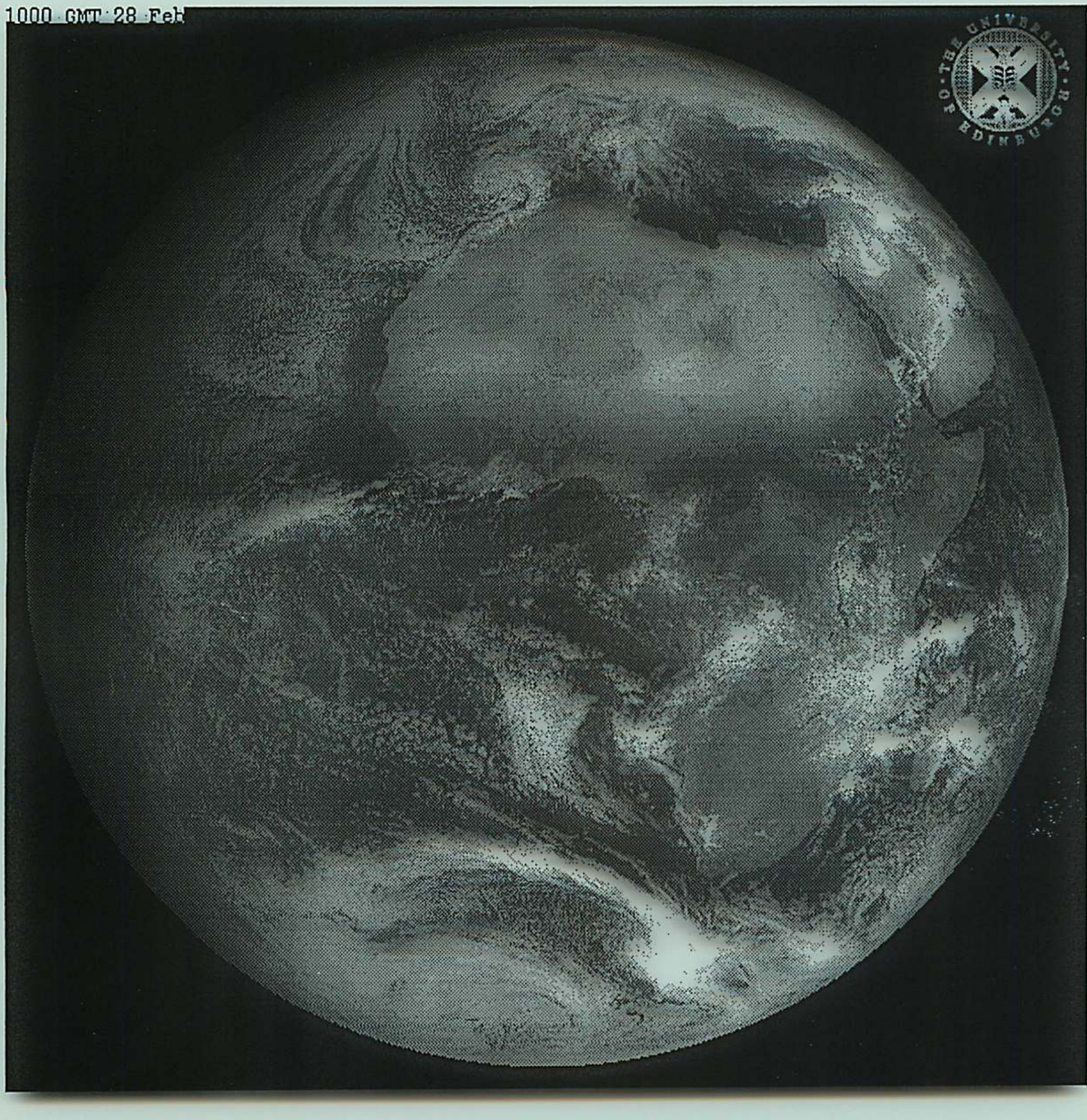
GRAVITAZIONE

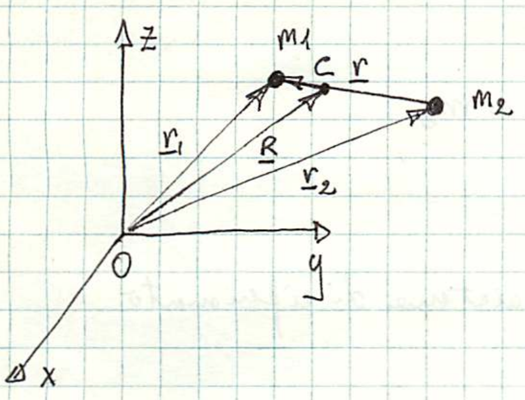
1 x 2 h


1000 GMT 28 Feb
THE UNIVERSITY OF EDINBURGH

Studiare il moto di due punti materiali di massa m_1 ed m_2 tra i quali si esercita una forza inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza

---

Siano $\underline{r}_1$ ed $\underline{r}_2$ i vettori posizione dei due corpi rispetto al sistema inerziale $Oxyz$.



Posto $\quad \underline{r} \equiv \underline{r}_1 - \underline{r}_2$

la forza scambiata è $\quad \underline{F}_{2\to1} = -\dfrac{A}{r^3}\underline{r}$

$$\underline{F}_{1\to2} = \frac{A}{r^3}\underline{r}$$

per $A>0$ si ha attrazione per $A<0$ repulsione.

