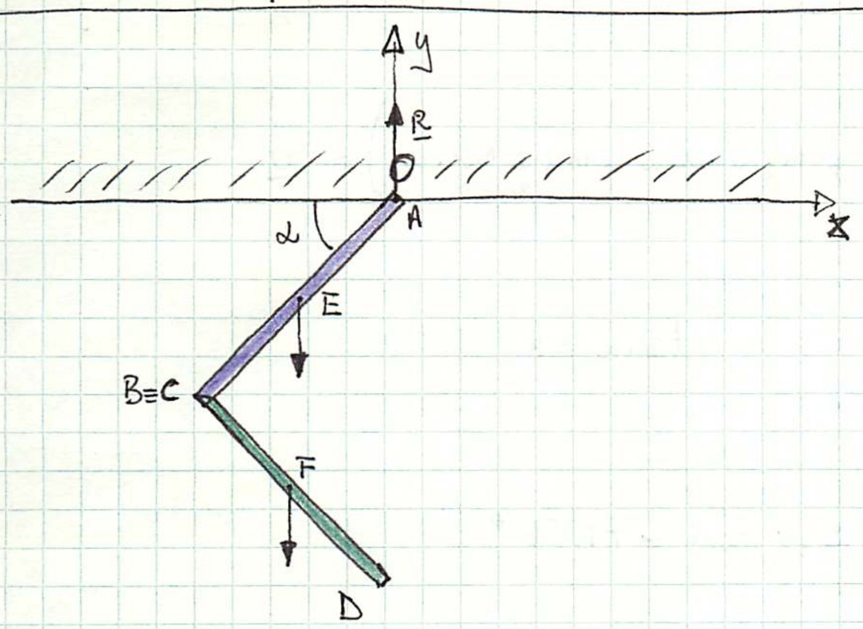
STATICA
DEI
SISTEMI RIGIDI

Due aste AB e CD omogenee, di lunghezza e massa uguali, sono saldate insieme agli estremi B≡C perpendicolarmente l'una all'altra. L'estremo A viene incernierato ad un punto O intorno al quale l'asta può ruotare senza attrito. Si calcoli il valore dell'angolo α formato da AB rispetto al piano orizzontale in condizioni di equilibrio.



Sia l la lunghezza delle aste ed m la loro massa

Sul sistema rigido agiscono 2 forze esterne: la forza peso in E ed F e la reazione vincolare in O

All'equilibrio:

$$2m\underline{g} + \underline{R} = 0$$

$$\underline{OE} \times m\underline{g} + \underline{OF} \times m\underline{g} = 0$$

la prima fornisce $R_y = 2mg$ $\quad R_x = R_z = 0$

Dalla seconda

$$\left(-\frac{l}{2}\cos\alpha\,,\ \frac{l}{2}\sin\alpha\,,\ 0\right) \times \left(0,-gm,0\right) +$$

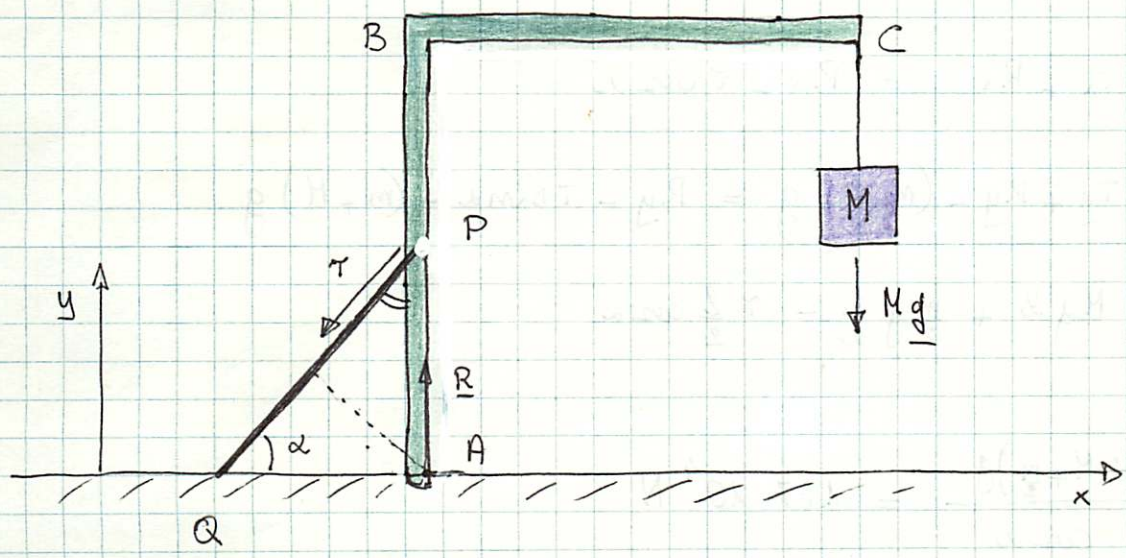
$$+\left(-l\cos\alpha+\frac{l}{2}\sin\alpha\,,\ l\sin\alpha-\frac{l}{2}\cos\alpha\,,\ 0\right) \times \left(0,-mg,0\right) = \underline{0}$$

$$\left(0,\ 0,\ mg\frac{l}{2}\cos\alpha + mg\,l\cos\alpha - mg\frac{l}{2}\sin\alpha\right) = \underline{0}$$

