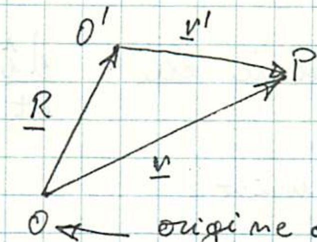
MOTI RELATIVI

1 x 2h

Moti relativi



origine di sistema inerziale

$$\underline{r}(t) = \underline{r}'(t) + \underline{R}(t)$$

$$\underline{v}(t) = \frac{d}{dt}\underline{r}(t) = \frac{d}{dt}\left(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}\right) = \dot{x}\hat{i} + \dot{y}\hat{j} + \dot{z}\hat{k} =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(x'\hat{i}' + y'\hat{j}' + z'\hat{k}'\right) + \frac{d}{dt}\left(X\hat{i} + Y\hat{j} + Z\hat{k}\right) =$$

$$= \dot{x}'\hat{i}' + \dot{y}'\hat{j}' + \dot{z}'\hat{k}' + x'\underline{\omega}\times\hat{i}' + y'\underline{\omega}\times\hat{j}' + z'\underline{\omega}\times\hat{k}' + \dot{X}\hat{i} + \dot{Y}\hat{j} + \dot{Z}\hat{k}$$

$$= \underline{v}' + \underline{\omega}\times\underline{r}' + \underline{V}$$

$$\underline{a}(t) = \frac{d}{dt}\underline{v}(t) = \ddot{x}'\hat{i}' + \ddot{y}'\hat{j}' + \ddot{z}'\hat{k}' + 2\dot{x}'\underline{\omega}\times\hat{i}' + 2\dot{y}'\underline{\omega}\times\hat{j}' + 2\dot{z}'\underline{\omega}\times\hat{k}'$$

$$+ x'\dot{\underline{\omega}}\times\hat{i}' + y'\dot{\underline{\omega}}\times\hat{j}' + z'\dot{\underline{\omega}}\times\hat{k}' +$$

$$+ x'\underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\hat{i}') + y'\underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\hat{j}') + z'\underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\hat{k}') + \ddot{X}\hat{i} + \ddot{Y}\hat{j} + \ddot{Z}\hat{k}$$

$$= \underline{a}' + 2\underline{\omega}\times\underline{v}' + \dot{\underline{\omega}}\times\underline{r}' + \underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{r}') + \underline{A}$$

$$\begin{cases} \underline{r}' = \underline{r} - \underline{R} \\ \underline{v}' = \underline{v} - \left(\underline{\omega}\times\underline{r}' + \underline{V}\right) \\ \underline{a}' = \underline{a} - \left(2\underline{\omega}\times\underline{v}' + \dot{\underline{\omega}}\times\underline{r}' + \underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{r}') + \underline{A}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\underline{a} = \underline{F} & \text{forze reali} \\ m\underline{a}' = \underline{F} - m\,2\underline{\omega}\times\underline{v}' - m\,\dot{\underline{\omega}}\times\underline{r}' - m\,\underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{r}') - m\underline{A} & \text{forze reali + fittizie} \end{cases}$$

forza di Coriolis

forza centrifuga

dimostrazione che $\frac{d\hat{i}'}{dt} = \underline{\omega} \times \hat{i}'$ $\quad \frac{d\hat{j}'}{dt} = \underline{\omega} \times \hat{j}'$ $\quad \frac{d\hat{k}'}{dt} = \underline{\omega} \times \hat{k}'$

con $\underline{\omega}$ unico

$$
\begin{cases}
\frac{d\hat{i}'}{dt} = a_{11}\,\hat{i}' + a_{12}\,\hat{j}' + a_{13}\,\hat{k}' \\
\frac{d\hat{j}'}{dt} = a_{21}\,\hat{i}' + a_{22}\,\hat{j}' + a_{23}\,\hat{k}' \\
\frac{d\hat{k}'}{dt} = a_{31}\,\hat{i}' + a_{32}\,\hat{j}' + a_{33}\,\hat{k}'
\end{cases}
$$

$$\hat{i}' \cdot \hat{i}' = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\hat{i}' \cdot \hat{i}'\right) = 2\,\hat{i}' \cdot \frac{d\hat{i}'}{dt} = a_{11} = 0$$

analogamente $\quad a_{22} = a_{33} = 0$

$$\hat{i}' \cdot \hat{j}' = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\hat{i}' \cdot \hat{j}'\right) = \frac{d\hat{i}'}{dt} \cdot \hat{j}' + \hat{i}' \cdot \frac{d\hat{j}'}{dt} = a_{12} + a_{21} = 0$$

analogamente $\quad a_{13} + a_{31} = 0 \qquad a_{23} + a_{32} = 0$

posto $\quad \underline{\omega} \equiv a_{23}\,\hat{i}' + a_{31}\,\hat{j}' + a_{12}\,\hat{k}' \quad$ segue

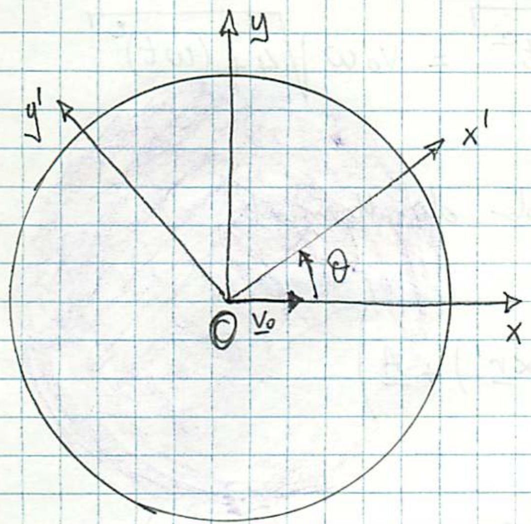
$$\frac{d\hat{i}'}{dt} = a_{12}\,\hat{j}' - a_{31}\,\hat{k}' = \underline{\omega} \times \hat{i}'$$

$$\frac{d\hat{j}'}{dt} = -a_{12}\,\hat{i}' + a_{23}\,\hat{k}' = \underline{\omega} \times \hat{j}'$$

$$\frac{d\hat{k}'}{dt} = a_{31}\,\hat{i}' - a_{23}\,\hat{j}' = \underline{\omega} \times \hat{k}'$$

