2} a_1 \tau_1^2 + a_1 \tau_1 \tau_2 \end{cases}$$

spazio totale percorso $= s(t_3) = \cancel{\frac{1}{2} a_1 \tau_1^2} + a_1 \tau_1 \tau_2 + a_1 \tau_1 \cdot \frac{a_1}{a_2} \tau_1 - \frac{1}{2} a_2 \left(\frac{a_1}{a_2} \tau_1 \right)^2 =$

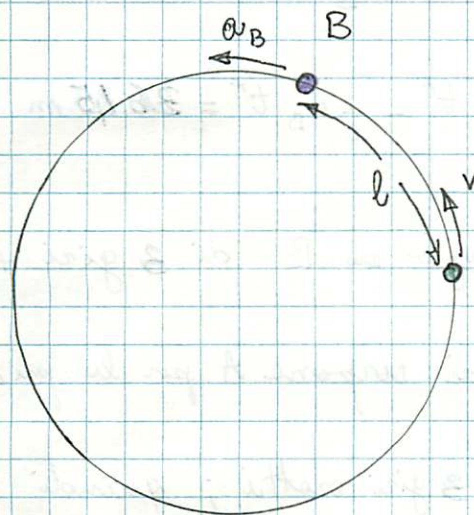
$$= \frac{1}{2} a_1 \tau_1^2 + a_1 \tau_1 \tau_2 + \frac{1}{2} \frac{a_1^2}{a_2} \tau_1^2 = 13 \text{ Km} = 13.000 \text{ m}$$

velocità media $= \dfrac{s(t_3)}{t_3} = \dfrac{13 \text{ Km}}{16 \text{ min}} = \dfrac{13 \cdot 60}{16} \text{ Km h}^{-1} = 48.75 \text{ Km h}^{-1}$

accelerazione media $= \dfrac{v(t_3)}{t_3} = \dfrac{a_1 \tau_1 - a_2 \tau_3}{\tau_1 + \tau_2 + \tau_3} = 0$

Due punti materiali A e B si muovano nello stesso verso lungo una circonferenza lunga $C = 10\,m$. A possiede velocità costante $v_A = 10\,m s^{-1}$, B ha accelerazione tangenziale costante $a_B = 0.4\,m s^{-2}$.
Il punto A supera B una prima volta al tempo $t_1 = 1 s$ ed una seconda volta al tempo $t_2 = 3 s$. Si calcoli la distanza l tra A e B a $t = 0$, il vantaggio massimo raggiunto da A nei confronti di B, l'istante τ in cui B supera A per la prima volta

---



Dette $s_A(t)$ ed $s_B(t)$ le posizioni di A e B lungo la circonferenza e scelto come origine la posizione di A a $t=0$

$$s_A(t) = v_A t$$

$$s_B(t) = l + v_B(0)\,t + \frac{1}{2} a_B t^2$$

essendo $v_B(0)$ la velocità di B a $t=0$

a $t = t_1$ si ha: $\quad v_A t_1 = l + v_B(0) t_1 + \frac{1}{2} a_B t_1^2$

a $t = t_2$ si ha: $\quad v_A t_2 = l + v_B(0) t_2 + \frac{1}{2} a_B t_2^2 + C$

da questo sistema si ricavano le incognite l e $v_B(0)$

sottraendo membro a membro:

$$v_A(t_2 - t_1) = v_B(0)(t_2 - t_1) + \frac{1}{2} a_B (t_2^2 - t_1^2) + C$$

$$v_B(0) = v_A - \frac{a_B}{2(t_2+t_1)^{-1}} - \frac{C}{t_2 - t_1} = 4.20\ m s^{-1}$$

$\ell = v_A t_1 - v_B(0) t_1 - \frac{1}{2} a_B t_1^2 = \mathbf{5.60}$ m

posto $d(t) = s_A(t) - s_B(t)$ $\quad$ $d(t)$ è massimo quando

$\frac{d}{dt} d(t) = 0 = v_A - v_B(t)$ $\quad$ $\left(\frac{d^2}{dt^2} d(t) = -a_B < 0 \right)$