$3\cos\alpha - \sin\alpha = 0$ $\qquad\qquad$ $\tan\alpha = 3$

$\alpha = \arctan 3 = 1.249 \text{ rad} = 71.56°$

La sbarra ABC in figura è incernierata in A
In C è appesa una massa $M = 400\,Kg$ ed in P c'è una corda che forma un angolo $\alpha = \frac{\pi}{3}$ con il piano orizzontale e sostiene la sbarra.
Se $\overline{AB} = \overline{BC} = 4\,m = l$ e $\overline{AP} = \frac{l}{2}$ si calcoli la tensione τ della corda e la reazione vincolare in A nel caso a) che la massa della sbarra sia trascurabile e b) la massa della sbarra (omogenea e a sezione costante) valga $m = 100\,Kg$



a) Sul sistema rigido agiscono la forza peso $M\underline{g}$ la tensione $\underline{\tau}$ della corda e la reazione vincolare $\underline{R}$. All'equilibrio la risultante di queste forze ed il momento risultante sono nulli. Scelto l'asse passante per A per il calcolo dei momenti si ha:

$$0 = \tau_x + R_x = -\tau\cos\alpha + R_x$$

$$0 = \tau_y + R_y - Mg = -\tau\sin\alpha - Mg + R_y$$

$$0 = Mg\,l - \tau\frac{l}{2}\cos\alpha$$

$$\tau = \frac{2Mg}{\cos\alpha} = 1.57\ 10^4\,N$$

$R_x = \tau \cos\alpha \qquad R_y = Mg + \tau \sin\alpha$

$R_x = 2Mg = 7.84\ 10^3\ N \qquad R_y = Mg + 2Mg \tan\alpha = 1.75\ 10^4 N$

b) in questo caso occorre considerare anche il peso della sbarra il cui momento rispetto ad A è:

$$M_A = \int_0^l \frac{m/2}{l} dx\, g\, x = \frac{m/2}{l} g \frac{l^2}{2} = \frac{m}{2} g \cdot \frac{l}{2}$$

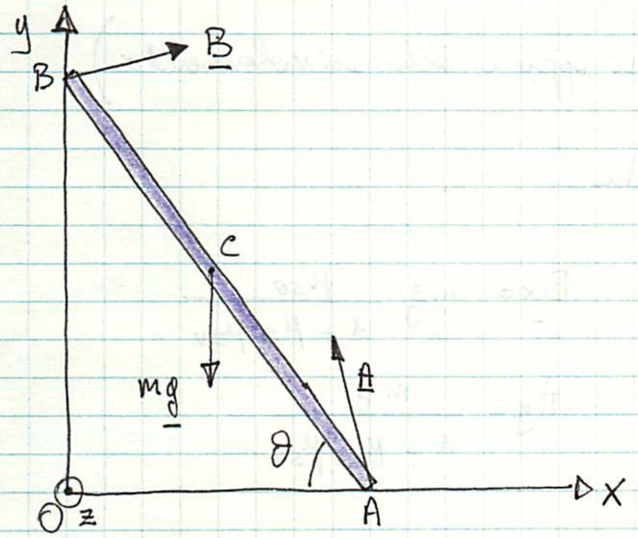
$$\begin{cases} 0 = \tau_x + R_x = R_x - \tau\cos\alpha \\ 0 = \tau_y + R_y - (m+M)g = R_y - \tau\sin\alpha - (m+M)g \\ 0 = Mgl + \frac{m}{2}g\frac{l}{2} - \tau\frac{l}{2}\cos\alpha \end{cases}$$

$$\tau = \frac{\left(2M + \frac{m}{2}\right)g}{\cos\alpha} = 1.67\ 10^4\ N$$

$$R_x = \tau\cos\alpha = \left(2M + \frac{m}{2}\right)g = 8.33\ 10^3\ N$$

$$R_y = \tau\sin\alpha + (m+M)g = \left(2M + \frac{m}{2}\right)g\tan\alpha + (m+M)g = 1.94\ 10^4\ N$$

Una scala la cui massa è uniformemente distribuita lungo tutta la sua lunghezza poggia con una estremità su un piano orizzontale scabro ($\mu_{s\bar{o}} = 0.2$) e con l'altra contro una parete verticale scabra ($\mu_{sv} = 0.1$). Si determini l'angolo di minima inclinazione θ_{min} che la scala deve formare con il piano orizzontale per non scivolare al suolo.



Siano $\underline{A}$ e $\underline{B}$ le reazioni vincolari esercitate dai piani orizzontale e verticale; la forza peso anche ai fini del calcolo del momento può essere pensata tutta concentrata nel centro di massa C (a metà scala).

All'equilibrio si ha:

$$A_x + B_x = 0$$

$$A_y + B_y - mg = 0$$

$$mg \frac{l}{2} \cos\theta - B_x \, l \sin\theta - B_y \, l \cos\theta = 0$$

essendo l la lunghezza della scala ed m la sua massa

ed avendo proiettato i momenti lungo l'asse passante in A

e parallelo a z

θ_{min} è ottenuto quando le forze di attrito sono massime

$$A_x = -\mu_{so} A_y$$

$$B_y = \mu_{sv} B_x$$

(i segni sono tali che l'attrito si oppone allo scivolamento)

Dalle equazioni per le forze si ha

$$\begin{cases} -\mu_{so} A_y + B_x = 0 \\ A_y + \mu_{sv} B_x = mg \end{cases} \qquad B_x = mg \frac{\mu_{so}}{1+\mu_{so}\mu_{sv}} \qquad A_y = \frac{mg}{1+\mu_{so}\mu_{sv}}$$

dall'equazione dei momenti:

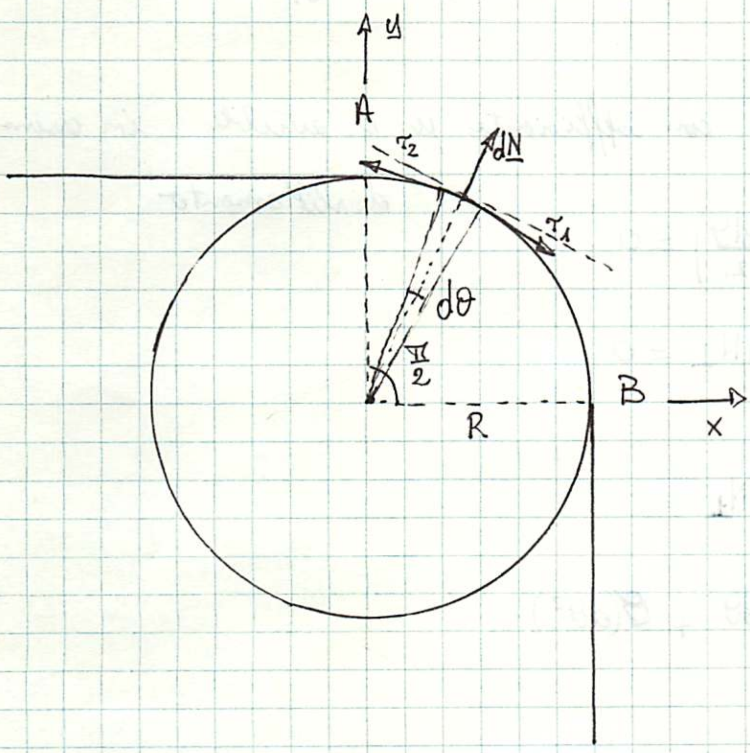
$$\tan\theta_{min} = \frac{\frac{1}{2}mg - B_y}{B_x} = \frac{1+\mu_{so}\mu_{sv}}{\cancel{mg}\,\mu_{so}}\left(\frac{1}{2}\cancel{mg} - \cancel{mg}\frac{\mu_{so}\mu_{sv}}{1+\mu_{so}\mu_{sv}}\right) =$$

