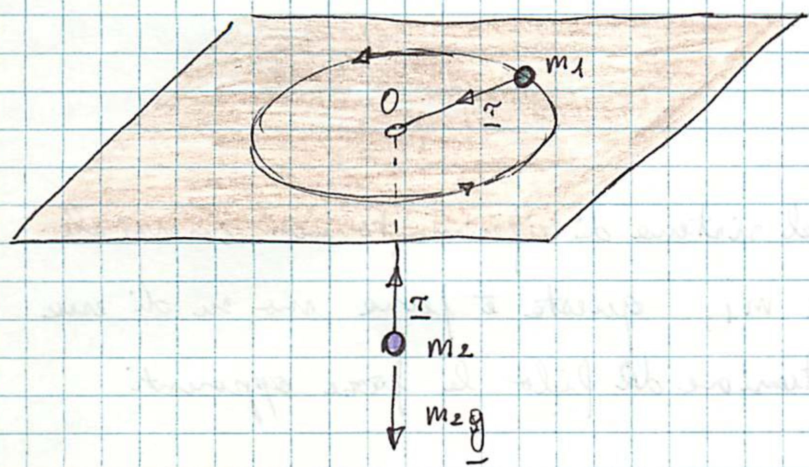
STATICA DEL PUNTO MATERIALE

1x2h

Una massa m_1 poggia su un piano privo di attrito ed è collegata con un filo inestensibile e di massa trascurabile ad una seconda massa m_2 pendente da un buco del piano. Il filo è lungo l.
Quanto pende m_2 dal piano se m_1 ruota con velocità angolare ω costante attorno al buco

---



Si supponga che la massa m_2 sia in equilibrio, allora

$$m_2 \underline{a}_2 = 0 = \underline{T} + m_2 \underline{g} \qquad \text{cioè} \quad |\underline{T}| = m_2 g$$

la tensione del filo, essendo questo ideale, è uguale in ogni punto e quindi $|\underline{T}|$ è anche la forza che agisce su m_1

In un sistema di riferimento inerziale l'unica forza che agisce su m_1 è la tensione del filo

$$m_1 \underline{a}_1 = \underline{T}$$

usando coordinate polari $r\theta$ con polo nel buco O

$$m_1 (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -|\underline{T}|$$
$$m_1 (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0$$

Poichè m_2 è fissa $\dot{r} = 0$ inoltre $\dot{\theta} = \omega$ $\ddot{\theta} = 0$

$$-m_1 r \omega^2 = -m_2 g \quad \text{cioè} \quad r = \frac{m_2 g}{m_1 \omega^2}$$

La massa m_2 pende dal piano di una quantità

$$h = l - r = l - \frac{m_2 g}{m_1 \omega^2}$$

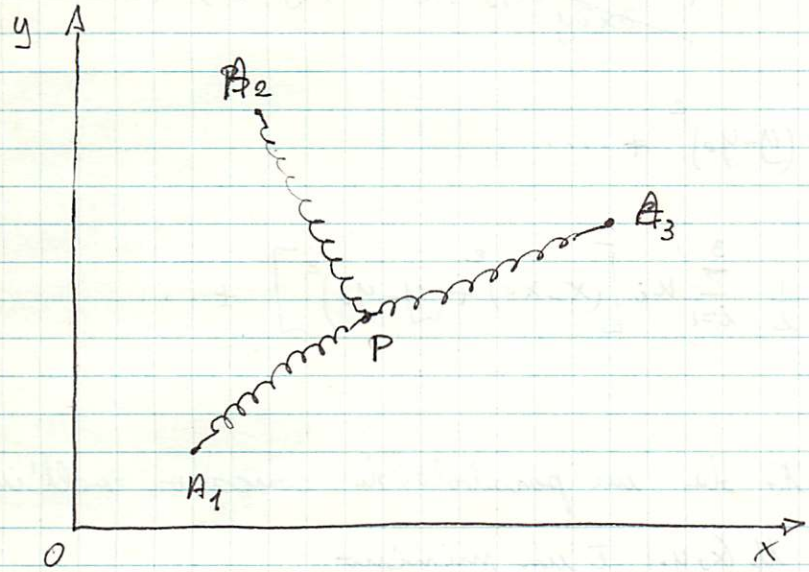
Alternativamente nel sistema di riferimento non inerziale solidale alla massa m_1 questa è ferma ma su di essa agiscono oltre alla tensione del filo le forze apparenti (forze centrifuga):