L'equazione del moto dei due corpi è:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\underline{r}}_1 = -\dfrac{A}{r^3}\underline{r} \\[2ex] m_2 \ddot{\underline{r}}_2 = \dfrac{A}{r^3}\underline{r} \end{cases}$$

Si ponga $\quad \underline{R} \equiv \dfrac{m_1\underline{r}_1 + m_2\underline{r}_2}{M} \qquad$ dove $\quad M = m_1 + m_2$

Passando dalle variabili $\underline{r}_1, \underline{r}_2$ alle variabili $\underline{r}, \underline{R}$

$$\begin{cases} \underline{r}_1 = \underline{R} + \dfrac{m_2}{M}\underline{r} \\[2ex] \underline{r}_2 = \underline{R} - \dfrac{m_1}{M}\underline{r} \end{cases} \qquad \begin{cases} m_1\ddot{\underline{R}} + \dfrac{m_1 m_2}{M}\ddot{\underline{r}} = -\dfrac{A}{r^3}\underline{r} \\[2ex] m_2\ddot{\underline{R}} - \dfrac{m_1 m_2}{M}\ddot{\underline{r}} = \dfrac{A}{r^3}\underline{r} \end{cases}$$

Sommando e sottraendo, si ottiene:

dopo aver moltiplicato per m_2 ed m_1, rispettivamente,

$$\begin{cases} M\,\ddot{\underline{R}} = 0 \\[2ex] \dfrac{m_1 m_2}{M}\,\ddot{\underline{r}} = -\dfrac{A}{r^3}\,\underline{r} \end{cases}$$

Il moto risulta decomposto nel moto (libero) del baricentro (C) e nel moto relativo dei due corpi che avviene con massa relativa

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \qquad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

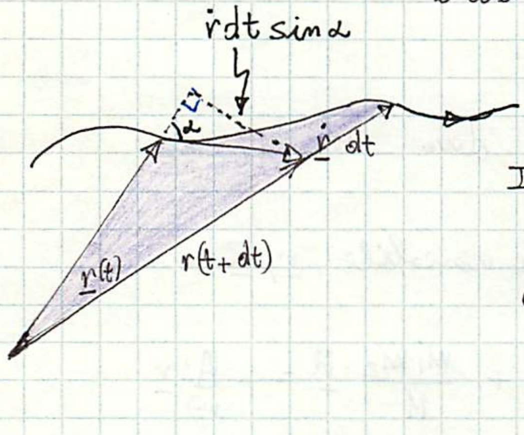
$$\left(\text{Per } m_1 \gg m_2 \qquad \underline{R} \simeq \underline{r}_1 \qquad \mu \simeq m_2 \right)$$

Si consideri ora il ~~moto~~ moto relativo

$$\mu\,\ddot{\underline{r}} = -\frac{A}{r^3}\,\underline{r} \qquad \underline{r} \times \left(-\frac{A}{r^3}\underline{r}\right) = 0 \Rightarrow \underline{r} \times \mu\,\dot{\underline{r}} = \text{costante} = \underline{l}$$

$$\text{Poiché } \frac{d}{dt}\left(\underline{r} \times \mu\,\dot{\underline{r}}\right) = \underline{r} \times \mu\,\ddot{\underline{r}} = \underline{r} \times \left(-\frac{A}{r^3}\underline{r}\right) = 0$$

$\underline{r} \times \mu\,\dot{\underline{r}} = \text{costante}$ segue che il piano istantaneo di giacitura della traiettoria è costante cioè la traiettoria è piana



Inoltre $\frac{1}{2}\left|\underline{r} \times \dot{\underline{r}}\right| dt = dA + O(dt^2)$

dA = area spazzata da $\underline{r}$ nel tempo dt

$$\frac{dA}{dt} = \text{velocità areolare} = \frac{1}{2}\left|\underline{r} \times \dot{\underline{r}}\right| = \text{costante}$$

Sia E l'energia del moto relativo

$$E = \frac{1}{2}\mu|\dot{\underline{r}}|^2 - \frac{A}{r} = \text{costante}$$

$$\frac{dE}{dt} = \mu\dot{\underline{r}}\cdot\ddot{\underline{r}} - A\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\dot{\underline{r}} = \dot{\underline{r}}\cdot\left(\mu\ddot{\underline{r}} + \frac{A\underline{r}}{r^3}\right) = 0$$

Usando coordinate polari $r\,\theta$ (moto piano) con polo in C

$$\frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) = E + \frac{A}{r}$$

$$\ell = |\underline{r}\times\mu\dot{\underline{r}}| = \mu r\, r\dot{\theta} = \mu r^2\dot{\theta} = \text{costante}$$

$$\dot{\theta} = \frac{\ell}{\mu r^2}$$

Il moto è completamente caratterizzato dalle due costanti E ed ℓ

nella direzione radiale si ha:

$$\mu\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = -\frac{A}{r^2} \quad \Leftarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{\ell^2}{\mu r^2} - \frac{A}{r} = E \\ \\ \text{derivando rispetto al tempo e} \\ \text{scartando la soluzione } \dot{r} = 0 \end{array} \right.$$