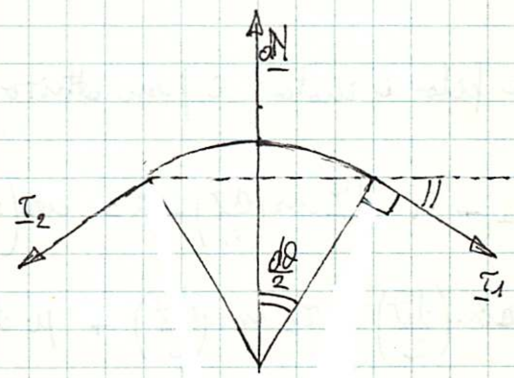
$$= \frac{\cancel{1+\mu_{so}\mu_{sv}}}{\mu_{so}} \; \frac{1+\mu_{so}\mu_{sv} - 2\mu_{so}\mu_{sv}}{2\cancel{(1+\mu_{so}\mu_{sv})}} =$$

$$= \frac{1-\mu_{so}\mu_{sv}}{2\mu_{so}}$$

$$\theta_{min} = \arctan\left(\frac{1-\mu_{so}\mu_{sv}}{2\mu_{so}}\right) \simeq 68^\circ$$

Un filo di massa trascurabile appoggiandosi intorno ad una ruota viene deviato di 90°. Se l'appoggio è privo di attrito mostrare che in condizioni di equilibrio la tensione non varia lungo il filo e valutare la forza che il filo esercita sulla ruota.





Si consideri il tratto di filo di lunghezza $ds = R\,d\theta$; su esso agiscono le due tensioni $\underline{\tau}_1$ e $\underline{\tau}_2$ e la reazione vincolare $\underline{N}$ della ruota normale al filo. All'equilibrio $d\underline{N} + \underline{\tau}_1 + \underline{\tau}_2 = 0$

Proiettando lungo le direzioni radiale e tangente alla ruota:

$$\begin{cases} dN - \tau_1 \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) - \tau_2 \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) = 0 \\ \tau_1 \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) - \tau_2 \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

da cui $\tau_1 = \tau_2$ $\qquad dN = (\tau_1 + \tau_2)\,\frac{d\theta}{2}$

la tensione τ lungo il filo non cambia da A a B

$$N_x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dN_x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tau\, d\theta \cos\theta = \tau$$

$$N = \sqrt{N_x^2 + N_y^2} = \sqrt{2}\,\tau$$

$$N_y = \int dN_y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tau\, d\theta \sin\theta = \tau$$

la forza esercitata dal filo sulla ruota è $(-N_x, -N_y)$

Se tra filo e ruota ci fosse attrito con coefficiente μ si avrebbe in assenza di slittamento

$$\begin{cases} -\mu dN_\perp + \tau_1 \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) - \tau_2 \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) = 0 \\ -\tau_1 \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) - \tau_2 \sin\left(\frac{d\theta}{2}\right) + dN_\perp = 0 \end{cases}$$

in questo caso $\tau_1 = \tau_2 + \mu\, dN_\perp$

$$dN_\perp = \tau_1 \frac{d\theta}{2} + \tau_2 \frac{d\theta}{2} = \tau_2\, d\theta + \mathcal{O}(d\theta^2)$$

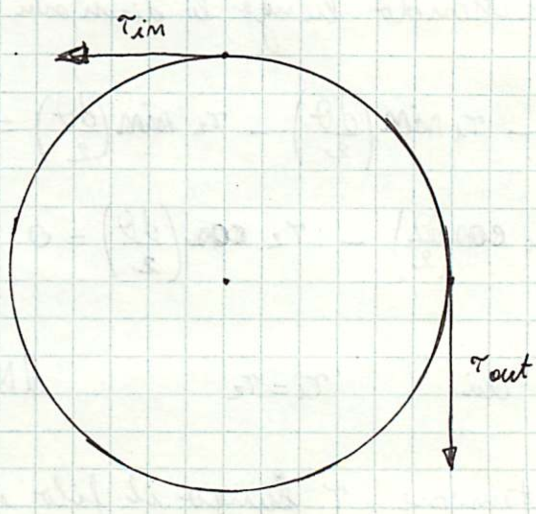
e quindi $\tau_1 = \tau_2 + \tau_2 \mu\, d\theta$

posto $\tau(\theta) = \tau_2$ e $d\tau = \tau_1 - \tau_2$ $\quad d\tau = \mu \tau\, d\theta$

$$\frac{d\tau}{\tau} = \mu\, d\theta$$

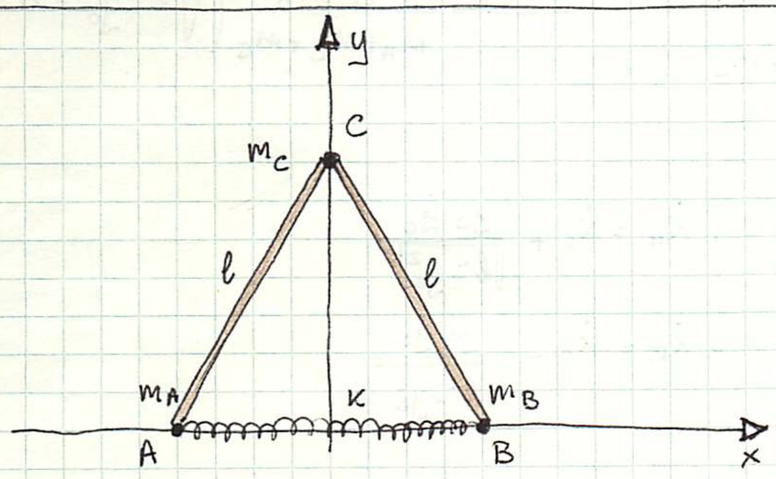
$$\ln \frac{\tau_{out}}{\tau_{in}} = \mu \frac{\pi}{2}$$