Una piattaforma ruota con velocità angolare costante ω intorno ad un asse centrale verticale. All'istante $t=0$ una pallina viene lanciata orizzontalmente con velocità $\underline{v}_0$ dal centro della piattaforma ($\underline{v}_0$ è rispetto a terra). Si determini l'accelerazione della pallina in un generico istante rispetto alla piattaforma

---



Sia xy inerziale e $x'y'$ solidale alla piattaforma

$$\theta(t) = \omega t$$

sia $\underline{v}_0 = v_0 \hat{x}$

Nel sistema di riferimento assoluto si ha:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}(t) = v_0 \\ \dot{y}(t) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = 0 \end{cases}$$

il passaggio alle coordinate $x'y'$ si effettua mediante la trasformazione

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta = v_0 t \cos\omega t \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta = -v_0 t \sin\omega t \end{cases}$$

da cui

②

$$\begin{cases} \dot{x}' = v_0 \cos\omega t - v_0 \omega t \sin\omega t \\ \dot{y}' = -v_0 \sin\omega t - v_0 \omega t \cos\omega t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}' = -2v_0 \omega \sin\omega t - v_0 \omega^2 t \cos\omega t \\ \ddot{y}' = -2v_0 \omega \cos\omega t + v_0 \omega^2 t \sin\omega t \end{cases}$$

$$a' = \sqrt{\ddot{x}'^2 + \ddot{y}'^2} = \sqrt{4 v_0^2 \omega^2 + v_0^2 \omega^4 t^2} = v_0 \omega \sqrt{4 + (\omega t)^2}$$

allo stesso risultato si giunge usando direttamente

$$\underline{a}' = \underline{a} - \left(2\underline{\omega} \times \underline{v}' + \dot{\underline{\omega}} \times \underline{r}' + \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}') + \underline{A} \right)$$

$$\begin{cases} \ddot{x}' = 0 - \left(-2\omega \dot{y}' - \omega^2 x' \right) \\ \ddot{y}' = 0 - \left(2\omega \dot{x}' - \omega^2 y' \right) \end{cases}$$

avendo usato $\quad \underline{\omega} \times \underline{v}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega \\ \dot{x}' & \dot{y}' & 0 \end{pmatrix} = (-\omega \dot{y}', \quad \omega \dot{x}', \ 0)$

$$\dot{\underline{\omega}} = \underline{A} = 0 \qquad \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}') = -\omega^2 \underline{r}' + \cancel{(\underline{\omega} \cdot \underline{r}')} \underline{\omega}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}' = \omega^2 x' + 2\omega \dot{y}' \\ \ddot{y}' = \omega^2 y' - 2\omega \dot{x}' \end{cases}$$

posto $\eta = x' + iy'$ sommando la prima equazione alla seconda moltiplicata per i si ha

$$\ddot{x}' + i\ddot{y}' = \omega^2(x' + iy') - 2\omega i\,(i\dot{y}' + \dot{x}')$$

$$\ddot{\eta} + 2i\omega\dot{\eta} - \omega^2\eta = 0$$

$$q^2 + 2i\omega q - \omega^2 = 0 \qquad q = -i\omega \pm \sqrt{-\omega^2 + \omega^2} = -i\omega$$

$$\eta(t) = e^{-i\omega t}(A + Bt)$$

$$\begin{cases} \eta(0) = x'(0) + iy'(0) = A = 0 \\ \dot{\eta}(0) = \dot{x}'(0) + i\dot{y}'(0) = -i\omega A + B = v_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 0 \\ B = v_0 \end{cases}$$

$$\eta(t) = e^{-i\omega t}\, v_0 t = x'(t) + iy'(t)$$

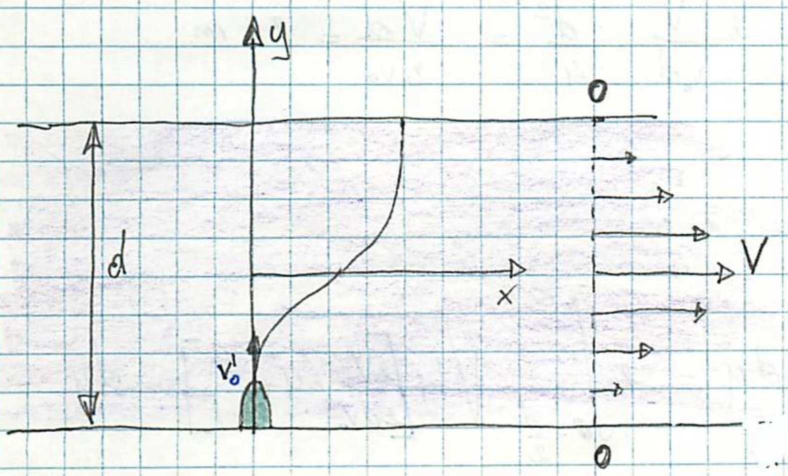
$$\begin{cases} x'(t) = \mathrm{Re}\{\eta(t)\} = v_0 t \cos\omega t \\ y'(t) = \mathrm{Im}\{\eta(t)\} = -v_0 t \sin\omega t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}'(t) = v_0\cos\omega t - v_0\omega t\sin\omega t \\ \dot{y}'(t) = -v_0\sin\omega t - v_0\omega t\cos\omega t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}'(t) = -v_0\omega\sin\omega t - v_0\omega\sin\omega t - v_0\omega^2 t\cos\omega t \\ \ddot{y}'(t) = -v_0\omega\cos\omega t - v_0\omega\cos\omega t + v_0\omega^2 t\sin\omega t \end{cases}$$

$$a' = \sqrt{\ddot{x}'(t)^2 + \ddot{y}'(t)^2} = \sqrt{4v_0^2\omega^2 + v_0^2\omega^4 t^2}$$

Una barca parte da una riva di un fiume largo $d = 100\,m$ e lo attraversa mantenendosi in direzione perpendicolare alla corrente con velocità costante $v_0 = 4\,Km/h$. La velocità della corrente è proporzionale alla distanza dalla riva più prossima: è nulla alle rive e vale $V = 2\,Km/h$ al centro. Si calcoli lo spostamento Δx in direzione della corrente subito dalla barca nel raggiungere l'altra sponda e lo spazio Δs percorso dalla barca rispetto ad un osservatore solidale alla riva.