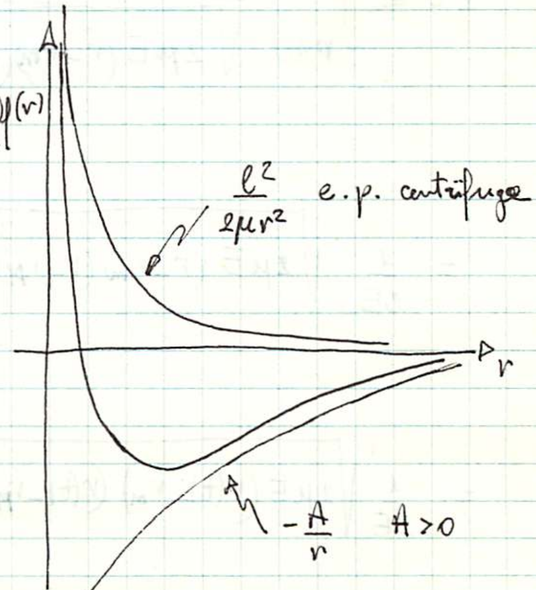
$$\mu\ddot{r} - \frac{\ell^2}{\mu r^3} = -\frac{A}{r^2}$$

$$\mu\ddot{r} = -\frac{A}{r^2} + \frac{\ell^2}{\mu r^3}$$

la forza efficace $-\frac{A}{r^2} + \frac{\ell^2}{\mu r^3}$ è conservativa

e la corrispondente energia potenziale

efficace è $U_{eff}(r) = -\frac{A}{r} + \frac{\ell^2}{2\mu r^2}$



④

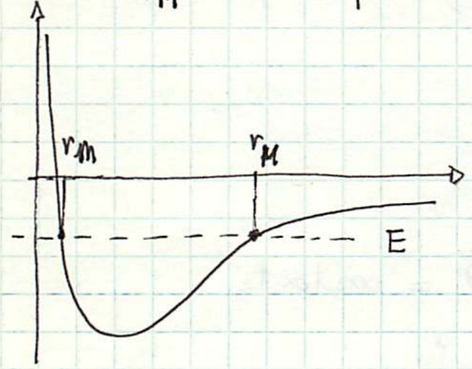
Per $A<0$ il moto è non legato (la traiettoria non è chiusa)

$r(t)$ può assumere valori infinitamente grandi

Per $A>0$ se $E\geq 0$ la traiettoria non è chiusa

se $-\frac{\mu A^2}{2\ell^2}<E<0$ la traiettoria è chiusa e $r_m\leq r(t)\leq r_M$

dove $r_{m,M}$ sono i punti di inversione del moto $\mathcal{U}_{eff}(r_{m,M})=E$ $(\dot{r}=0)$



$$-\frac{A}{r}+\frac{\ell^2}{2\mu r^2}=E \qquad \frac{1}{2\mu r^2}\left(2\mu E r^2+2\mu A r-\ell^2\right)=0$$

$$r_{m,M}=\frac{-\mu A\pm\sqrt{\mu^2A^2+2\mu E\ell^2}}{2\mu E}$$

Consideriamo il caso $A>0$ $(A=G\,m_1m_2)$ $-\frac{\mu A^2}{2\ell^2}<E<0$

$$\dot{r}(t)=\frac{dr}{dt}=\pm\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E-\mathcal{U}_{eff}(r)\right)} \Leftarrow \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2=E-\mathcal{U}_{eff}(r)$$

$$\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E-\mathcal{U}_{eff}(r)\right)}}=\pm dt$$

integrando tra 0 e t

$ax^2+2bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ x_{12} sol di $ax^2+2bx+c=0$

$$\pm t=\int_{r(0)}^{r(t)}\frac{\mu r}{\sqrt{2\mu E(r-r_m)(r-r_M)}}\,dr=\int_{r(0)}^{r(t)}\frac{2\mu E\left(r-\frac{r_m+r_M}{2}\right)+\mu E(r_m+r_M)}{\sqrt{2\mu E\left(r^2-(r_m+r_M)r+r_mr_M\right)}}\frac{dr}{2E}$$

$$=\frac{1}{2E}\sqrt{2\mu E(r-r_m)(r-r_M)}\Bigg|_{r(0)}^{r(t)}+\mu\frac{r_m+r_M}{2}\int_{r(0)}^{r(t)}\frac{dr}{\sqrt{2\mu E\left(r^2-(r_m+r_M)r+r_mr_M\right)}}=$$

$$=\frac{1}{2E}\sqrt{2\mu E(r(t)-r_m)(r(t)-r_M)}-\frac{1}{2E}\sqrt{2\mu E(r(0)-r_m)(r(0)-r_M)}+$$

$$+\mu\frac{r_m+r_M}{2}\frac{1}{\sqrt{-2\mu E}}\left[\arctan\frac{(2r-r_m-r_M)\sqrt{-r^2+2(r_m+r_M)r-r_m r_M}}{2\left(-r^2+2(r_m+r_M)r-r_m r_M\right)}\right]_{r(0)}^{r(t)}$$

se $r(0)=r_m$ ed $r(t)=r_M$ $\quad |t|=\frac{1}{2}T\quad$ $T=$ periodo del moto

$$\frac{T}{2}=\left|0-0+\frac{\mu\frac{r_m+r_M}{2}}{\sqrt{-2\mu E}}\left[\arctan(\infty)-\arcsin(-\infty)\right]\right|=\frac{\pi}{\sqrt{-2\mu E}}\mu\frac{r_m+r_M}{2}$$