$$0 = \underline{\tau} + m_1 \omega^2 \underline{r}' = \underline{\tau} - m_1 \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}')$$

che proiettata nella direzione radiale da:

$$0 = -m_2 g + m_1 \omega^2 r$$

Un punto materiale P è collegato mediante 3 molle di costanti elastiche k_1 k_2 k_3 e lunghezza di riposo trascurabile a tre punti A_1 A_2 e A_3 giacenti su un piano orizzontale. Trovare le posizioni di equilibrio di P e discuterne la stabilità.



Dette $x_1 y_1$ $x_2 y_2$ $x_3 y_3$ $x\, y$ le coordinate di A_1 A_2 A_3 e P nel sistema Oxy, l'energia potenziale si scrive:

$$\mathcal{U}(x,y) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} k_i \left[(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 \right]$$

La condizione di equilibrio è $F_x = F_y = 0$ cioè $\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y} = 0$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} k_i (x - x_i) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \mathcal{U}}{\partial y} = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} k_i (y - y_i) = 0 \end{cases}$$

$$x_0 = \frac{\sum_{i=1}^{3} k_i x_i}{\sum_{i=1}^{3} k_i} \qquad y_0 = \frac{\sum_{i=1}^{3} k_i y_i}{\sum_{i=1}^{3} k_i}$$

$x_0 y_0$ è una posizione di equilibrio stabile

infatti:

$$\mathcal{U}(x,y) = \mathcal{U}(x_0,y_0) + \cancel{\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}(x_0 y_0)}\,(x-x_0) + \cancel{\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y}(x_0 y_0)}\,(y-y_0) +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial x^2}(x_0 y_0)(x-x_0)^2 + \cancel{\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)}(x-x_0)(y-y_0) +$$

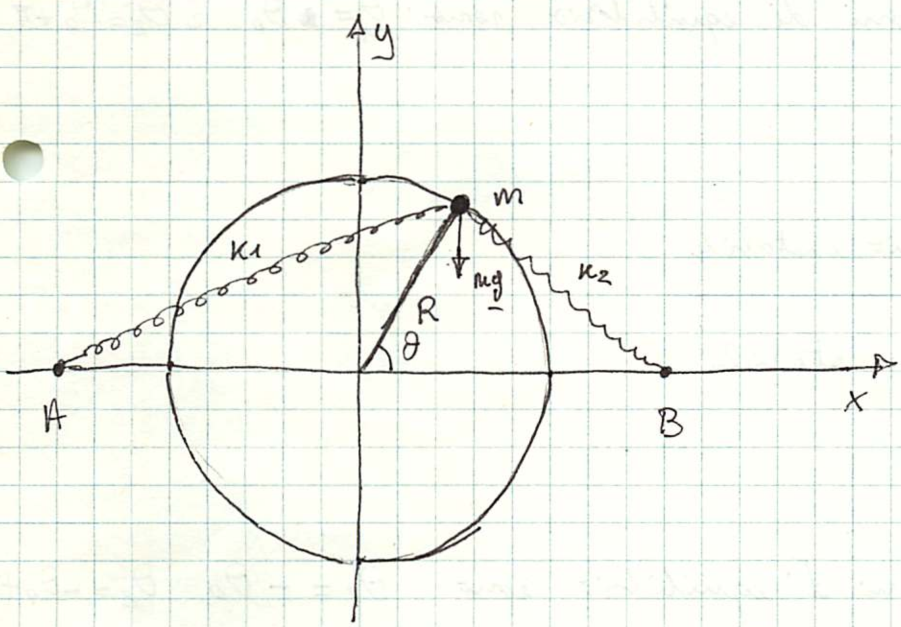
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial y^2}(x_0 y_0)(y-y_0)^2 + \dots$$

$$= \mathcal{U}(x_0,y_0) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} k_i \left[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\right] + \dots$$

$\mathcal{U}(x,y)$ è approssimato da un paraboloide concavo nell'intorno di $x_0 y_0$ e quindi $\mathcal{U}(x_0 y_0)$ è un minimo

Un punto materiale di massa m è vincolato a muoversi su una rotaia circolare liscia di raggio R collocata su un piano verticale. Il punto è collegato mediante due molle di costanti elastiche k_1 e k_2 e lunghezza di riposo trascurabile a due punti A e B situati sull'asse orizzontale passante per il centro della rotaia ad una distanza l da esso.