Nel sistema assoluto xy solidale alla riva la velocità della corrente è:

$$V(y) = V\left(\frac{d}{2} - |y|\right)\frac{2}{d}$$

e la velocità della barca è: $\underline{v} = \underline{v}' + \underline{V}$

$$\begin{cases} \dot{x} = V(y) = V\left(1 - \dfrac{2|y|}{d}\right) \\ \dot{y} = v_0 \end{cases}$$

da cui

$$y(t) = -\frac{d}{2} + v_0 t$$

$$x(t) = V t - V\frac{2}{d}\int_0^t \left|v_0 t' - \frac{d}{2}\right| dt'$$

nella prima metà del guado $\left(y<0, \text{ i.e. } t<\frac{d}{2v_0}\right)$

$$y(t) = -\frac{d}{2} + v_0 t \qquad x(t) = \cancel{Vt} - \cancel{Vt} + \frac{V v_0}{d} t^2$$

cioè una traiettoria di equazione

$$x(y) = \frac{V v_0}{d} \left(\frac{y + d/2}{v_0}\right)^2 = \frac{V}{d v_0}\left(y + \frac{d}{2}\right)^2 \qquad -\frac{d}{2} \leq y \leq 0$$

Poiché il guado è simmetrico rispetto all'asse x si ha

$$\Delta x = 2\left[x(0) - x\left(-\frac{d}{2}\right)\right] = 2\frac{V}{v_0 d}\frac{d^2}{4} = \frac{Vd}{2v_0} = 25\,m$$

la lunghezza della traiettoria è:

$$\Delta s = \int ds = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy = 2\int_{-\frac{d}{2}}^{0} \sqrt{1 + \left[\frac{2V}{d v_0}\left(y + \frac{d}{2}\right)\right]^2}\, dy$$

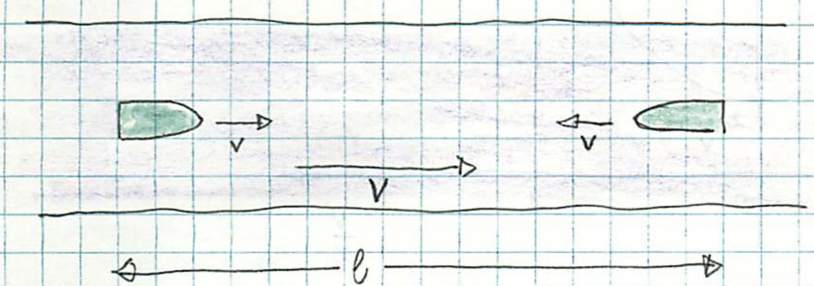
$$= 2\int_0^{\frac{V}{v_0}} \sqrt{1 + z^2}\, dz \frac{d v_0}{2V} = \qquad \left(y + \frac{d}{2}\right)\frac{2V}{d v_0} = z$$

$$= \frac{d v_0}{V}\left[\frac{1}{2} z\sqrt{1+z^2} + \frac{1}{2}\ln\left(z + \sqrt{1+z^2}\right)\right]_0^{\frac{V}{v_0}} =$$

$$= \frac{d v_0}{V}\left[\frac{1}{2}\frac{V}{v_0}\sqrt{1 + \frac{V^2}{v_0^2}} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{V}{v_0} + \sqrt{1 + \frac{V^2}{v_0^2}}\right)\right] =$$

$$= \frac{d}{2}\sqrt{1 + \frac{V^2}{v_0^2}} + \frac{d v_0}{2V}\ln\left(\frac{V}{v_0} + \sqrt{1 + \frac{V^2}{v_0^2}}\right) = 104\,m.$$

Una barca percorre a velocità costante un tratto di fiume lungo $l = 12$ Km prima a favore della corrente e poi contro corrente. Si calcolino la velocità V della corrente e quella v della barca sapendo che i tempi impiegati all'andata e al ritorno sono $t_1 = 600\,s$ e $t_2 = 1200\,s$. Si mostri che il cammino di andata e ritorno è minimo quando $V=0$



Nel sistema di riferimento assoluto solidale alle rive la velocità della barca è $\dot{x} = \dot{x}' + V$

$V + v$ all'andata $\qquad$ $v - V$ al ritorno

(si deve supporre $v > V$ altrimenti la barca non torna)

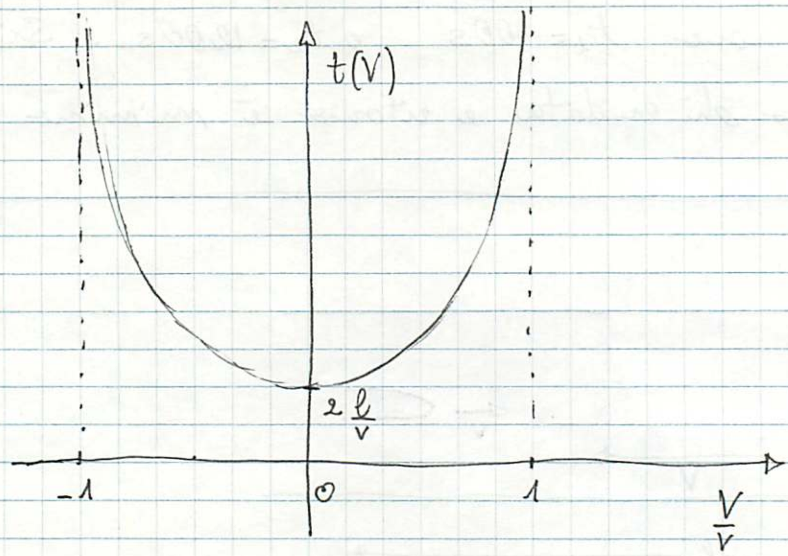
$$\begin{cases} t_1 = \dfrac{l}{v+V} \\ t_2 = \dfrac{l}{v-V} \end{cases} \qquad \begin{cases} t_1 v + t_1 V = l \\ t_2 v - t_2 V = l \end{cases} \qquad \begin{cases} t_1 t_2 v + t_1 t_2 V = l t_2 \\ t_1 t_2 v - t_1 t_2 V = l t_1 \end{cases}$$