$v_A = v_B(0) + a_B t$ $\quad$ $t^* = \frac{v_A - v_B(0)}{a_B} = \mathbf{14.5}$ s

$d(t^*) = v_A t^* - \ell - v_B(0) t^* - \frac{1}{2} a_B t^{*2} = \mathbf{36.45}$ m

All'istante t^* A è in vantaggio su B di **3** giri + **6.45** m

quando B riguadagna questi **6.45** metri sorpassa A per la prima volta

ed è in svantaggio rispetto ad A di **3** giri esatti; quindi

$s_A(\tau) - s_B(\tau) = \mathbf{3}c$

$v_A \tau - v_B(0)\tau - \frac{1}{2} a_B \tau^2 - \ell = \mathbf{3}c$

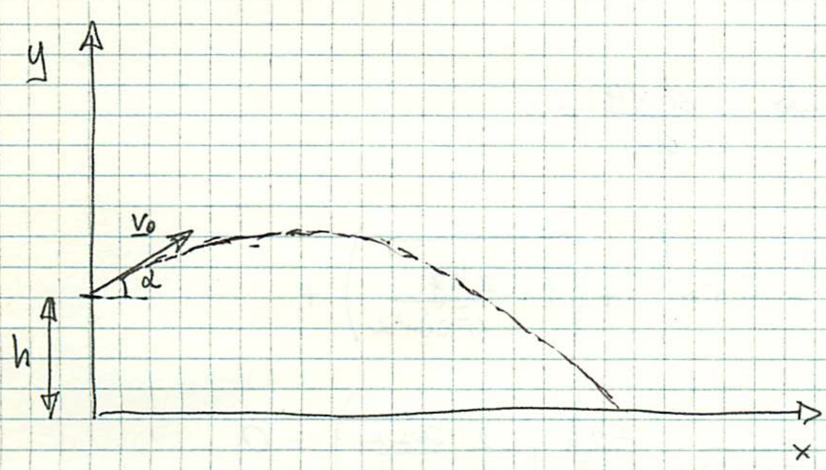
$a_B \tau^2 - 2\left(v_A - v_B(0)\right)\tau + \mathbf{6}c + 2\ell = 0$

$$\tau = \frac{v_A - v_B(0) \pm \sqrt{\left(v_A - v_B(0)\right)^2 - 2a_B(\ell + \mathbf{3}c)}}{a_B} = \begin{cases} \mathbf{20.17} \text{ s} \\ \mathbf{8.82} \text{ s} \end{cases}$$

8.82 s è il tempo in cui A sorpassa B per la terza volta

$\tau = \mathbf{20.17}$ s $(> t^*)$ è il tempo in cui B sorpassa A per la prima volta.

Un proiettile viene lanciato da una altezza h dal suolo con velocità v_0. Si determini l'inclinazione α di v_0 rispetto all'orizzontale per la quale si realizza la massima gittata. Si trascuri la resistenza dell'aria.



all'istante $t=0$ si abbia $x(0)=0$ $y(0)=h$ $\dot{x}(0)=v_0\cos\alpha$ $\dot{y}(0)=v_0\sin\alpha$; essendo $\underline{a}=(0;-g)$ si ha:

$$\begin{cases}\ddot{x}=0\\ \ddot{y}=-g\end{cases} \qquad \begin{cases}\dot{x}(t)=v_0\cos\alpha\\ \dot{y}(t)=v_0\sin\alpha-gt\end{cases}$$

$$\begin{cases}x(t)=v_0\cos\alpha\, t\\ y(t)=h+v_0\sin\alpha\, t-\frac{1}{2}gt^2\end{cases}$$

istante di caduta al suolo : $y(t)=0$

$$gt^2-2v_0\sin\alpha\, t-2h=0 \qquad t=\frac{v_0\sin\alpha+\sqrt{v_0^2\sin^2\alpha+2hg}}{g}$$