$$T=\frac{2\pi}{\sqrt{-2\mu E}}\mu\frac{r_m+r_M}{2}$$

infine ricaviamo l'equazione della traiettoria $r(\theta)$

$$\dot\theta=\frac{d\theta}{dr}\frac{dr}{dt}=\frac{\ell}{\mu r^2}\qquad \frac{d\theta}{dr}=\frac{\ell}{\mu r^2}\frac{\pm 1}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E-U_{eff}(r)\right)}}$$

$$\frac{d\theta}{dr}=\frac{\ell}{\mu r^2}\frac{\pm 1}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E+\frac{A}{r}-\frac{\ell^2}{2\mu r^2}\right)}}=\frac{\ell}{\mu r^2}\frac{\pm 1}{\sqrt{\frac{E}{r^2}\left(r^2+\frac{A}{E}r-\frac{\ell^2}{2\mu E}\right)\frac{2}{\mu}}}$$

$$=\pm\frac{\frac{b}{r}}{\sqrt{-r^2+2ar-b^2}}=\pm\frac{1}{r}\sqrt{\frac{\frac{\ell^2}{2\mu E}}{r^2+2\frac{A}{2E}r-\frac{\ell^2}{2\mu E}}}$$

dove $a\equiv-\frac{A}{2E}$ $\qquad b\equiv\sqrt{-\frac{\ell^2}{2\mu E}}$ sono lunghezze

(6)

$$\theta = b \frac{1}{\sqrt{ + b^2}} \ \underset{(\text{arccos})}{\text{arcsin}} \left(\frac{-2b^2 + 2ar}{r\sqrt{4a^2 - 4b^2}} \right) + \text{costante}$$

il sistema di riferimento può essere scelto in modo da scrivere

$$\theta = \ \text{arccos} \left(\frac{b^2 - ar}{r\sqrt{a^2 - b^2}} \right)$$

$$\cos\theta = \frac{b^2 - ar}{r\sqrt{a^2 - b^2}} \qquad r(\theta) = \frac{b^2}{a + \sqrt{a^2 - b^2}\cos\theta}$$

cioè l'equazione di una ellisse con semiasse maggiore pari ad a e semiasse minore pari a b $(a^2 - b^2 > 0)$ e fuoco in C

(per $A > 0$ ed $E \geq 0$ si sarebbe ottenuta l'equazione di una iperbole)

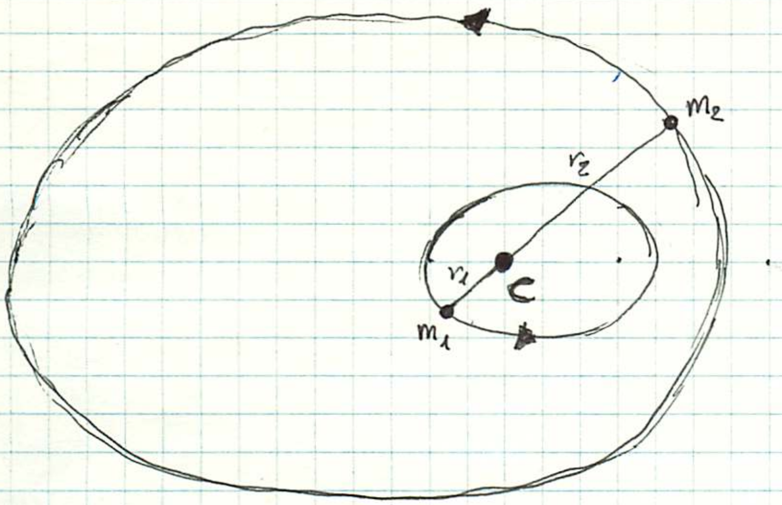
Poiché $\quad r_m = a - \sqrt{a^2 - b^2} \quad$ e $\quad r_M = a + \sqrt{a^2 - b^2}$

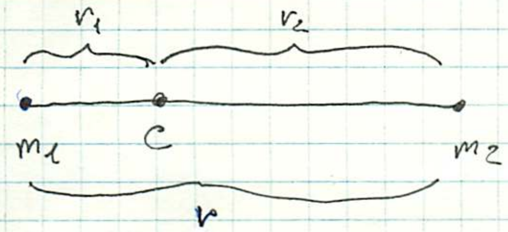
tra periodo e semiasse maggiore vale la seguente relazione:

$$T^2 = \frac{(2\pi)^2}{\mu \frac{A}{a}} \mu^2 \left(\frac{a - \sqrt{a^2 - b^2} + a + \sqrt{a^2 - b^2}}{2} \right)^2 = (2\pi)^2 a^3 \frac{\mu}{A}$$

per $A = G m_1 m_2$ $\qquad \frac{a^3}{T^2} = \frac{G(m_1 + m_2)}{(2\pi)^2}$

traiettoria nel sistema del centro di massa:





$\boxed{m_1 > m_2}$

$$r_1 = r\,\frac{m_2}{m_1+m_2} \qquad r_2 = r\,\frac{m_1}{m_1+m_2}$$

solo se $E = \min_r U_{eff}(r)$

l'orbita è circolare $(r_0 = r_m = r_M)$

$$U_{eff}(r) = -\frac{A}{r} + \frac{l^2}{2\mu r^2} \qquad \frac{d}{dr}U_{eff}(r) = \frac{A}{r^2} - \frac{l^2}{\mu r^3} = 0 \qquad r_0 = \frac{l^2}{\mu A}$$