$$v = \frac{l t_2 + l t_1}{2 t_1 t_2} = \frac{l}{2} \frac{t_1 + t_2}{t_1 t_2} = 1.5\ m s^{-1}$$

$$V = \frac{l t_2 - l t_1}{2 t_1 t_2} = \frac{l}{2} \frac{t_2 - t_1}{t_1 t_2} = 0.5\ m s^{-1}$$

il tempo complessivo impiegato ad andare e tornare

è $t = \dfrac{l}{v+V} + \dfrac{l}{v-V} = \dfrac{2vl}{v^2-V^2} = \dfrac{2\,l/v}{1-\left(\frac{V}{v}\right)^2}$

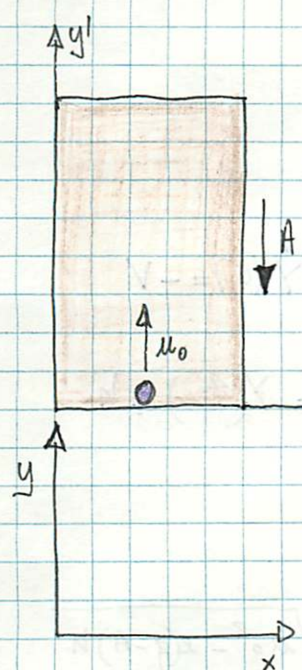


t (e quindi lo spazio percorso nel sistema solidale all'acqua $l'=vt$) risulta minimo per $V=0$

$t \to \infty$ per $V \to \pm v$

$$l' = vt = \frac{2l}{1-\left(\frac{V}{v}\right)^2}$$

Un ascensore di altezza $h = 2.25\ m$ scende con accelerazione costante $A = 2\ m s^{-2}$. Una pallina viene lanciata dal pavimento verso l'alto con velocità rispetto all'ascensore $u_0 = 15\ m s^{-1}$. La pallina urta il soffitto elasticamente e riscende. Si calcoli il tempo impiegato Δt dalla pallina per ritornare al pavimento.



Studiamo dapprima il moto nel sistema relativo all'ascensore; tale sistema è non inerziale:

$$\ddot{y}' = -g-(-A) = -g+A$$

durante la fase di salita $0 \le t \le t_1$ si ha

$$\dot{y}'(t) = u_0-(g-A)\,t$$

$$y'(t) = u_0 t - \frac{1}{2}(g-A)\,t^2$$

$$h = u_0 t_1 - \frac{1}{2}(g-A)\,t_1^2$$

$$(g-A)\,t_1^2 - 2u_0 t_1 + 2h = 0 \qquad t_1 = \frac{u_0-\sqrt{u_0^2-2(g-A)h}}{g-A} = 0.156\ s$$

(la soluzione con il + va scartata); poiché l'urto è elastico

$$\dot{y}'(t_1^+) = -\dot{y}'(t_1^-) = (g-A)\,t_1 - u_0 \qquad \text{inoltre } y'(t_1) = h$$

integrando $\ddot{y}' = -g+A$ $\qquad y'(t) = h + [(g-A)\,t_1 - u_0](t-t_1) - \frac{1}{2}(g-A)(t-t_1)^2$

imponendo $y'(t_2) = 0$ si ha $-\frac{1}{2}(g-A)(t_2-t_1)^2 - [u_0-(g-A)\,t_1](t_2-t_1) + h = 0$

e quindi $t_2 = t_1 + \dfrac{u_0-(g-A)t_1+\sqrt{[u_0-(g-A)t_1]^2+2h(g-A)}}{g-A} = 0.156+3.690 = 3.846\ s$

Nel sistema di riferimento assoluto, detta V la velocità dell'ascensore al tempo di lancio della pallina ed H la sua quota, il moto della pallina è dato da:

$$\ddot{y} = -g \qquad \dot{y}(0) = u_0 - V \qquad y(0) = H$$

$$\dot{y} = -gt + (u_0 - V)$$

$$y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + (u_0 - V)t + H$$

l'ascensore si muove con legge

$$Y(t) = H - Vt - \frac{1}{2} A t^2 \qquad Y(0) = H \qquad \dot{Y}(0) = -V$$

l'istante d'urto t_1 è dato da $y(t_1) = Y(t_1) + h$

$$\cancel{H} + h - \cancel{V} t_1 - \frac{1}{2} A t_1^2 = \cancel{H} + (u_0 - \cancel{V}) t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2$$

$$(g-A) t_1^2 - 2 u_0 t_1 + 2h = 0 \qquad t_1 = \frac{u_0 - \sqrt{u_0^2 - 2(g-A)h}}{g-A}$$

Poiché l'urto è elastico $\dot{y}(t_1^+) - \dot{Y} = -(\dot{y}(t_1^-) - \dot{Y})$ $\qquad \dot{y}(t_1^+) = (g-2A)t_1 - u_0 - V$