2

$$\text{gittata} = x(t) = \frac{v_0 \cos\alpha}{g}\left(v_0 \sin\alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha + 2hg}\right)$$

$$= \frac{v_0^2}{g} \sin\alpha \cos\alpha \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2hg}{v_0^2 \sin^2\alpha}}\right)$$

la gittata è massima quando $\frac{d\,x(t)}{d\alpha} = 0$

$$\cos^2\alpha\left(1+\sqrt{1+\frac{2hg}{v_0^2 \sin^2\alpha}}\right) - \sin^2\alpha\left(1+\sqrt{1+\frac{2hg}{v_0^2 \sin^2\alpha}}\right) +$$

$$+ \sin\alpha\cos\alpha \; \frac{1}{2} \, \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2hg}{v_0^2 \sin^2\alpha}}} \; \frac{2hg}{v_0^2}\left(-2\,\frac{\cos\alpha}{\sin^3\alpha}\right) = 0$$

$$\left(1 - 2\sin^2\alpha\right)\left(\sqrt{1+\frac{2hg}{v_0^2 \sin^2\alpha}} + 1 + \frac{2hg}{v_0^2 \sin^2\alpha}\right) - \frac{2hg}{v_0^2 \sin^2\alpha}\left(1 - \sin^2\alpha\right) = 0$$

dividendo per $\sin^2\alpha$ e ponendo $z = \frac{1}{\sin^2\alpha}$ $(\alpha \neq 0)$

$$(z-2)\left(\sqrt{1+Az} + 1 + Az\right) - Az(z-1) = 0$$

dove $A \equiv \frac{2hg}{V_0^2}$

$$(z-2)\sqrt{1+Az} = \cancel{Az^2} - Az - z - \cancel{Az^2} + 2 + 2Az$$

$$(z-2)^2(1+Az) = \left((z-2) - Az\right)^2$$

$$\cancel{(z-2)^2} + A^2z^2 - 2Az(z-2) - \cancel{(z-2)^2} - Az(z-2)^2 = 0$$

$$Az\left[Az - 2(z-2) - (z-2)^2\right] = 0$$

$$Az\left(Az - 2z + \cancel{4} - z^2 - \cancel{4} + 4z\right) = 0$$

$$Az^2\left(A + 2 - z\right) = 0$$

$z \neq 0$ $\qquad z = 2 + A \qquad \frac{1}{\sin^2\alpha} = 2 + \frac{2hg}{V_0^2}$

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{hg}{V_0^2}}} \qquad \alpha = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{1+\frac{hg}{V_0^2}}}\right)$$

per $h \to 0$ $\quad \alpha \to \frac{\pi}{4}$ $\qquad$ gittata $= \frac{V_0^2}{2g}$

per $h \to \infty$ $\quad \alpha \to 0$ $\qquad$ gittata infinita

Un auto che viaggia con velocità di modulo v_0 comincia a frenare e si arresta in uno spazio l (moto rettilineo).

Si determini l'accelerazione media di frenamento nei casi

a) l'accelerazione è costante $a<0$

b) l'accelerazione dipende dalla velocità con legge $a = b(\dot{x}+v_0)$ $b<0$

c) l'accelerazione varia linearmente nel tempo con legge $a = kt$ $k<0$

---

a) $\ddot{x} = a$

$\dot{x}(t) = v_0 + at$

$x(t) = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$

avendo scelto l'origine del tempo all'istante di inizio frenata e l'origine di x nella posizione occupata dall'auto a $t=0$.

istante di arresto τ: $v(\tau) = 0 = v_0 - a\tau$ $\tau = \frac{v_0}{-a}$

spazio percorso $l = v_0\tau + \frac{1}{2} a \tau^2 = -\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{a}$

$a = -\frac{v_0^2}{2l}$

accelerazione media $= a_m = \frac{-v_0}{\tau}$

$= -\frac{v_0^2}{2l}$ $\left(= \frac{1}{\tau}\int_0^\tau \ddot{x}(t)\,dt = \frac{\dot{x}(\tau) - \dot{x}(0)}{\tau} \right)$

b) $\ddot{x} = b(\dot{x} + v_0) \rightarrow \begin{cases} v = \dot{x} \\ \dot{v} = b(v+v_0) \end{cases}$