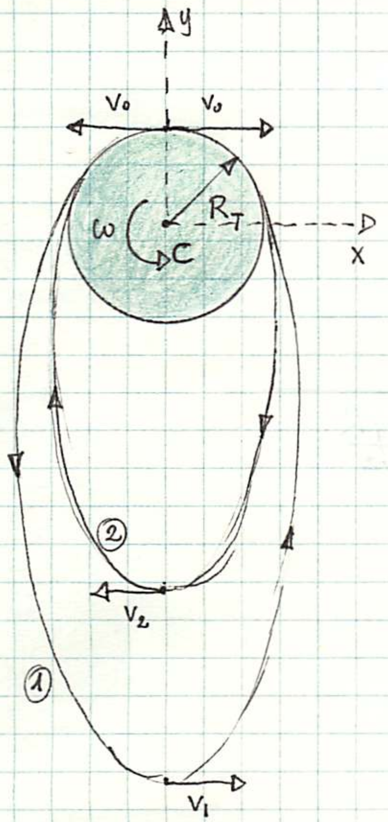
$$E = U_{eff}(r_0) = -A\frac{\mu A}{l^2} + \frac{l^2}{2\mu}\frac{\mu^2A^2}{l^4} = -\frac{1}{2}\frac{\mu A^2}{l^2}$$

$$a = -\frac{A}{2E} = \frac{A}{2}\frac{2l^2}{\mu A^2} = \frac{l^2}{\mu A}$$

$$b = \sqrt{-\frac{l^2}{2\mu}\frac{-2l^2}{\mu A^2}} = \frac{l^2}{\mu A}$$

$a = b = r_0$

Due satelliti vengono lanciati da un punto dell'equatore in direzioni opposte con medesima velocità $v_0 = 10\ Km\ s^{-1}$ lungo due orbite ellittiche. Si determinino le massime distanze d_1 ed d_2 dal centro della terra, misurate in raggi terrestri $R \overset{=}{} 6370\ Km$, cui giungono i satelliti nel loro moto. Sia noto $g = 9.8\ m\ s^{-2}$



Poichè la massa dei satelliti è trascurabile rispetto a quella della terra, il centro C della terra, assunta sferica, è con ottima approssimazione il centro di massa del sistema satellite + terra. Inoltre è una buona approssimazione considerare il sistema di riferimento con origine in C inerziale.

In tale sistema di riferimento le velocità iniziali dei due proiettili sono:

$V_1 = v_0 + \omega R$

(entrambe minori della velocità di fuga →)

$V_2 = v_0 - \omega R$

lungo l'asse x. Poichè la forza gravitazionale (unica) agente sui satelliti è conservativa e centrale, l'energia ed il momento della quantità di moto rispetto al centro sono conservate:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} m V^2 - G \frac{mM}{R} = \frac{1}{2} m v^2 - G \frac{mM}{d} \\ \\ mVR = mvd \end{cases}$$

avendo chiamato con m la massa del generico satellite, d e v la distanza massima e la sua velocità in quel punto ed M la massa della terra. $(\underline{v} \perp \underline{d})$

$$v = V \frac{R}{d}$$

$$\frac{1}{2} \cancel{m} V^2 \left[1 - \left(\frac{R}{d}\right)^2\right] = \frac{G \cancel{m} M}{R} \left(1 - \frac{R}{d}\right)$$

$$\frac{1}{2} V^2 \left(1 + \frac{R}{d}\right) = \frac{GM}{R}$$

poichè $g = \frac{GM}{R^2} - \omega^2 R \simeq \frac{GM}{R^2}$

$$1 + \frac{R}{d} = \frac{2gR}{V^2} \qquad \frac{d}{R} = \frac{1}{-1 + \frac{2gR}{V^2}}$$

$$\frac{d_1}{R} = \frac{1}{\frac{2gR}{(v_0 + \omega R)^2} - 1} \simeq 7.1$$

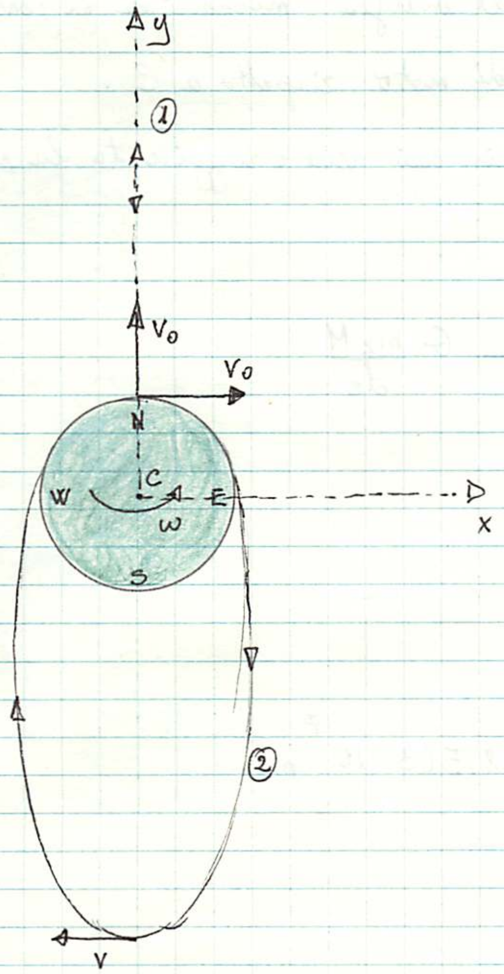
$$\frac{d_2}{R} = \frac{1}{\frac{2gR}{(v_0 - \omega R)^2} - 1} \simeq 2.7$$

nota: velocità di fuga vale da $E = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{GmM}{R} \geq 0$

