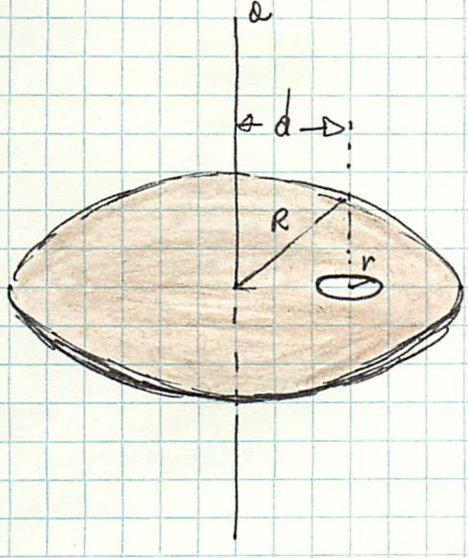
DINAMICA

DEI

SISTEMI RIGIDI

Calcolare il momento di inerzia di un disco di raggio R avente un foro di raggio r a distanza d dal centro rispetto all'asse passante per il centro e perpendicolare al disco. Il disco abbia densità di massa $\mu = \frac{m}{\pi R^2}$ costante



il momento di inerzia del disco senza il buco è

$$I_1 = \int_0^R \mu\, 2\pi x\, dx\, x^2 = \frac{2\pi\mu}{4} R^4 = \frac{1}{2} m R^2$$

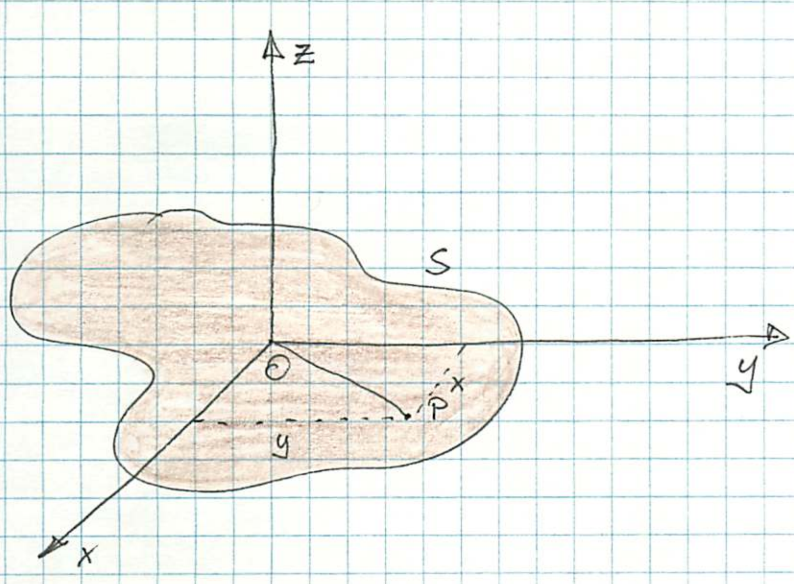
Il momento di inerzia di un disco di raggio r per l'asse a vale

$$I_2 = \frac{1}{2}\, m \frac{r^2}{R^2}\, r^2 + m\frac{r^2}{R^2}\, d^2$$

Poiché $I_1 = I + I_2$ dove I è il momento d'inerzia cercato

$$I = \frac{1}{2} m R^2 - \frac{1}{2} m \frac{r^4}{R^2} - m\frac{r^2 d^2}{R^2} = \frac{1}{2} m\, \frac{R^4 - r^4 - 2r^2 d^2}{R^2}$$

Data una distribuzione di masse giacenti in un piano si scelgono tre assi cartesiani ortogonali con x e y giacenti nel piano della distribuzione. Si dimostri che il momento di inerzia rispetto all'asse z è la somma dei momenti d'inerzia rispetto ad x ed y.