$\frac{dv}{(v+v_0)} = dt \cdot b$ $\ln(v(t)+v_0) - \ln 2v_0 = bt$

$$\frac{v(t)+v_0}{2v_0} = e^{bt} \qquad v(t) = 2v_0\, e^{bt} - v_0$$

$$\dot{x} = 2v_0\, e^{bt} - v_0 \qquad x(t) = \frac{2v_0}{b}\left[e^{bt} - 1\right] - v_0 t$$

$$\dot{x} = b\,x + v_0(1+bt)$$

istante di arresto : $v(\tau)=0 \qquad 2v_0\, e^{b\tau} = v_0 \qquad \tau = -\frac{\ln 2}{b}$

spazio percorso $= \ell = \frac{2v_0}{b}\left(\frac{1}{2}-1\right) + v_0\frac{\ln 2}{b} = \frac{v_0}{b}\left(\ln 2 - 1\right)$

$$b = \frac{v_0}{\ell}\left(\ln 2 - 1\right)$$

accelerazione media $= a_m = \frac{v(\tau)-v_0}{\tau} = -\frac{v_0}{\tau} = \frac{v_0}{\ln 2}\,\frac{v_0}{\ell}\left(\ln 2 - 1\right)$

$$= \frac{v_0^2}{\ell}\left(1-\frac{1}{\ln 2}\right) = -\frac{v_0^2}{\ell}\left(\frac{1}{\ln 2}-1\right)$$

c) $\ddot{x} = k\,t$

$$\dot{x} = v_0 + \frac{1}{2}k\,t^2$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{6}k\,t^3$$

istante di arresto : $\dot{x}(\tau)=0 \qquad v_0 + \frac{1}{2}k\tau^2 = 0 \qquad \tau = \sqrt{\frac{2v_0}{-k}}$

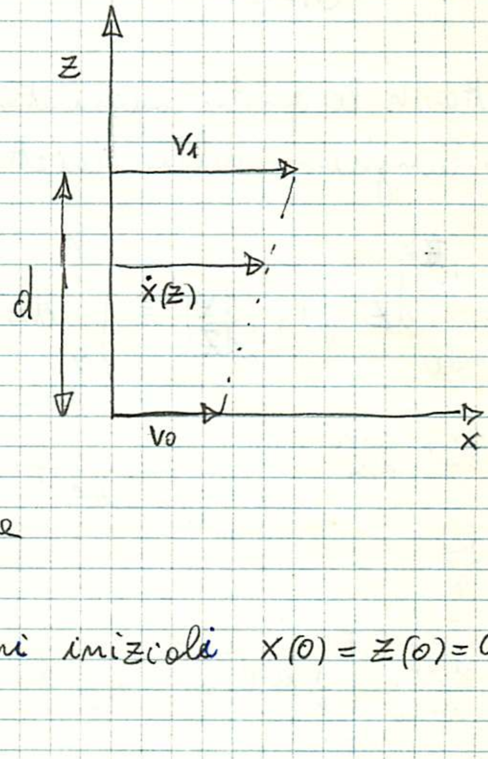
spazio percorso $= \ell = v_0\tau + \frac{1}{6}k\tau^3 = v_0\tau + \tau\left(\frac{1}{6}k\,\frac{2v_0}{-k}\right)$

$$= v_0\tau - \frac{v_0\tau}{3} = \frac{2}{3}v_0\tau = \sqrt{\frac{8}{9}\,\frac{v_0^3}{-k}}$$

$$k = -\frac{8}{9}\,\frac{v_0^3}{\ell^2}$$

accelerazione media $= a_m = -\frac{v_0}{\tau} = -v_0\sqrt{\frac{1}{2v_0}\,\frac{8v_0^3}{9\ell^2}} = -\frac{v_0^2}{\ell}\cdot\frac{2}{3}$