$$\tau_{out} = \tau_{in}\, e^{\mu \frac{\pi}{2}}$$



①

Due aste uguali, di lunghezza l e massa trascurabile, sono vincolate a muoversi in un piano verticale e sono incernierate tra loro ad un estremo C. Gli altri due estremi A e B, vincolati a muoversi lungo un asse orizzontale, sono collegati da una molla di costante elastica k e lunghezza di riposo nulla.
Tre corpi puntiformi di masse m_A, m_B, m_C sono saldati ai vertici A, B e C. Trascurando tutti gli attriti si determini la minima altezza y_0 rispetto all'asse orizzontale del punto C nella posiz. di equilibrio, l'intensità F_{min} minima della forza diretta verso il basso da applicare a C in questa posizione affinchè ~~questo~~ giunga sull'asse orizzontale, il corrispondente spostamento Δx_C lungo l'asse orizzontale ed il modulo della velocità V_C



Dati i vincoli il sistema ha due soli gradi di libertà effettivi ad esempio le coordinate x_C ed y_C di C

a $t=0$ $\quad x_C = x_0 = 0 \quad$ e $y_C = y_0$ tale che il sistema sia in equilibrio

energia del sistema $= U(y_C) = m_C g\, y_C + \frac{1}{2} k\, 4(l^2 - y_C^2)$

$\frac{dU}{dy_C} = m_C g - 4k\, y_C = 0 \qquad y_0 = \frac{m_C g}{4k} \qquad$ (se $m_C g \le kl$) $\boxed{\text{vedi p. 3-4}}$

②

l'equilibrio in y_0 è instabile $\left(\frac{d^2 U}{dy_c^2} = -k4 < 0\right)$ per cui $F_{min} = 0$

Sul sistema agiscono solo forze esterne dirette lungo y (le tre forze peso e le reazioni vincolari (vincoli lisci)). dunque la coordinata x del centro di massa rimane fissa nel passaggio di y_c da y_0 a 0:

$$x_{c.m.} = \frac{-m_A\sqrt{l^2-y_0^2} + m_B\sqrt{l^2-y_0^2} + m_c \cdot 0}{m_A+m_B+m_c} = \frac{m_A(\Delta x_c - l) + m_B(\Delta x_c + l) + m_c \Delta x_c}{m_A+m_B+m_c}$$

$$\Delta x_c = \frac{(m_B-m_A)\sqrt{l^2-y_0^2} - (m_B-m_A)l}{m_A+m_B+m_c} = \frac{m_B-m_A}{m_A+m_B+m_c}\left(\sqrt{l^2-y_0^2} - l\right)$$

$$\begin{cases} x_A = x_c - \sqrt{l^2-y_c^2} \\ x_B = x_c + \sqrt{l^2-y_c^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_A = \dot{x}_c + \dfrac{y_c \dot{y}_c}{\sqrt{l^2-y_c^2}} \\ \dot{x}_B = \dot{x}_c - \dfrac{y_c \dot{y}_c}{\sqrt{l^2-y_c^2}} \end{cases}$$

per $y_c = 0$ $\quad \dot{x}_A = \dot{x}_B = \dot{x}_c$

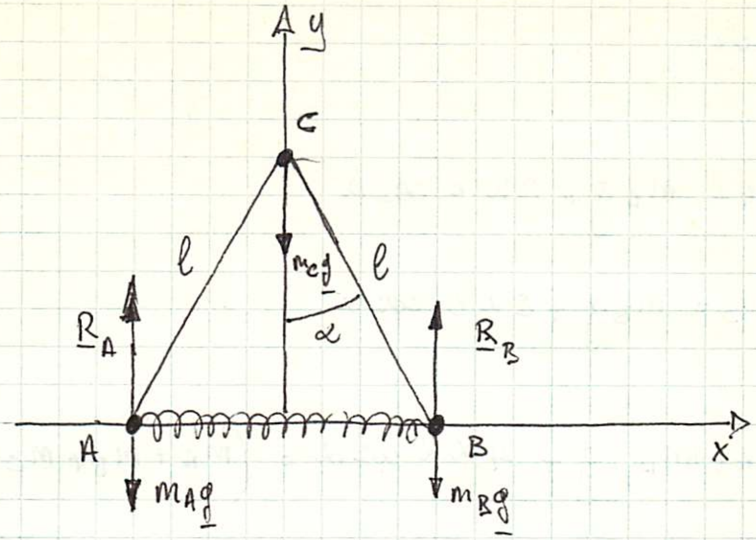
ma $m_A\dot{x}_A + m_B\dot{x}_B + m_c\dot{x}_c = 0$ $\quad$ quindi $\dot{x}_A = \dot{x}_B = \dot{x}_c = 0$

$v_c = \dot{y}_c$ si trova con la conservazione dell'energia

$$m_c g y_0 + \frac{1}{2}k4(l^2-y_0^2) = \frac{1}{2}m_c v_c^2 + \frac{1}{2}k\,4l^2$$

$$v_c = \sqrt{\frac{2}{m_c}\left(m_c g y_0 - 2k y_0^2\right)} = \sqrt{\frac{m_c g^2}{4k}}$$

metodo delle forze



all'equilibrio $\quad (m_A + m_B + m_C)\underline{g} + \underline{R}_A + \underline{R}_B = 0$

$$R_A + R_B = (m_A + m_B + m_C) g$$

Poiché CB non ruota il momento delle forze interne ed esterne per l'asse ortogonale a xy per C è nullo

$$0 = R_B\, l \sin\alpha - m_B g\, l \sin\alpha - k\, 2 l \sin\alpha\, l \cos\alpha =$$

$$= l \sin\alpha \left(R_B - m_B g - 2 k l \cos\alpha \right)$$

La stessa cosa vale per AC

$$0 = l \sin\alpha \left(R_A - m_A g - 2 k l \cos\alpha \right)$$

1ª soluz. $\quad \alpha = 0 \qquad R_A + R_B = R = (m_A + m_B + m_C) g$

(4) 2ª soluz.