Trovare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità.



La posizione del punto è completamente individuata dall'angolo θ:

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases}$$

Poiché la reazione vincolare offerta dalla guida è ortogonale allo spostamento del punto materiale, l' energia potenziale del punto si scrive:

$$\begin{aligned} U &= + mgy + \frac{1}{2}k_1\left[(x+l)^2 + y^2\right] + \frac{1}{2}k_2\left[(x-l)^2 + y^2\right] \\ &= mgR\sin\theta + \frac{1}{2}k_1\left(l^2 + R^2 + 2lR\cos\theta\right) + \frac{1}{2}k_2\left(l^2 + R^2 - 2lR\cos\theta\right) \\ &= mgR\sin\theta + (k_1 - k_2)lR\cos\theta + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)\left(l^2 + R^2\right) \end{aligned}$$

Le posizioni di equilibrio sono date dagli zeri di $\frac{dU}{d\theta}$

$$\frac{dU}{d\theta} = mgR\cos\theta - (k_1 - k_2)\,l R\sin\theta$$

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = -mgR\sin\theta - (k_1 - k_2)\,l R\cos\theta$$

$$\frac{dU}{d\theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan\theta = \frac{mg}{(k_1 - k_2)\,l}$$

se $k_1 > k_2$ le posizioni di equilibrio sono $\theta_1 = \theta_0$ e $\theta_2 = \theta_0 + \pi$

$$\theta_0 = \arctan\left(\frac{mg}{(k_1 - k_2)\,l}\right) < \frac{\pi}{2}$$

$\frac{d^2U}{d\theta^2}(\theta_1) < 0$ equilibrio instabile

$\frac{d^2U}{d\theta^2}(\theta_2) > 0$ equilibrio stabile

se $k_1 < k_2$ le posizioni di equilibrio sono $\theta_1 = -\theta_0$ $\theta_2 = -\theta_0 + \pi$

$\frac{d^2U}{d\theta^2}(\theta_1) > 0$ equilibrio stabile

$\frac{d^2U}{d\theta^2}(\theta_2) < 0$ equilibrio instabile

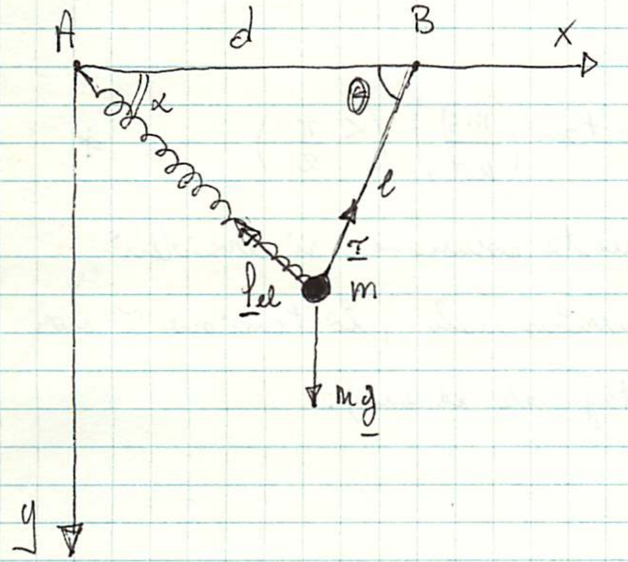
se $k_1 = k_2$ le posizioni di equilibrio sono $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ $\theta_2 = -\frac{\pi}{2}$

$\frac{d^2U}{d\theta^2}(\theta_1) < 0$ equilibrio instabile

$\frac{d^2U}{d\theta^2}(\theta_2) > 0$ equilibrio stabile

Si noti che per $k_1 = k_2$ le due molle non giocano alcun ruolo nelle considerazioni di stabilità: $U(\theta) = mgR\sin\theta + \text{costante}$

Un punto materiale di massa m è appeso in un piano verticale ai punti A e B mediante rispettivamente una molla di costante elastica k e lunghezza di riposo trascurabile ed un filo ideale di lunghezza l. I punti A e B giacciono su un asse orizzontale a distanza d. Trovare le posizioni di equilibrio e discuterne la stabilità nella condizione che il filo sia teso.