Un pallone aerostatico parte da terra e nel suo moto ascensionale incontra un vento laterale la cui velocità cresce linearmente con la quota. A livello di terra la velocità del vento è $v_0 = 18\ Km/h$ e ad una altezza $d = 100\ m$ è $v_1 = 36\ Km/h$. Supponendo che la velocità verticale del pallone sia $v_p = 9\ Km/h$ costante e quella orizzontale sia uguale alla velocità del vento, si determini la traiettoria del pallone, dopo quanto tempo esso si è spostato lateralmente di un tratto $l = 100\ m.$, la lunghezza della traiettoria nello stesso intervallo di tempo.



Detto z la quota del pallone la sua velocità orizzontale è

$$\dot{x} = \dot{x}(z) = v_0 + (v_1 - v_0)\frac{z}{d}$$

la velocità verticale è costante

$\dot{z} = v_p$. Si deve integrare il sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = v_0 + \dfrac{v_1 - v_0}{d} z \\ \dot{z} = v_p \end{cases}$$

con condizioni iniziali $x(0) = z(0) = 0$

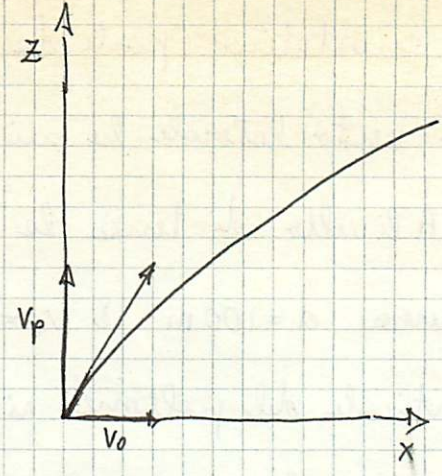
$$z(t) = v_p t$$

$$\dot{x} = v_0 + \frac{v_1 - v_0}{d} v_p t \qquad x(t) = v_0 t + \frac{(v_1 - v_0) v_p}{2d} t^2$$

eliminando il tempo:

$$x(z) = \frac{v_0}{v_p} z + \frac{(v_1 - v_0)}{2 d v_p} z^2$$

la traiettoria è un arco di parabola



l'istante a cui lo spostamento laterale vale l è dato da:

$$l = v_0 t + \frac{v_1 - v_0}{2d} v_p t^2 \qquad t^2 (v_1 - v_0) v_p + 2 d v_0 t - 2 d l = 0$$

$$t = \frac{-d v_0 + \sqrt{d^2 v_0^2 + 2 d l (v_1 - v_0) v_p}}{(v_1 - v_0) v_p} = 16.57 \text{ s}$$

Detta h la quota raggiunta a questo istante di tempo $h = z(t)$
la lunghezza della traiettoria è:

$$L = \int_0^h dz \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2} = \int_0^h dz \sqrt{1 + \left(\frac{v_0}{v_p} + \frac{v_1 - v_0}{d v_p} z\right)^2}$$

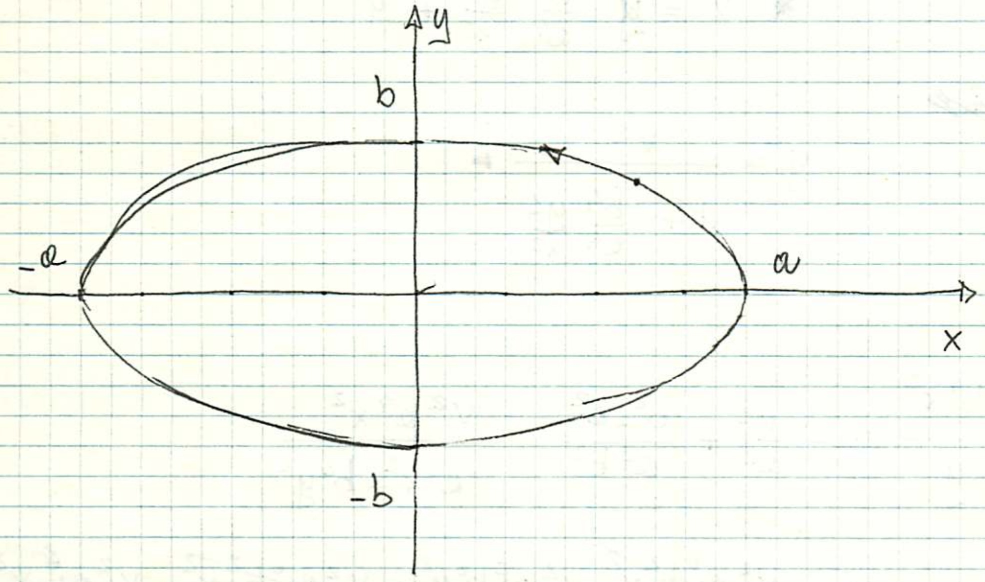
$$u = \frac{v_0}{v_p} + \frac{v_1 - v_0}{d v_p} z$$