$v_f \geq 11.17 \ Km \ s^{-1}$ $\qquad \omega R = 0.012 \ Km \ s^{-1}$

$$v_0 \pm \omega R < v_f$$

Due proiettili sono sparati da un polo terrestre con la stessa velocità iniziale $v_0 = 10\ Km\,s^{-1}$, il primo lungo la direzione dell'asse terrestre, il secondo perpendicolarmente in modo che segua una traiettoria ellittica. Si determini quale dei due proiettili si allontana di più dalla terra e si calcoli il rapporto η fra le massime distanze d_1 e d_2 dal centro della terra.
Si assuma che la terra sia una sfera omogenea di raggio $R = 6370\ Km$ e l'accelerazione di gravità al suolo valga $g = 9.8\ m\,s^{-2}$.



Potendosi trascurare la massa dei proiettili rispetto a quella della terra, il centro della terra C coincide con il centro di massa del sistema proiettile + terra. Inoltre il sistema Cxy in figura è approssimativamente inerziale.

Per entrambi i proiettili che si muovono sotto l'azione della forza gravitazionale, l'energia meccanica (cinetica + potenziale gravitazionale) è conservata

Per il primo proiettile la massima distanza d_1 da C è raggiunta al momento di arresto:

$$\frac{1}{2} m_1 v_0^2 - G\frac{m_1 M}{R} = -G\frac{m_1 M}{d_1}$$

essendo M la massa della terra ed m_1 quella del proiettile.

Poiché $g \simeq \frac{GM}{R^2}$ si ha:

$$d_1 = R \frac{1}{1 - \frac{v_0^2}{2gR}} = 3.200\ 10^7\ m$$

Per il secondo proiettile oltre all'energia meccanica si conserva anche il momento della quantità di moto rispetto a C.
Tra l'istante di lancio e quello in cui viene raggiunta la massima distanza valgono le relazioni:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} m_2 v_0^2 - G\frac{m_2 M}{R} = \frac{1}{2} m_2 v^2 - G\frac{m_2 M}{d_2} \\ m_2 v_0 R = m_2 v\, d_2 \end{cases}$$

$$v = v_0 \frac{R}{d_2}$$

$$d_2 = R \frac{1}{\frac{2gR}{v_0^2} - 1} = 2.563\ 10^7\ m$$

$$\eta = \frac{d_1}{d_2} = \frac{\frac{2gR}{v_0^2} - 1}{1 - \frac{v_0^2}{2gR}} = \frac{2gR}{v_0^2} = 1.25$$

Braginsky (1970) ha misurato la differenza percentuale dei rapporti fra massa gravitazionale ed inerziale per sferette di platino e alluminio trovando:

$$\frac{(m_g/m_i)_{Al} - (m_g/m_i)_{Pt}}{(m_g/m_i)_{Al}} \leq 3 \cdot 10^{-11}$$

Sulla base di questo risultato trovare la massima differenza di quota alla quale si disporrebbero una sferetta di Pt ed una di Al abbandonate a se stesse a bordo di una navetta spaziale in un'orbita equatoriale ad una quota $d = 370$ Km

Il raggio equatoriale terrestre è 6378 Km.

Le due sferette si muovono con la stessa velocità V su due orbite circolari di raggi r_{Al} e r_{Pt} dati da:

$$\frac{G\,(m_g)_{Al}\,M_T}{r_{Al}^2} = (m_i)_{Al}\,\frac{V^2}{r_{Al}} \qquad (m_g/m_i)_{Al} = \frac{V^2\,r_{Al}}{G\,M_T}$$

$$(m_g/m_i)_{Pt} = \frac{V^2\,r_{Pt}}{G\,M_T}$$

quindi

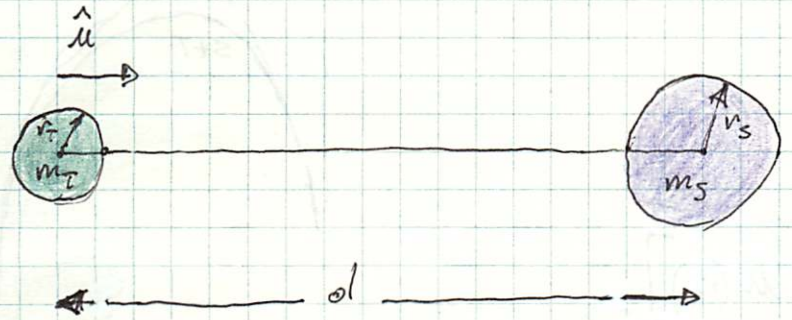
$$\frac{(m_g/m_i)_{Al} - (m_g/m_i)_{Pt}}{(m_g/m_i)_{Al}} = \frac{r_{Al} - r_{Pt}}{r_{Al}}$$

Poiché $r_{Al} \simeq d +$ raggio equatoriale $= 6748$ Km

si ha

$$r_{Al} - r_{Pt} \leq 3 \cdot 10^{-11} \cdot 6.748\ 10^{6}\ m = 0.2\ mm$$

Un corpo di massa m viene lanciato dalla terra in direzione del sole con velocità v_0. Nota la distanza d tra sole e terra, la massa m_S ed il raggio r_S del sole, la massa m_T ed il raggio r_T della terra e la costante di gravitazione universale G si calcoli il valore v_0^* tale che se $v_0 < v_0^*$ il corpo non raggiunge il sole e la velocità con cui il corpo giunge sulla superficie solare se $v_0 > v_0^*$.