La posizione del punto è completamente individuata dall'angolo θ; le coordinate cartesiane $x\,y$ sono

$$\begin{cases} x = d - l\cos\theta \\ y = l\sin\theta \end{cases}$$

All'equilibrio: $\quad 0 = m\underline{g} + \underline{\tau} + \underline{F}_{el}$

dove $\left|\underline{F}_{el}\right| = k\sqrt{(d - l\cos\theta)^2 + (l\sin\theta)^2} = k\sqrt{d^2 + l^2 - 2dl\cos\theta}$

decomponendo lungo gli assi x ed y:

$$\begin{cases} 0 = \tau\cos\theta - k\sqrt{d^2 + l^2 - 2dl\cos\theta}\,\cos\alpha \\ 0 = -\tau\sin\theta + mg - k\sqrt{d^2 + l^2 - 2dl\cos\theta}\,\sin\alpha \end{cases}$$

$$\cos\alpha = \frac{d - l\cos\theta}{\sqrt{d^2 + l^2 - 2dl\cos\theta}} \qquad \sin\alpha = \frac{l\sin\theta}{\sqrt{d^2 + l^2 - 2dl\cos\theta}}$$

$$\begin{cases} 0 = \tau\cos\theta - k(d - l\cos\theta) \\ 0 = -\tau\sin\theta + mg - kl\sin\theta \end{cases}$$

moltiplicando la prima eq. per $\sin\theta$ e la seconda per $\cos\theta$ e sommando:

$$0 = -k(d - l\cos\theta)\sin\theta + mg\cos\theta - kl\sin\theta\cos\theta =$$

$$= -kd\sin\theta + mg\cos\theta$$

$$\tan\theta = \frac{mg}{kd} \qquad \theta = \arctan\left(\frac{mg}{kd}\right) \left(< \frac{\pi}{2}\right) \quad *$$

Per studiare la stabilità di questa soluzione si consideri l'energia potenziale elastica + gravitazionale (la tensione τ non fa lavoro perché lo spostamento è ortogonale ad essa):

$$U = -mgy + \frac{1}{2}k(x^2+y^2) =$$

$$= -mgl\sin\theta + \frac{1}{2}k\left(d^2+l^2-2dl\cos\theta\right)$$

$$\frac{dU}{d\theta} = -mgl\cos\theta + \frac{1}{\cancel{2}}k\cancel{2}dl\sin\theta$$

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = mgl\sin\theta + kdl\cos\theta$$

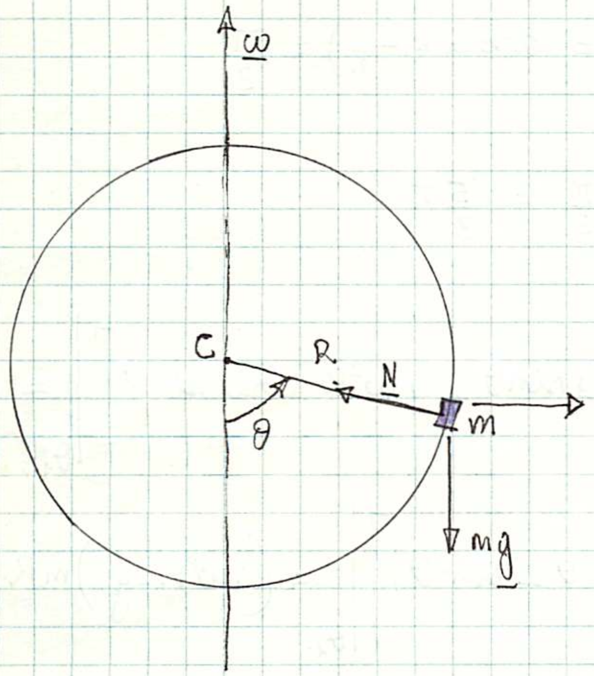
poiché $\frac{d^2U}{d\theta^2} > 0 \quad \forall\, \theta < \frac{\pi}{2}$ $\quad \theta = \arctan\left(\frac{mg}{kd}\right)$ è una soluzione di equilibrio stabile