$$= \int_{\frac{v_0}{v_p}}^{\frac{v_0}{v_p} + \frac{v_1 - v_0}{d v_p} h} du \sqrt{1 + u^2} \, \frac{d v_p}{v_1 - v_0}$$

$$= \frac{d v_p}{v_1 - v_0} \left[\frac{1}{2} u \sqrt{1 + u^2} + \frac{1}{2} \ln\left(u + \sqrt{1 + u^2}\right) \right]_{\frac{v_0}{v_p} = 2}^{\frac{v_0}{v_p} + \frac{v_1 - v_0}{d v_p} h = 4}$$

$$= 316.8 \text{ m}$$

Un automobile percorre una pista ellittica di semi-assi a e b con velocità costante in modulo V. Si calcolino le componenti x e y dell'accelerazione posseduta dall'automobile in un punto generico della pista. Si calcoli il valore dell'accelerazione nei punti $(\pm a, 0)$ e $(0, \pm b)$ se $a = 400$ m $b = 200$ m $V = 50$ m s^{-1}



L'equazione della traiettoria nel sistema xy centrato sull'ellisse è:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{inoltre} \qquad V^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \text{costante}$$

Derivando rispetto al tempo entrambe le relazioni

$$\begin{cases} \dfrac{x\dot{x}}{a^2} + \dfrac{y\dot{y}}{b^2} = 0 \\ \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = -\dot{y}\,\dfrac{b^2}{a^2}\,\dfrac{y}{x} \\ \ddot{x} = -\ddot{y}\,\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}} \end{cases}$$

da cui $\quad \ddot{x} = -\ddot{y}\,\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}} = \ddot{y}\,\dfrac{b^2}{a^2}\,\dfrac{x}{y}$

Derivando ancora una volta l'equazione della traiettoria:

$$0 = \frac{\dot{x}^2}{a^2} + \frac{x\ddot{x}}{a^2} + \frac{\dot{y}^2}{b^2} + \frac{y\ddot{y}}{b^2} = \frac{\dot{x}^2+\dot{y}^2}{a^2} + \dot{y}^2\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2}\right) + \ddot{y}\left(\frac{y}{b^2} + \frac{b^2}{a^4}\frac{x^2}{y}\right)$$

usando

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \qquad\qquad v^2 = \dot{y}^2 \frac{b^4}{a^4}\frac{y^2}{x^2} + \dot{y}^2$$

$$\dot{y}^2 = \frac{v^2}{1 + \frac{b^4}{a^4}\frac{y^2}{x^2}}$$

$$\ddot{y}\,\frac{a^4y^2 + b^4x^2}{a^4b^2y} = -\frac{v^2}{a^2} + \frac{b^2 - a^2}{a^2b^2}\,\frac{v^2a^4x^2}{a^4x^2 + b^4y^2}$$

$$= \frac{-\cancel{v^2a^6b^2x^2} - v^2a^2b^6y^2 + \cancel{v^2a^6b^2x^2} - v^2a^8x^2}{a^4b^2\left(a^4x^2 + b^4y^2\right)}$$