$$R_A = m_A g + 2kl\cos\alpha$$

$$R_B = m_B g + 2kl\cos\alpha$$

$$(m_A + m_B)g + 4kl\cos\alpha = (m_A + m_B + m_C)g$$

$$y_0 \equiv l\cos\alpha \qquad y_0 = \frac{m_C g}{4k}$$

$$R_A = \left(m_A + \frac{1}{2}m_C\right)g$$

$$R_B = \left(m_B + \frac{1}{2}m_C\right)g$$

$$y_C(\alpha) = l\cos\alpha \qquad U(\alpha) = m_C g l\cos\alpha + \frac{1}{2}k(2l\sin\alpha)^2$$

$$\frac{\partial U}{\partial\alpha} = -m_C g l\sin\alpha + 4kl^2\sin\alpha\cos\alpha = l\sin\alpha\left(4kl\cos\alpha - m_C g\right)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\alpha^2} = l\cos\alpha\left(4kl\cos\alpha - m_C g\right) - 4l^2\sin^2\alpha\, k$$

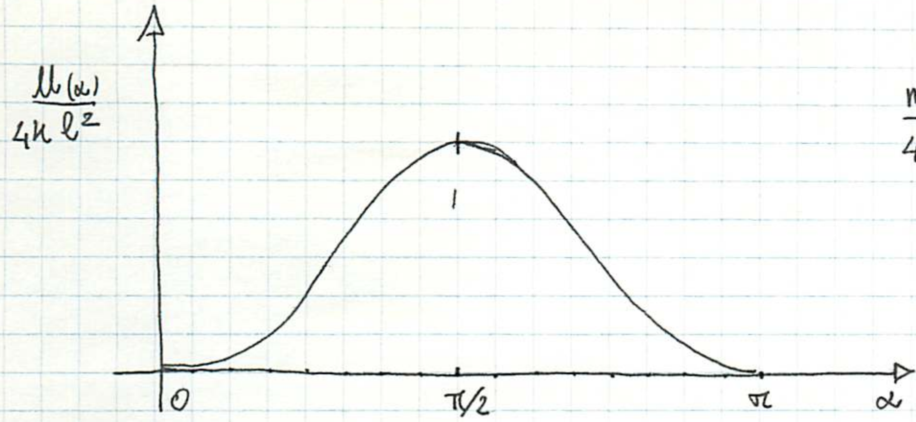
$\frac{\partial U}{\partial\alpha} = 0 \qquad \alpha = 0$ sempre, $\cos\alpha = \frac{m_C g}{4kl}$ se $m_C g < 4kl$, $\alpha = \pi$ sempre

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial\alpha^2}\right|_{\alpha=0} = l\left(4kl - m_C g\right) \begin{cases} \text{stabile se } 4kl > m_C g \\ \text{instabile se } 4kl < m_C g \end{cases}$$

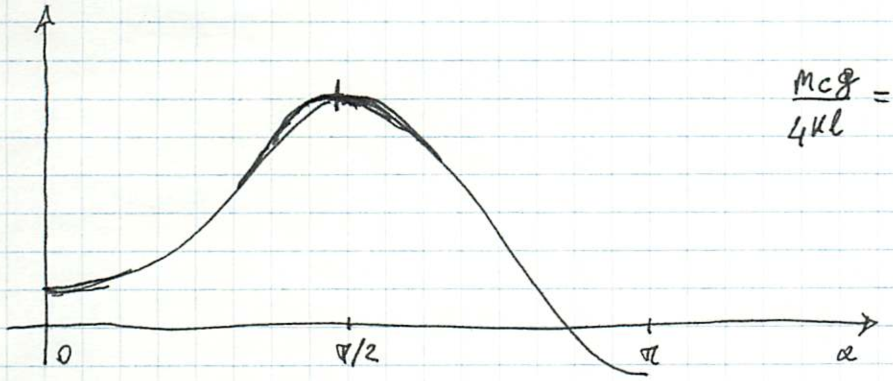
$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial\alpha^2}\right|_{\alpha=\arccos\left(\frac{m_C g}{4kl}\right)} = -4kl^2\sqrt{1-\left(\frac{m_C g}{4kl}\right)^2} < 0 \quad \text{instabile}$$

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial\alpha^2}\right|_{\alpha=\pi} = +l\left(4kl + m_C g\right) > 0 \quad \text{stabile}$$

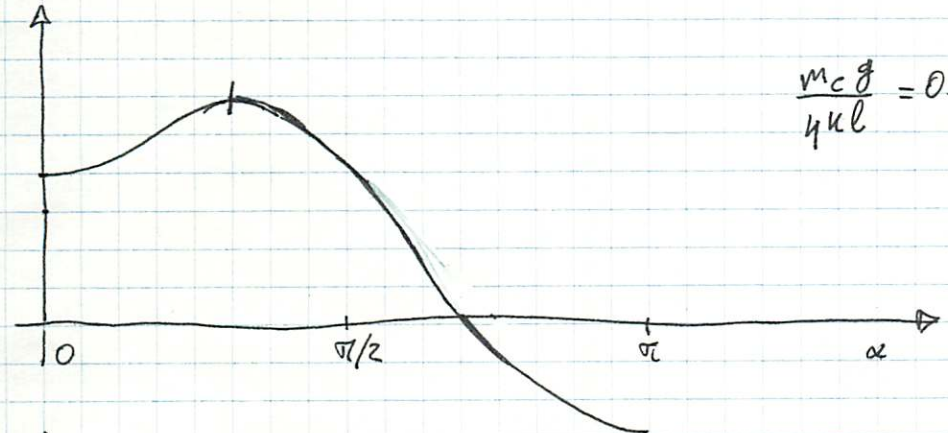
$$M(\alpha) = 4kl^2 \left(\frac{1}{2} \sin^2\alpha + \frac{m_c g}{4kl} \cos\alpha \right)$$