$*$ si noti che $\tau = \frac{mg}{\sin\theta} - kl = \pm mg\sqrt{\frac{1+\tan^2\theta}{\tan^2\theta}} - kl = \pm\sqrt{(mg)^2+(kd)^2} - kl$

la soluzione + corrisponde a $\theta = \arctan\left(\frac{mg}{kd}\right) < \frac{\pi}{2}$ accettabile se $kl < \sqrt{(mg)^2+(kd)^2}$

" − " a $\theta = \pi + \arctan\left(\frac{mg}{kd}\right)$ non accettabile $(\tau < 0)$

Una spira circolare di raggio $R = 0.8$ m ruota con velocità angolare costante $\omega = \sqrt{2g/R}$ intorno al suo diametro verticale. Un punto materiale di massa $m = 0.01$ Kg può scorrere senza attrito lungo la spira. Si determinino le posizioni di equilibrio, le reazioni vincolari e si discuta la stabilità.



Nel sistema di riferimento solidale alla spira (non inerziale) la posizione del punto materiale è individuata da θ

L'energia potenziale gravitazionale e centrifuga (la reazione vincolare $\underline{N}$ è liscia e non compie lavoro) si scrive:

$$U(\theta) = -mgR\cos\theta - \frac{1}{2}m\omega^2R^2\sin^2\theta$$

$$\frac{dU}{d\theta} = mgR\sin\theta - m\omega^2R^2\sin\theta\cos\theta$$

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = mgR\cos\theta - m\omega^2R^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) =$$

$$= mgR\cos\theta - m\omega^2R^2(2\cos^2\theta - 1)$$

$$= mR\left[g\cos\theta - \omega^2R(2\cos^2\theta - 1)\right]$$

le posizioni di equilibrio sono le radici dell'equazione

$$\frac{dU}{d\vartheta} = 0 \qquad mgR\sin\theta - m\omega^2R^2\sin\theta\cos\theta = 0$$

$$mR\sin\theta\left(g - \omega^2R\cos\theta\right) = 0$$

$$\theta_1 = 0 \quad \theta_2 = \pi \quad \theta_3 = \arccos\left(\frac{g}{\omega^2R}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

$$\theta_4 = -\arccos\left(\frac{g}{\omega^2R}\right) + 2\pi = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi$$

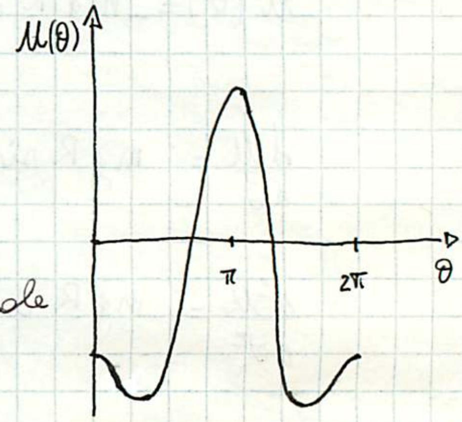
$$\frac{d^2U}{d\theta^2}(\theta_1) = -mgR < 0$$

$\theta_1 =$ equilibrio instabile

$$\frac{d^2U}{d\theta^2}(\theta_2) = mR\left(-g - \omega^2R\right) = -3mRg < 0 \qquad \text{equilibrio instabile}$$

$$\frac{d^2U}{d\theta^2}(\theta_3) = mR\left(g\frac{1}{2} - 2g\left(2\frac{1}{2} - 1\right)\right) = \frac{1}{2}mRg > 0 \qquad \text{equilibrio stabile}$$

$$\frac{d^2U}{d\theta^2}(\theta_4) = mR\,g\frac{1}{2} > 0 \qquad \text{equilibrio stabile}$$



la reazione vincolare è diretta verso il centro e vale

$$N(\theta) = -\frac{\partial U}{\partial R} = mg\cos\theta + m\omega^2R\sin^2\theta$$

$$N(\theta_1) = mg \qquad N(\theta_2) = -mg \qquad N(\theta_3) = N(\theta_4) = 2mg \simeq 0.2\,N$$