Quando il corpo è a distanza r dal centro della terra è soggetto alla forza

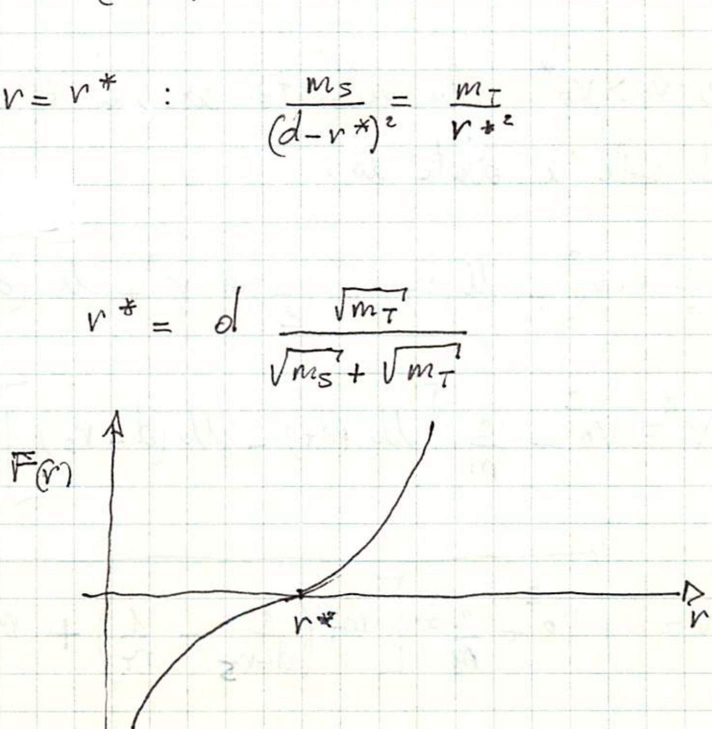
$$\overline{F}(r) = G\, m \left(\frac{m_S}{(d-r)^2} - \frac{m_T}{r^2} \right) \hat{u}$$

tale forza si annulla per $r = r^*$:

$$\frac{m_S}{(d-r^*)^2} = \frac{m_T}{r^{*2}}$$

$$\sqrt{m_S}\; r^* = \sqrt{m_T}\,(d - r^*) \qquad r^* = d\,\frac{\sqrt{m_T}}{\sqrt{m_S} + \sqrt{m_T}}$$

Il corpo è attratto verso terra per $r < r^*$ e verso il sole per $r > r^*$

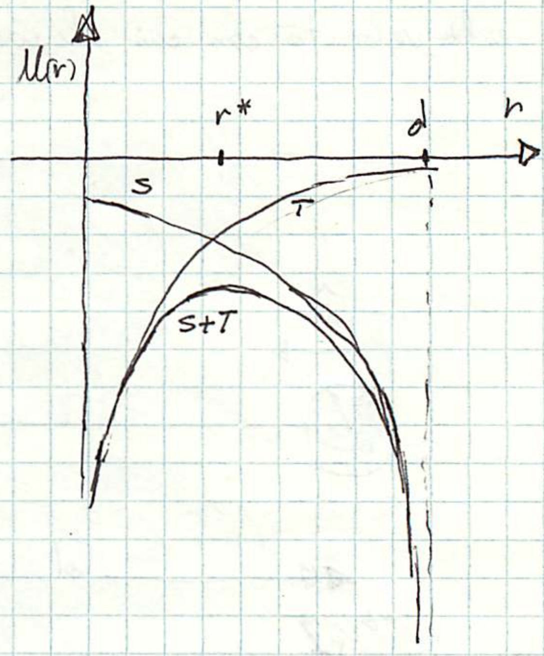


v_0^* è quella velocità iniziale per cui il corpo giunge a r^* con velocità nulla

Per la conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + U(r_T) = 0 + U(r^*)$$

$$U(r) = -Gm\left(\frac{m_T}{r} + \frac{m_S}{d-r}\right)$$



$$v_0^{*2} = \frac{2}{m}\left[U(r^*) - U(r_T)\right] =$$

$$= \frac{2}{\cancel{m}} G\cancel{m}\left(\frac{m_T}{r_T} + \frac{m_S}{d-r_T} - \frac{m_T}{r^*} - \frac{m_S}{d-r^*}\right)$$

$$v_0^* = \sqrt{2G\left[m_T\left(\frac{1}{r_T} - \frac{1}{r^*}\right) - m_S\left(\frac{1}{d-r^*} - \frac{1}{d-r_T}\right)\right]}$$

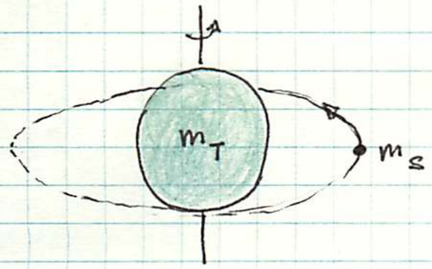
se $v_0 > v_0^*$ la velocità con cui il corpo giunge sulla superficie del sole è data da:

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + U(r_T) = \frac{1}{2} m v^2 + U(d-r_S)$$

$$v^2 = v_0^2 + \frac{2}{m}\left[U(r_T) - U(d-r_S)\right]$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2G\left[m_T\left(\frac{1}{d-r_S} - \frac{1}{r_T}\right) + m_S\left(\frac{1}{r_S} - \frac{1}{d-r_T}\right)\right]}$$

Schematizzando la terra come un corpo sferico di massa $m_T = 5.5\ 10^{24}$ Kg trovare il raggio dell'orbita circolare di un satellite artificiale che resti immobile sulla verticale terrestre. Quale angolo deve formare il piano dell'orbita con il piano equatoriale?