$y(t_1) = Y(t_1) + h = H + h - Vt_1 - \frac{1}{2} A t_1^2$ $\qquad$ integrando $\ddot{y} = -g$

$$y(t) = H + h - Vt_1 - \frac{1}{2} A t_1^2 + \left(g t_1 \overset{-2At_1}{} - u_0 - V\right)(t - t_1) - \frac{1}{2} g (t - t_1)^2$$

l'istante t_2 è dato da $y(t_2) = Y(t_2)$

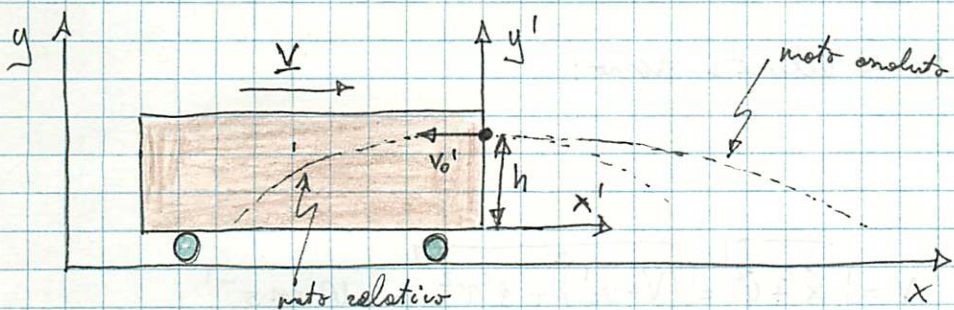
$$\cancel{H} + h - \cancel{V} t_1 - \frac{1}{2} A t_1^2 + \left(g t_1 \overset{-2At_1}{} - u_0 - \cancel{V}\right)(t_2 - t_1) - \frac{1}{2} g (t_2 - t_1)^2 = \cancel{H} - \cancel{V t_2} - \frac{1}{2} A t_2^2$$

$$-\frac{1}{2}(g-A)(t_2 - t_1)^2 - \left[u_0 - (g-A)t_1\right](t_2 - t_1) + h = 0$$

quindi $t_2 = \dfrac{u_0 - (g-A)t_1 + \sqrt{\left[u_0 - (g-A)t_1\right]^2 + 2h(g-A)}}{g-A}$

$$+ \frac{u_0 - \sqrt{u_0^2 - 2(g-A)h}}{g-A} = 3.846 \text{ s}$$

Un carro si muove su un piano orizzontale di moto rettilineo uniforme con velocità $V = 50.4\ Km\,h^{-1}$. All'interno del carro ed altezza $h = 1.8\ m$ dal pavimento, una pallina viene lanciata orizzontalm. in verso opposto a quello di moto del carro e ~~velocità~~ di modulo $v_0' = 6 ms^{-1}$. Si calcoli la velocità v_0 della pallina rispetto a terra al momento del lancio; il tempo τ impiegato per arrivare sul pavimento e la gittata assoluta d e relativa d'; i moduli delle velocità assoluta e relativa all'istante di urto sul pavimento e gli angoli che tali velocità formano con l'orizzontale. Si usi $g = 10\ ms^{-2}$



si ha $\underline{v}_0 = \underline{v}_0' + \underline{V}$ cioè, avendo scelto gli assi come in figura,

$$\begin{cases} \dot{x}(0) = -v_0' + V = 8\ ms^{-1} \\ \dot{y}(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}'(0) = -v_0' \\ \dot{y}'(0) = 0 \end{cases}$$

$(V = 14\ ms^{-1})$

Nel sistema relativo il moto è:

$$\begin{cases} \ddot{x}' = 0 \\ \ddot{y}' = -g \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}'(t) = -v_0' \\ \dot{y}'(t) = -gt \end{cases} \qquad \begin{cases} x'(t) = -v_0' t \\ y'(t) = h - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

il tempo di caduta è $\tau = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ e la gittata $d' = -v_0' \tau$

$\tau = 0.6\ s$ $\qquad d' = -3.6\ m$

nel sistema assoluto

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}(t) = V - v_0' \\ \dot{y}(t) = -gt \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) = (V - v_0')\,t \\ y(t) = h + h_0 - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

il tempo di caduta è ancora dato da $h_0 = h + h_0 - \frac{1}{2} g t^2$

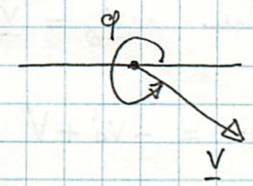
$\tau = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$ e la gittata è $d = (V - v_0')\,\tau = 4.8\ m$

(si noti che $d - d' = V\tau$ = spazio percorso dal carro)

all'istante di caduta le velocità sono:

$$\begin{cases} \dot{x}(\tau) = V - v_0' \\ \dot{y}(\tau) = -g\tau \end{cases} \qquad v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{(V - v_0')^2 + g^2\tau^2} = 10\ m s^{-1}$$

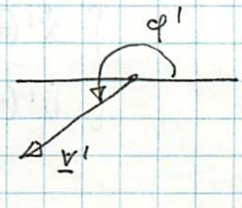
$$\tan\varphi = \frac{\dot{y}(\tau)}{\dot{x}(\tau)} = -\frac{3}{4}$$



$$\varphi \simeq 323°$$

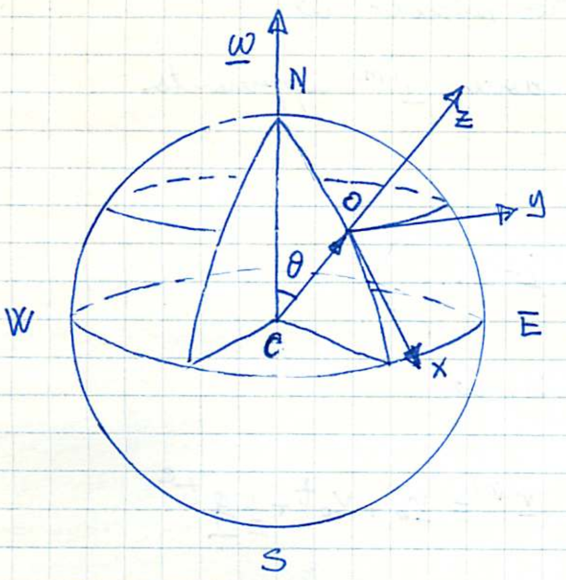
$$\begin{cases} \dot{x}'(\tau) = -v_0' \\ \dot{y}'(\tau) = -g\tau \end{cases} \qquad v' = \sqrt{\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2} = \sqrt{v_0'^2 + g^2\tau^2} = 6\sqrt{2}\ ms^{-1}$$