Un generico punto P della distribuzione ha coordinate $P \equiv (x, y, 0)$

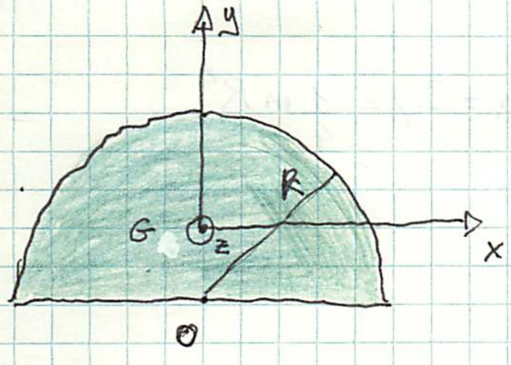
$$I_x = \int y^2 \, dm = \int_S y^2 \frac{dm}{dS} \, dS$$

$$I_y = \int x^2 \, dm = \int_S x^2 \frac{dm}{dS} \, dS$$

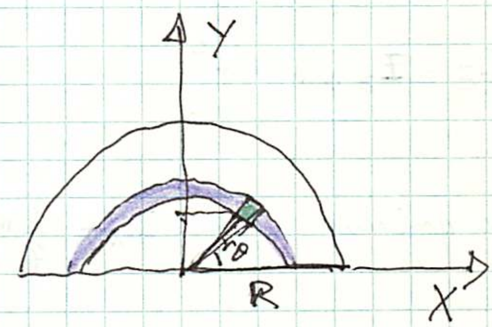
$$I_z = \int (x^2 + y^2) \, dm = \int_S (x^2 + y^2) \frac{dm}{dS} \, dS$$

$$I_z = I_x + I_y$$

Una lamina omogenea di massa m ha forma di semicerchio di raggio r. Calcolare i momenti di inerzia rispetto agli assi x y z passanti per il baricentro G ed orientati come in figura.



la distanza OG è $\frac{4}{3\pi} r$ infatti il baricentro giace sulla retta Y per simmetria ed ha coordinate Y_G dato da

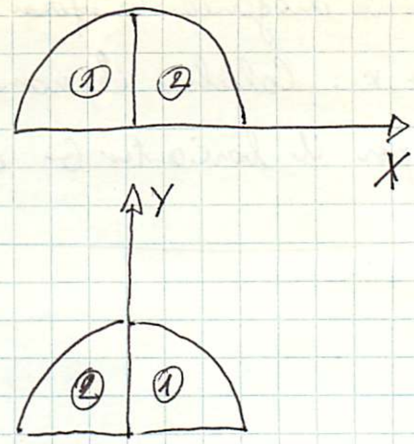


$$m Y_G = \int_0^R \int_0^\pi \frac{m}{\frac{1}{2}\pi R^2} r\,d\theta\,dr \cdot r\sin\theta = \frac{2m}{\pi R^2}\,\frac{1}{3}R^3 \cos\theta\Big|_\pi^0 = \frac{4}{3\pi} R m$$

Calcoliamo i momenti di inerzia rispetto agli assi X Y e Z

$$I_Z = \int_0^R \frac{m}{\frac{1}{2}\pi R^2}\,\pi r\,dr \cdot r^2 = \frac{2m}{R^2}\,\frac{1}{4}R^4 = \frac{1}{2} m R^2$$

$I_X = I_Y$ per simmetria



poiché $I_Z = I_X + I_Y = 2 I_X$ $\qquad I_X = I_Y = \frac{1}{4} m R^2$

Dal teorema di Huygens

$$I_X = I_x + m\, OG^2$$

$$I_Y = I_y$$

$$I_Z = I_z + m\, OG^2$$

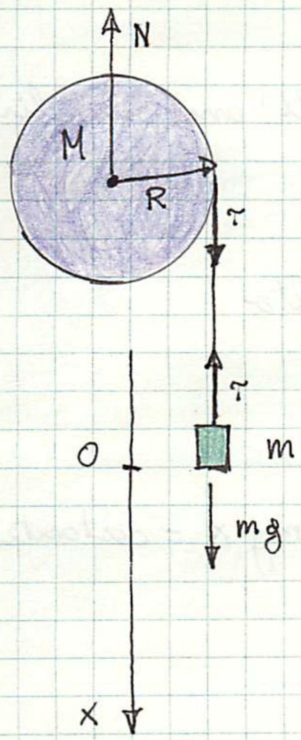
e quindi $\qquad I_x = \frac{1}{4} m R^2 - m \left(\frac{4}{3\pi}\right)^2 R^2$