Detta m_S la massa del satellite ed r il raggio della sua orbita:

$$F = \frac{m_T m_S}{r^2} G = m_S \frac{v^2}{r} \qquad (\ddot{r} = 0)$$

$$v = \omega r = \frac{2\pi}{T} r \qquad **$$

$$G \frac{m_T \cancel{m_S}}{r^2} = \cancel{m_S} \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$$

$$r = \left(\frac{G m_T T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} = 4.1\ 10^7 \text{ m} = 41000 \text{ Km}$$

** Il periodo del satellite deve essere uguale a quello del moto di rotazione della terra (altrimenti la longitudine del satellite cambia):

$\left(T = 1 \text{ giorno} = 86'400 \text{ s} \right)$

Infine se il piano dell'orbita fosse inclinato rispetto al piano equatoriale la latitudine del satellite oscillerebbe nel tempo. L'orbita deve essere equatoriale.

Un satellite artificiale di massa $m = 200$ Kg in rotazione intorno alla terra in orbita circolare a quota $d = 500$ Km dal suolo viene spostato in un'altra orbita circolare a quota $2d$. Si calcoli il lavoro L necessario per effettuare lo spostamento. Sia $G = 6.67\ 10^{-11}\ N\ m^2\ Kg^{-1}$, raggio della terra $r_T = 6370$ Km, densità media della terra $\rho_T = 5520\ Kg\ m^{-3}$.

La massa della terra è $\quad m_T = \frac{4}{3}\pi r_T^3 \rho_T$

Se r è la distanza del satellite dal centro della terra l'energia potenziale gravitazionale e quella cinetica sono:

$$U(r) = -G\frac{m\, m_T}{r} \qquad T(r) = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \frac{G m_T}{r}$$

$$\left(\frac{G m_T m}{r^2} = \frac{m v^2}{r}\right)$$

Il lavoro richiesto è dato da:

$$L + T(d) + U(d) = T(2d) + U(2d)$$

$$L = U(2d) - U(d) + T(2d) - T(d)$$

$$\mathcal{U}(2d) - \mathcal{U}(d) = G m m_T \left(\frac{1}{r_T + d} - \frac{1}{r_T + 2d} \right) > 0$$

$$T(2d) - T(d) = \frac{1}{2} m \left(v_{2d}^2 - v_d^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{2} m \, G m_T \left(\frac{1}{r_T + 2d} - \frac{1}{r_T + d} \right) < 0$$

$$L = \frac{1}{2} G m m_T \left(\frac{1}{r_T + d} - \frac{1}{r_T + 2d} \right) = 3.94 \; 10^8 \; J$$

Il periodo di rotazione della luna attorno alla terra è $T_L = 27.32$ giorni e la sua orbita è approssimativamente un cerchio di raggio $d_L = 384'400$ Km; l'accelerazione di gravità alla superficie della terra è $g = 9.81\ ms^{-2}$. Si calcoli il raggio r_T della terra, la distanza d_S dal centro della terra e la velocità v_S di un satellite artificiale in rotazione su un orbita circolare situata nel piano equatoriale terrestre con periodo $T_S = 1$ giorno. (Si trascuri l'attrazione esercitata dalla luna e dagli altri corpi celesti sul satellite).

Nel sistema di riferimento solidale al centro della terra ed orientazione fissa (sistema inerziale) il moto della luna è circolare uniforme

$$G \frac{m_T m_L}{d_L^2} = m_L \frac{v_L^2}{d_L} = m_L \left(\frac{2\pi}{T_L}\right)^2 d_L \qquad (\dot{r} = 0)$$

da cui

$$G m_T = 4\pi^2 \frac{d_L^3}{T_L^2}$$

Poiché $\quad g = G \frac{m_T}{r_T^2} \quad$ si ha

$$r_T = \sqrt{\frac{G m_T}{g}} = \frac{2\pi}{T_L} \sqrt{\frac{d_L^3}{g}} = 6405\ Km$$

Per il satellite nello stesso sistema di riferimento si ha:

$$\begin{cases} G \dfrac{m_T m_S}{d_S^2} = m_S \dfrac{v_S^2}{d_S} \\ v_S = \dfrac{2\pi d_S}{T_S} \end{cases}$$

da cui $\dfrac{G m_T}{d_S^2} = \dfrac{4\pi^2 d_S}{T_S^2}$

$$d_S = \left(\frac{G m_T T_S^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} = \left(\frac{T_S}{T_L} \right)^{2/3} d_L = 4.24 \; 10^4 \text{ Km}$$

$$v_S = \left(\frac{G m_T 2\pi}{T_S} \right)^{1/3} = 3.08 \text{ Km s}^{-1}$$

lo stesso risultato poteva trovarsi usando la 3ª legge di Keplero:

$$\left(\frac{d_S}{d_L} \right)^3 = \left(\frac{T_S}{T_L} \right)^2$$