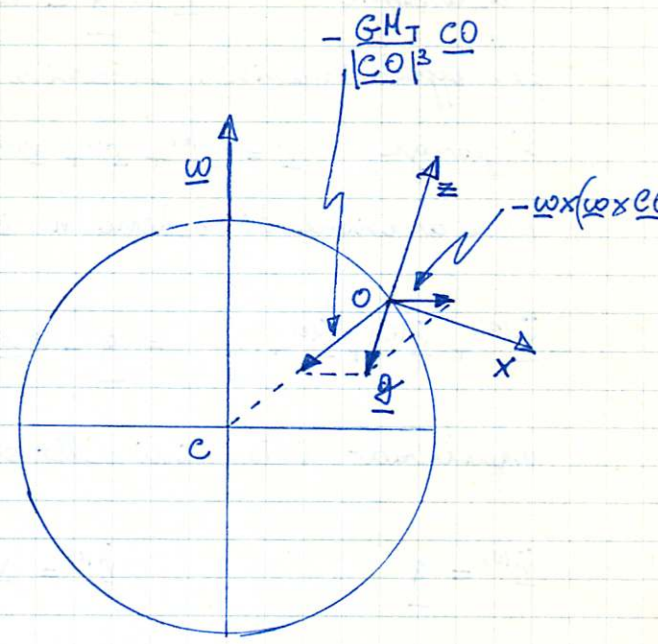
$$\tan\varphi' = \frac{\dot{y}'(\tau)}{\dot{x}'(\tau)} = 1$$



$$\varphi' = 225°$$

Caduta di un grave





Nel sistema di riferimento non inerziale xyz si consideri la caduta di un grave dalla posizione $\underline{r}(0)=\underline{r}_0$ con velocità $\dot{\underline{r}}(0)=\underline{v}_0$
L'asse z sia quello determinato dal filo a piombo.

$$\ddot{\underline{r}} = \frac{1}{m}\underline{F}_{grav.} - 2\underline{\omega}\times\dot{\underline{r}} - \underline{\omega}\times\underline{\omega}\times\underline{r} - \frac{d^2}{dt^2}\underline{CO} \quad \cancel{-\dot{\underline{\omega}}\times\underline{r}}$$

$$= -\frac{GM_T}{|\underline{CO}+\underline{r}|^3}\left(\underline{CO}+\underline{r}\right) - 2\underline{\omega}\times\dot{\underline{r}} - \underline{\omega}\times\underline{\omega}\times\underline{r} - \underline{\omega}\times\left(\underline{\omega}\times\underline{CO}\right)$$

$$\simeq -\frac{GM_T}{|\underline{CO}|^3}\underline{CO} - \underline{\omega}\times\left(\underline{\omega}\times\underline{CO}\right) - 2\underline{\omega}\times\dot{\underline{r}}$$

$$= \underline{g} - 2\underline{\omega}\times\dot{\underline{r}}$$

avendo usato $|\underline{r}| \ll |\underline{CO}| \simeq 6400$ Km e $\underline{g} \equiv -\frac{GM_T}{|\underline{CO}|^3}\underline{CO} - \underline{\omega}\times\left(\underline{\omega}\times\underline{CO}\right)$

si noti che l'angolo formato dalla perpendicolare z (direzione di $\underline{g}$) con l'asse di rotazione terrestre è approssimabile con l'angolo θ formato da $\underline{CO}$ con il medesimo asse (latitudine) in quanto
$|\underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{CO})| = \omega^2|\underline{CO}|\sin\theta \leq 0.035 \text{ ms}^{-2} \ll g$
quindi $\underline{\omega} \simeq (-\omega\sin\theta, 0, \omega\cos\theta)$ nel sistema xyz e $\underline{g} = (0,0,-g)$

l'equazione $\ddot{\underline{r}} = \underline{g} - 2\underline{\omega}\times\dot{\underline{r}}$ può essere risolta per approssimazioni successive nel parametro piccolo ω

Si ponga $\underline{r} = \underline{r}^{(0)} + \underline{r}^{(1)} + \underline{r}^{(2)} + \dots$ dove $\underline{r}^{(n)}$ rappresenta una correzione di ordine n in ω

$$\ddot{\underline{r}}^{(0)} + \ddot{\underline{r}}^{(1)} + \ddot{\underline{r}}^{(2)} + \dots = \underline{g} - 2\underline{\omega}\times\left(\dot{\underline{r}}^{(0)} + \dot{\underline{r}}^{(1)} + \dot{\underline{r}}^{(2)} + \dots\right)$$

uguagliando i termini dello stesso ordine in ω

$$\ddot{\underline{r}}^{(0)} = \underline{g} \qquad \dot{\underline{r}}^{(0)} = \underline{v}_0 + \underline{g}t \qquad \underline{r}^{(0)} = \underline{r}_0 + \underline{v}_0 t + \frac{1}{2}\underline{g}t^2$$

$$\ddot{\underline{r}}^{(1)} = -2\underline{\omega}\times\dot{\underline{r}}^{(0)} = -2\underline{\omega}\times\underline{v}_0 - 2\underline{\omega}\times\underline{g}\,t \qquad \dot{\underline{r}}^{(1)} = -2t\,\underline{\omega}\times\underline{v}_0 - t^2\,\underline{\omega}\times\underline{g}$$

$$\underline{r}^{(1)} = -t^2\,\underline{\omega}\times\underline{v}_0 - \frac{1}{3}t^3\,\underline{\omega}\times\underline{g}$$

$$\ddot{\underline{r}}^{(2)} = -2\underline{\omega}\times\dot{\underline{r}}^{(1)} = 4t\,\underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{v}_0) + 2t^2\,\underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{g})$$

$$\underline{r}^{(2)} = \frac{2}{3}t^3\,\underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{v}_0) + \frac{1}{6}t^4\,\underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{g})$$

$$\underline{r}(t) = \underline{r}_0 + \underline{v}_0 t + \frac{1}{2}\underline{g}\,t^2 - t^2\,\underline{\omega}\times\underline{v}_0 - \frac{1}{3}t^3\,\underline{\omega}\times\underline{g} + \frac{2}{3}t^3\,\underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{v}_0) + \frac{1}{6}t^4\,\underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{g})$$