$$I_y = \frac{1}{4} m R^2$$

$$I_z = \frac{1}{2} m R^2 - m \left(\frac{4}{3\pi}\right)^2 R^2$$

Un cilindro di massa $M = 12$ Kg omogeneo, può ruotare senza attrito attorno al suo asse disposto orizzontalmente. Attorno al cilindro è avvolto un filo inestensibile di massa trascurabile collegato ad un corpo di massa $m = 2$ Kg. Inizialmente il sistema è in quiete. Si trovi la accelerazione con cui scende il corpo, la tensione del filo, la lunghezza del pezzo srotolato dopo 10 secondi e la sollecitazione sull'asse del cilindro

---



Poiché il filo è di massa trascurabile la tensione τ non varia lungo il filo.

L'eq. del moto per il corpo appeso è:

$$m\ddot{x} = mg - \tau$$

L'eq del moto per il cilindro è:

$$I\ddot{\theta} = \tau R$$

dove R è il raggio del cilindro e $I = \frac{1}{2}MR^2$ è il momento d'inerzia rispetto all'asse centrale di rotazione.

Poiché il filo è inestensibile si ha: $\ddot{\theta} = \frac{\ddot{x}}{R}$

$$\begin{cases} m\ddot{x} = mg - \tau \\ \frac{1}{2}MR^2 \frac{\ddot{x}}{R} = \tau R \end{cases} \qquad \begin{cases} \ddot{x} + \frac{\tau}{m} = g \\ \ddot{x} = \frac{2}{M}\tau \end{cases}$$

$$\left(\frac{2}{M} + \frac{1}{m}\right)\tau = g \qquad \tau = \frac{mM}{2m+M}\, g = 14.7 \text{ N}$$

$$\ddot{x} = \frac{2m}{2m+M} g = \frac{1}{1+\frac{M}{2m}} g = 2.45 \ ms^{-2}$$

$$x(t) = \frac{1}{2} \ddot{x} t^2 = \frac{g}{1+\frac{M}{2m}} \frac{t^2}{2}$$

$$x(10) = 122.5 \ m$$

Detto N la reazione vincolare che si esplica sull'asse del cilindro si ha:

$N = Mg + \tau = 132.3 \ N$ diretta verso l'alto

Metodo dell'energia: $\frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - mgx = \text{costante} = 0$

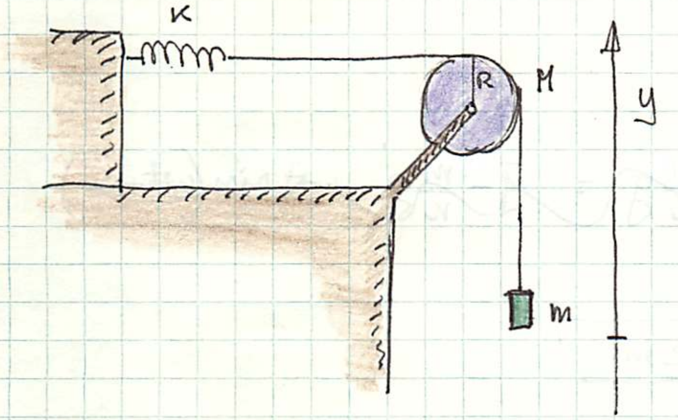
$\dot{x} = R\dot{\theta}$

derivando rispetto al tempo

$$\frac{1}{4} MR^2 \frac{1}{R^2} 2\dot{x}\ddot{x} + \frac{1}{2} m 2\dot{x}\ddot{x} - mg\dot{x} = 0$$

$$\dot{x}\left[\left(\frac{1}{2}M + m\right)\ddot{x} - mg\right] = 0 \qquad \ddot{x} = \frac{g}{1+\frac{M}{2m}}$$