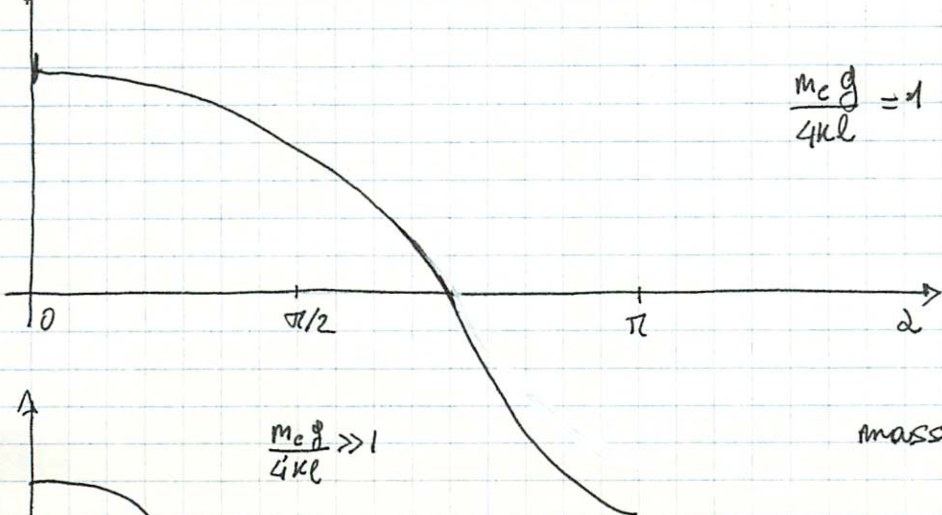
$$\frac{m_c g}{4kl} = 0$$



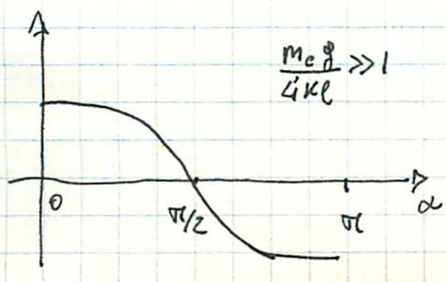
$$\frac{m_c g}{4kl} = 0.1$$



$$\frac{m_c g}{4kl} = 0.5$$

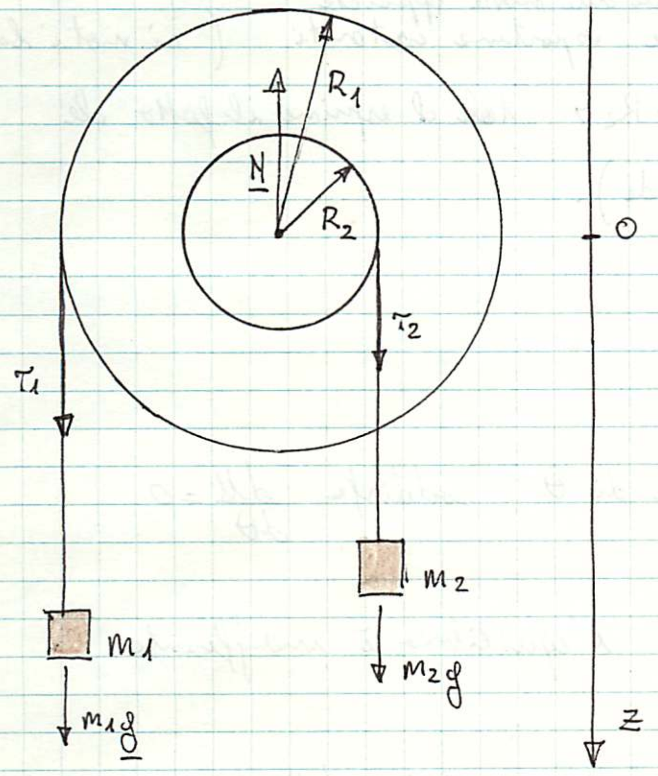


$$\frac{m_c g}{4kl} = 1$$



massimo: $\alpha = \arccos\left(\frac{m_c g}{4kl}\right)$

Due ruote coassiali di raggi R_1 ed R_2 rigidamente collegate fra loro sono vincolate a ruotare intorno al loro asse comune orizzontale. Attorno alle ruote sono avvolti due fili alle cui estremità libere pendono due masse m_1 ed m_2. Trascurando la massa dei fili, avvolti in versi opposti, trovare la relazione tra m_1 ed m_2 affinché il sistema sia in equilibrio e discuterne la stabilità.



Sulle ruote agiscono le tensioni dei fili $\underline{\tau}_1$ e $\underline{\tau}_2$ e la reazione vincolare $\underline{N}$ sull'asse di rotazione; poiché il momento di $\underline{N}$ rispetto all'asse di rotazione è nullo, all'equilibrio si ha

$\tau_1 R_1 - \tau_2 R_2 = 0$ e $N - \tau_1 - \tau_2 = 0$ ma

$\tau_1 = m_1 g$ $\tau_2 = m_2 g$ cioè

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{R_2}{R_1} \qquad N = (m_1 + m_2)\, g$$

Se $\frac{m_1}{m_2} = \frac{R_2}{R_1}$ tutte le posizioni della coppia di ruote sono

di equilibrio e l' equilibrio è indifferente.

Ciò può essere ricavato con il metodo dell'energia potenziale:

$$U(\theta) = -m_1 g (z_0 + R_1\theta) - m_2 g (z_0 - R_2\theta) = -m_1 g z_1 - m_2 g z_2$$

essendo θ l'angolo di rotazione delle ruote rispetto ad un raggio di riferimento e z_0 la quota delle due masse appaiate (si noti la differenza di segno $+R_1\theta$ e $-R_2\theta$ tale esprime il fatto che se una massa sale l'altra scende).

$$\frac{dU}{d\theta} = -m_1 g R_1 + m_2 g R_2 = 0$$

se $\frac{m_1}{m_2} = \frac{R_2}{R_1}$ ogni valore di θ soddisfa $\frac{dU}{d\theta} = 0$

poichè $\frac{dU}{d\theta}$ = costante l'equilibrio è indifferente

Se le corde avessero massa non trascurabile dette μ_1 e μ_2 le rispettive densità lineari di massa si avrebbe:

$$U(\theta) = -m_1 g (z_0 + R_1\theta) - \mu_1 g \frac{1}{2}(z_0 + R_1\theta)^2 - m_2 g (z_0 - R_2\theta) - \mu_2 g \frac{1}{2}(z_0 - R_2\theta)^2$$