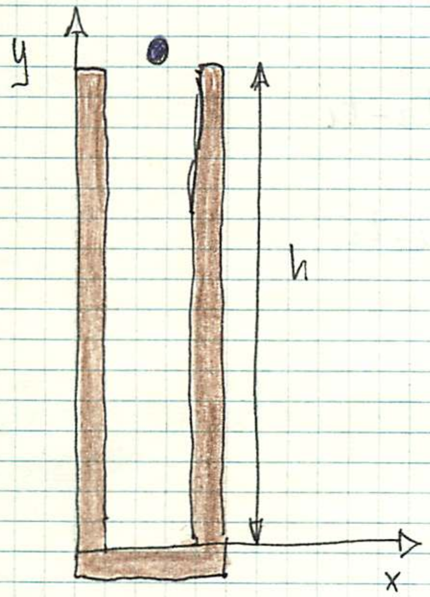
$$\ddot{y} = -\frac{y\,v^2a^2\left(a^6x^2 + b^6y^2\right)}{\left(a^4x^2 + b^4y^2\right)\left(a^4y^2 + b^4x^2\right)}$$

$$\ddot{x} = -\frac{x\,v^2b^2\left(a^6x^2 + b^6y^2\right)}{\left(a^4x^2 + b^4y^2\right)\left(a^4y^2 + b^4x^2\right)}$$

nei punti $(\pm a, 0)$ si ha $\begin{cases} \ddot{x} = \mp \dfrac{a v^2}{b^2} = \mp 25\ \mathrm{m\,s^{-2}} \sim 3g\ !!! \\ \ddot{y} = 0 \end{cases}$

nei punti $(0, \pm b)$ si ha $\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = \mp \dfrac{b v^2}{a^2} = \mp 3.125\ \mathrm{m\,s^{-2}} \end{cases}$

All'istante $t=0$ una pallina di gomma viene fatta cadere con velocità iniziale nulla all'interno di un pozzo di profondità h. Il fondo del pozzo è piano e l'urto della pallina è perfettamente elastico. Seb il suono del primo urto viene percepito alla superficie al tempo $t_1 = \frac{35}{17}$ s e quello del secondo al tempo $\frac{103}{17}$ s quanto valgono h e la velocità v_s del suono?



$\ddot{y} = -g \qquad \dot{y} = -gt \qquad y(t) = h - \frac{1}{2} g t^2$

l'istante del primo urto è $\quad t^* = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

quindi $\quad t_1 = t^* + \frac{h}{v_s} = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{v_s}$

all'istante t^* la pallina ha velocità $\quad \dot{y} = -g t^* = -\sqrt{2hg}$

poiché l'urto è elastico la pallina riparte verso l'alto con velocità $\dot{y} = \sqrt{2hg}$

$\ddot{y} = -g \qquad \dot{y} = \sqrt{2hg} - g(t-t^*) \qquad y(t) = \sqrt{2hg}\,(t-t^*) - \frac{1}{2} g (t-t^*)^2$

l'istante del secondo urto è dato da $y(t^{**}) = 0$

$t^{**} - t^* = 2\sqrt{\frac{2h}{g}} \qquad t^{**} = 3\sqrt{\frac{2h}{g}}$

quindi $\quad t_2 = t^{**} + \frac{h}{v_s} = 3\sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{v_s}$

$$\begin{cases} \frac{h}{v_s} + \sqrt{\frac{2h}{g}} = t_1 \\ \frac{h}{v_s} + 3\sqrt{\frac{2h}{g}} = t_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2\sqrt{\frac{2h}{g}} = t_2 - t_1 \\ 2\frac{h}{v_s} = 3t_1 - t_2 \end{cases}$$

$$h = \frac{g\,(t_2 - t_1)^2}{8} \simeq 20 \text{ m}$$

$$v_s = \frac{2h}{3t_1 - t_2} = \frac{40 \cdot 17}{2} = 340 \text{ ms}^{-1}$$