Nel caso particolare $\underline{r}_0 = (0,0,h)$ $\underline{v}_0 = (0,0,0)$ si ha:

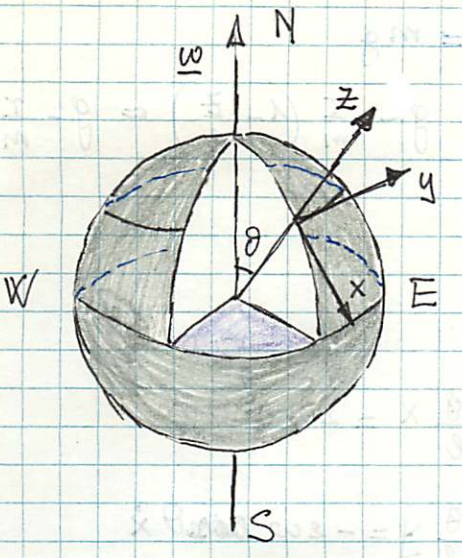
$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{6}\omega^2 g \sin\theta\cos\theta\, t^4 \\ y(t) = \frac{1}{3}\omega g\sin\theta\, t^3 \\ z(t) = h - \frac{1}{2}g t^2 + \frac{1}{6}\omega^2 g\sin^2\theta\, t^4 \end{cases}$$

deviazione verso Est e verso l'equatore

$$\underline{\omega}\times\underline{g} = (0, -\omega g\sin\theta, 0) \qquad \underline{\omega}\times(\underline{\omega}\times\underline{g}) = (\omega^2 g\sin\theta\cos\theta, 0, \omega^2 g\sin^2\theta)$$

all'equatore $\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$ e per $h = 200$ m $\quad \Delta y = \frac{1}{2}\omega g\left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2} \simeq 6.2$ cm

Pendolo di Foucault (1851)

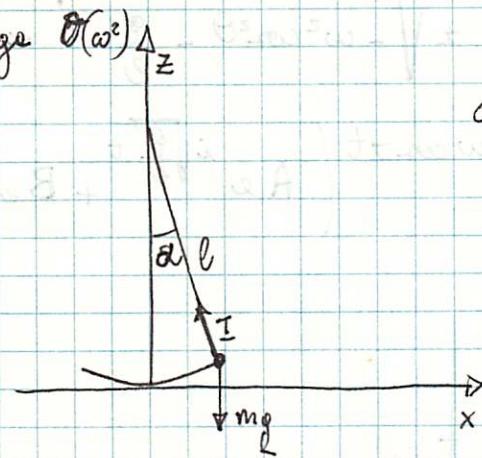


$$\underline{\omega} \times \underline{\dot{r}} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -\omega\sin\theta & 0 & \omega\cos\theta \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(-\omega\cos\theta\,\dot{y}\ ,\ \omega\cos\theta\,\dot{x} + \omega\sin\theta\,\dot{z}\ ,\ -\omega\sin\theta\,\dot{y} \right)$$

Si considerι un pendolo di lunghezza l con posizione di riposo lungo l'asse z della figura.
Se il sistema di riferimento fosse inerziale il pendolo oscillerebbe con frequenza $\sqrt{\frac{g}{l}}$ in un piano fisso contenente z; la forza di Coriolis provoca una rotazione di tale piano.

Trascurando la forza centrifuga $O(\omega^2)$



$$\cos\alpha = \frac{l-z}{l} = 1 - \frac{z}{l}$$

$$\sin\alpha = \frac{x}{l}$$

$$m\underline{\ddot{r}} = m\underline{g} + \underline{\tau} - m\,2\,\underline{\omega} \times \underline{\dot{r}}$$

$$\begin{cases} \ddot{z} = g - \dfrac{\tau}{m}\left(1 - \dfrac{z}{l}\right) + 2\omega\sin\theta\,\dot{y} \\ \ddot{x} = -\dfrac{\tau}{m}\dfrac{x}{l} + 2\omega\cos\theta\,\dot{y} \\ \ddot{y} = -\dfrac{\tau}{m}\dfrac{y}{l} - 2\omega\cos\theta\,\dot{x} - 2\omega\sin\theta\,\dot{z} \end{cases}$$

per angolo α sufficentemente piccolo: $\tau \simeq mg$

inoltre si può porre $\dot{z} \simeq 0$

$$\begin{cases} \ddot{x} + \frac{\tau}{m}\frac{x}{l} = 2\omega\cos\theta\,\dot{y} \\ \ddot{y} + \frac{\tau}{m}\frac{y}{l} \simeq -2\omega\cos\theta\,\dot{x} \end{cases} \qquad \begin{cases} \ddot{x} + \frac{g}{l}x = 2\omega\cos\theta\,\dot{y} \\ \ddot{y} + \frac{g}{l}y = -2\omega\cos\theta\,\dot{x} \end{cases}$$

posto $\eta = x + iy$ sommando la prima equazione alla seconda moltiplicata per i si ha:

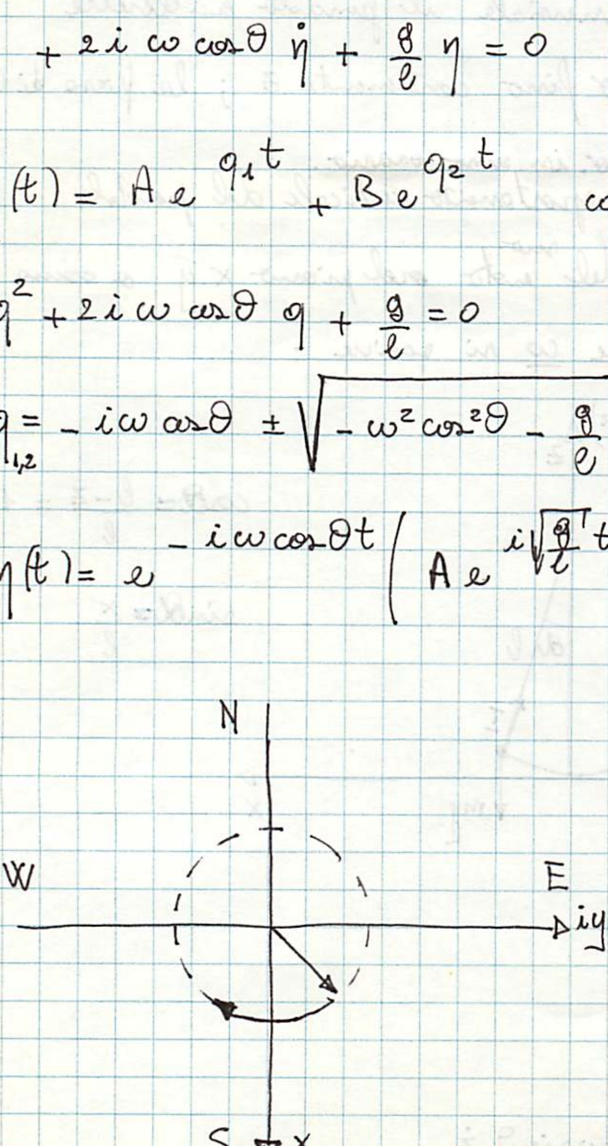
$$\ddot{\eta} + 2i\omega\cos\theta\,\dot{\eta} + \frac{g}{l}\eta = 0$$

$\eta(t) = Ae^{q_1 t} + Be^{q_2 t}$ con $q_{1,2}$ soluzioni di

$$q^2 + 2i\omega\cos\theta\, q + \frac{g}{l} = 0$$

$$q_{1,2} = -i\omega\cos\theta \pm \sqrt{-\omega^2\cos^2\theta - \frac{g}{l}} \simeq -i\omega\cos\theta \pm i\sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\eta(t) = e^{-i\omega\cos\theta t}\left(Ae^{i\sqrt{\frac{g}{l}}t} + Be^{-i\sqrt{\frac{g}{l}}t}\right)$$



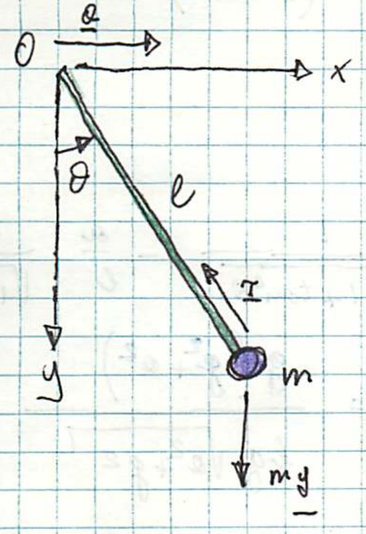
$$\eta(t) = e^{-i\omega\cos\theta t}\,\eta_0(t)$$

η ruota in senso orario (antiorario) guardando dalla direzione di z positivo nell'emisfero nord (sud) con periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega|\cos\theta|} = \frac{24\,h}{|\cos\theta|}$$

$T = 24\,h$ ai poli $\quad T = \infty$ all'equatore

Un'asta di massa trascurabile e lunghezza l è incernierata ad un estremo e può oscillare senza attrito in un piano verticale. All'altro estremo è fissata una massa m. Il sistema che offre il vincolo è sottoposto ad una accelerazione $\underline{a}$ parallela al piano di oscillazione del pendolo. Trovare il periodo delle piccole oscillazioni di questo pendolo.



Usando coordinate polari $r\theta$ di centro O

$r = l = \text{costante}$

$$\begin{cases} m a_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -ml\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - \tau - a\sin\theta\, m \\ m a_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = ml\ddot{\theta} = -mg\sin\theta - a\cos\theta\, m \end{cases}$$

essendo τ la tensione lungo l'asta:

$$\tau = m(g\cos\theta - a\sin\theta) + ml\dot{\theta}^2$$

L'equazione del moto di m è:

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta + \frac{a}{l}\cos\theta = 0$$

La posizione di equilibrio ($\ddot{\theta} = 0$) è data da:

$$\frac{g}{l}\sin\theta_0 + \frac{a}{l}\cos\theta_0 = 0 \qquad \tan\theta_0 = -\frac{a}{g}$$

sviluppando l'equazione del moto intorno a θ_0:

$$\ddot{\theta} + \cancel{\frac{g}{l}\sin\theta_0} + \frac{g}{l}\cos\theta_0(\theta-\theta_0) + \cancel{\frac{a}{l}\cos\theta_0} - \frac{a}{l}\sin\theta_0(\theta-\theta_0) + \ldots = 0$$

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{l}\cos\theta_0 - \frac{a}{l}\sin\theta_0\right)(\theta-\theta_0) = 0 + O((\theta-\theta_0)^2) \qquad **$$

Posto $\varphi = \theta - \theta_0$

e $$\omega^2 = \frac{g}{l}\cos\theta_0 - \frac{a}{l}\sin\theta_0 = \frac{g}{l}\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta_0}} - \frac{a}{l}\frac{\tan\theta_0}{\sqrt{1+\tan^2\theta_0}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{g^2}}}\left[\frac{g}{l} + \frac{a}{l}\frac{a}{g}\right] = \frac{g(g^2+a^2)}{lg\sqrt{a^2+g^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{a^2+g^2}}{l} \quad \left(> \frac{g}{l}\right)$$

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0$$

il periodo delle piccole oscillazioni è:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{a^2+g^2}}}$$

** Equazione di oscillatore armonico (oscillatore lineare)

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0 \qquad \text{(non forzato)}$$

forza $\propto q$ energia potenziale $\propto q^2$