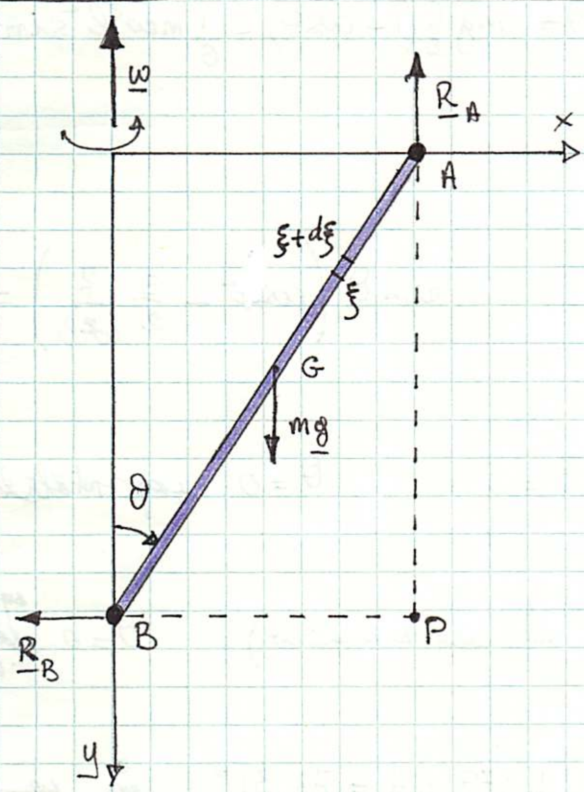
$$\frac{dU}{d\theta} = -m_1 g R_1 - \mu_1 z_1 g R_1 + m_2 g R_2 + \mu_2 z_2 g R_2$$

$$\frac{d^2U}{d\theta^2} = -\mu_1 g R_1^2 - \mu_2 g R_2^2 < 0$$

per $\frac{m_1}{m_2} = \frac{R_2}{R_1}$ si avrebbe equilibrio solo per $\mu_1 z_1 R_1 = \mu_2 z_2 R_2$

cioè $\frac{\mu_1 z_1}{\mu_2 z_2} = \frac{R_2}{R_1}$ e l'equilibrio sarebbe instabile

Gli estremi di una asta omogenea di massa $m = 1$ kg e lunghezza $l = 80$ cm sono vincolati a muoversi lungo due guide rettilinee lisce e ortogonali fra loro. Una guida si trova in posizione verticale e l'altra ruota attorno alla prima con velocità angolare costante $\omega = 8$ rad.s^{-1}. Si determini l'angolo θ che l'asta forma con la verticale e le reazioni dei vincoli all'equilibrio



Nel sistema di riferimento $x\,y$ solidale alle due guide le forze esterne agenti sull'asta sono la forza peso, le reazioni vincolari in A e B (ortogonali alle guide), la forza centrifuga $[\underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{r}')]$

All'equilibrio (ω = costante) la somma delle forze e il risultante dei momenti rispetto ad un punto qualsiasi devono annullarsi.
Scelto come polo P (così che le reazioni vincolari non contribuiscono) si ha

$$m\underline{g} + \underline{R}_A + \underline{R}_B + \hat{x}\int_0^l \omega^2 \xi \sin\theta \, \frac{d\xi}{l}\, m = 0$$

$$-mg\frac{l}{2}\sin\theta + \int_0^l \omega^2 \xi \sin\theta \, \frac{d\xi}{l}\, m \; \xi\cos\theta = 0$$

avendo proiettato i momenti sull'asse per P ortogonale ad xy

$$\begin{cases} -R_B + \omega^2 \frac{m}{l} \sin\theta \, \frac{1}{2} l^2 = 0 \\ -R_A + mg = 0 \\ -mg\frac{l}{2}\sin\theta + \omega^2 \frac{m}{l} \sin\theta\cos\theta \, \frac{1}{3} l^3 = 0 \end{cases}$$

$$-\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0 \qquad U(\theta) = mg\frac{l}{2}(1-\cos\theta) - \frac{1}{6} m\omega^2 l^2 \sin^2\theta$$

$$\sin\theta\cos\theta = \frac{3}{2}\frac{g}{\omega^2 l}\sin\theta \qquad \sin\theta\left(\cos\theta - \frac{3}{2}\frac{g}{\omega^2 l}\right) = 0$$

se $\frac{3}{2}\frac{g}{\omega^2 l} > 1$ $\quad \sin\theta = 0 \quad \theta = 0$ eq. STABILE

se $\frac{3}{2}\frac{g}{\omega^2 l} \leq 1$ (come nel caso numerico) $\quad \theta = 0$ eq. INSTABILE $\quad R_B = 0$

$R_A = mg = 9.8N$

$$\theta = \arccos\left(\frac{3}{2}\frac{g}{\omega^2 l}\right) = 1.279 \text{ rad} = 73.31°$$

eq. STABILE

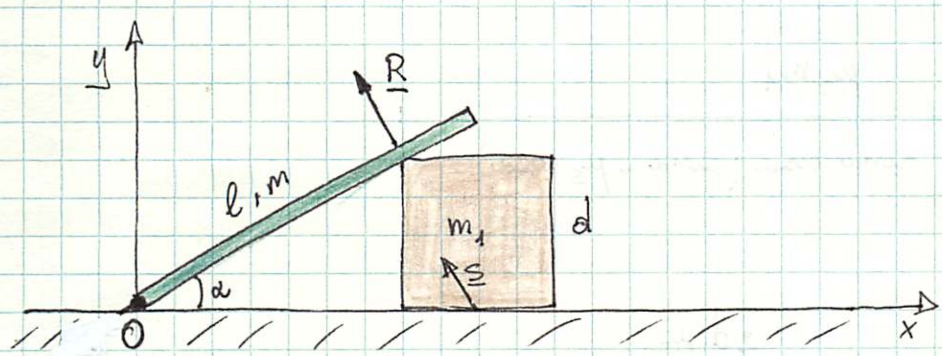
$R_A = mg = 9.80\ N$

$R_B = \frac{1}{2} m\omega^2 l \sin\theta = 24.52\ N$

Nota che momento forza peso = $\underline{PG} \times m\underline{g}$ ma

momento forza centrifuga $\neq$ $\underline{PG} \times$ forza centrifuga

Una tavola omogenea di massa m e lunghezza l è incernierata ad un estremo ad un asse orizzontale e appoggiata allo spigolo di un blocco cubico di lato $d = l/2$ e massa $m_1 = 1 \, Kg$
Il blocco poggia su un piano orizzontale con coefficiente di attrito statico $\mu_s = 0.2$ e tutti gli altri attriti sono trascurabili.
La tavola è inclinata di $\alpha = \frac{\pi}{4}$ rispetto all'orizzontale e la reazione $\underline{R}$ esercitata dal blocco è perpendicolare alla tavola. Si calcoli il valore m_{max} di m affinché la posizione sia di equilibrio.



Detta $\underline{S}$ la reazione vincolare offerta dal piano su m_1 si ha:

$$0 = R \sin\alpha + S_x$$

$$0 = -m_1 g + S_y - R \cos\alpha$$

per l'equilibrio della tavola, la somma dei momenti rispetto all'asse passante per O è nulla (essendo $\Sigma \underline{F} = 0$ il polo è arbitrario)

$$0 = mg \frac{l}{2} \cos\alpha - R \cdot \frac{d}{\sin\alpha}$$

$$R = \frac{mg\,l}{2d} \sin\alpha \cos\alpha$$

$$S_y = m_1 g + R\cos\alpha = m_1 g + mg \frac{l}{2d} \sin\alpha \cos^2\alpha$$

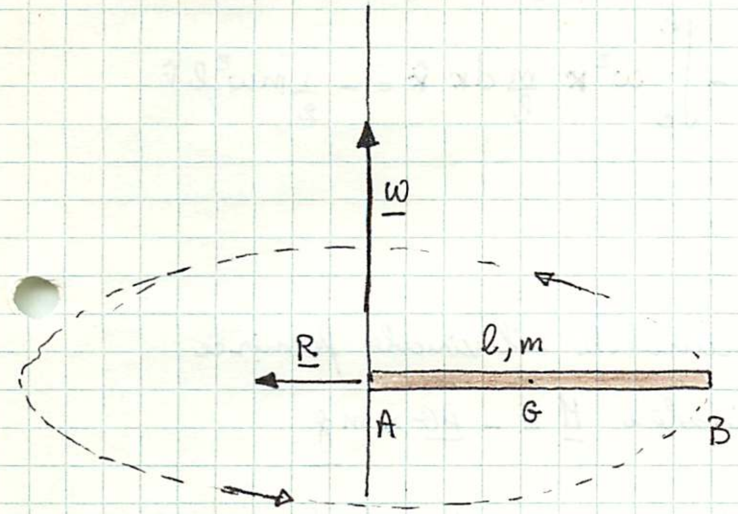
$$S_x = -R\sin\alpha \qquad\qquad |S_x| \leq \mu_s |S_y|$$

$$mg \frac{l}{2d} \sin^2\alpha \cos\alpha \leq \mu_s m_1 g + \mu_s mg \frac{l}{2d} \sin\alpha \cos^2\alpha$$

$$m \leq \frac{\mu_s m_1}{\frac{l}{2d} \sin\alpha \cos\alpha (\sin\alpha - \mu_s \cos\alpha)}$$

$$m_{max} = m_1 \frac{2d\,\mu_s}{l \sin\alpha \cos\alpha \left(\sin\alpha - \mu_s \cos\alpha\right)} = 0.707 \text{ Kg}$$

Una sbarra AB omogenea di lunghezza l e massa m vincolata a ruotare attorno ad un asse ad essa perpendicolare passante per A, ruota con velocità angolare costante ω. Calcolare la quantità di moto del sistema e la reazione vincolare in A trascurando il peso della sbarra.



$$\underline{P} = \int \underline{v}\, dm = m\, \underline{v}_G \qquad G = \text{centro di massa}$$

G è a metà tra A e B (sbarra omogenea) e descrive una traiettoria circolare di raggio $\frac{l}{2}$ a velocità angolare costante ω:

$$\underline{v}_G = \underline{\omega} \times \underline{AG} \qquad |\underline{v}_G| = \omega \frac{l}{2}$$

$$\underline{P} = m\, \underline{\omega} \times \underline{AG}$$

$$\underline{F}_{esterne} = \underline{R} = \frac{d}{dt}\underline{P} = m \cancel{\frac{d\underline{\omega}}{dt} \times \underline{AG}} + m\, \underline{\omega} \times \frac{d\underline{AG}}{dt} =$$

$$= m\, \underline{\omega} \times \underline{v}_G = m\, \underline{\omega} \times (\underline{\omega} \times \underline{AG})$$

$$\underline{A} \times (\underline{B} \times \underline{C}) = (\underline{A} \cdot \underline{C})\, \underline{B} - (\underline{A} \cdot \underline{B})\, \underline{C}$$

$$\underline{R} = -m\omega^2 \underline{AG} \qquad |\underline{R}| = m\omega^2 \frac{l}{2}$$

si noti che $\underline{R}$ = – risultante forze centrifughe =

$$= -\int \omega^2 \underline{r}\, dm = -\int_0^l \omega^2 x \frac{m}{l} dx\, \hat{x} = -\frac{1}{2} m\omega^2 l\, \hat{v}$$

Se il peso della sbarra non è trascurabile il vincolo fornisce oltre ad $\underline{R} = -m\omega^2\underline{AG} - m\underline{g}$ un momento vincolare $\underline{M} = -\underline{AG} \times m\underline{g}$

supponendo che il vincolo sia realizzato mediante un albero rotante su due cuscinetti a distanza $\frac{d}{2}$ da A il momento vincolare corrisponde a due forze $\underline{R}_1$ ed $\underline{R}_2$ come in figura

$$\text{con } |\underline{R}_1| = |\underline{R}_2| = \frac{1}{2} \frac{|M|}{d/2} = \frac{1}{2} \frac{l}{d} mg$$