Nel sistema descritto in figura la molla ha costante elastica k e lunghezza di riposo nulla, la carrucola ha massa M e raggio R il filo è inestensibile e di massa trascurabile il peso attaccato al filo ha massa m. Determinare il periodo delle oscillazioni di m.



sia $y(t)$ la quota di m all'istante t

sia $\bar{y}$ la quota di m quando la molla è non allungata

$$E = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} k (y - \bar{y})^2 + \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + mgy$$

$\dot{\theta}$ = velocità angolare della carrucola $= \frac{\dot{y}}{R}$

$$I = \frac{1}{2} M R^2$$

$$E = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} \frac{M}{2} M \dot{y}^2 + \frac{1}{2} k (y - \bar{y})^2 + mgy = \text{costante}$$

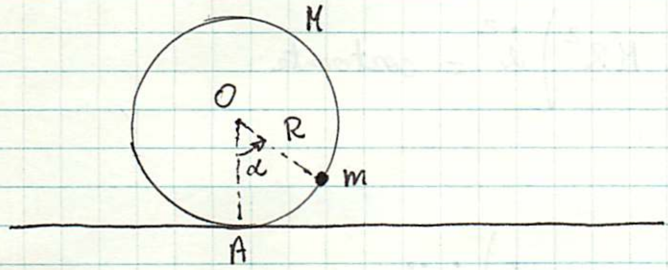
$$\dot{E} = 0 = \left[\left(m + \frac{M}{2} \right) \ddot{y} + k (y - \bar{y}) + mg \right] \dot{y}$$

$$\ddot{y} + \frac{2k}{M+2m}(y-\bar{y}) = -\frac{2m}{M+2m}\, g$$

$$\omega \equiv \sqrt{\frac{2k}{M+2m}}$$

$$\text{periodo} = T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{M+2m}{2k}}$$

Si abbia un anello di massa $M = 100\,g$ e raggio $R = 50\,cm$ che rotola senza attrito lungo una retta. Una pallina di massa $m = 10\,g$ è fissata ad un punto della circonferenza. Determinare il periodo delle piccole oscillazioni del sistema intorno alla posizione di equilibrio stabile.



Detto α l'angolo formato dal raggio che congiunge O con m con il raggio di riferimento OA, la posizione di equilibrio può essere trovata come il minimo dell'energia potenziale (campo conservativo):

$$U(\alpha) = mgR(1-\cos\alpha) + \text{costante}$$

$$\frac{dU}{d\alpha} = 0 \Rightarrow mgR\sin\alpha = 0 \qquad \alpha_1 = 0 \qquad \alpha_2 = \pi$$

$$\frac{d^2U}{d\alpha^2} = mgR\cos\alpha \qquad \frac{d^2U}{d\alpha^2}(\alpha_1) > 0 \qquad \alpha_1 = \text{posiz. eq. stabile}$$

$$\frac{d^2U}{d\alpha^2}(\alpha_2) < 0 \qquad \alpha_2 = \text{posiz. eq. instabile}$$

L'equazione del moto del sistema può essere ricavata con il metodo di conservazione dell'energia:

$$mgR(1-\cos\alpha) + \frac{1}{2} I_A \dot{\alpha}^2 = \text{costante}$$

I_A è il momento d'inerzia del sistema rispetto all'asse istantaneo di rotazione passante per A:

$$I_A = m\left(2R\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2 + \underbrace{MR^2 + MR^2}_{\text{teorema di Steiner}}$$

$$= 4mR^2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 2MR^2$$

$$mgR(1-\cos\alpha) + \left(2mR^2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + MR^2\right)\dot{\alpha}^2 = \text{costante}$$

derivando rispetto al tempo:

$$0 = mgR\sin\alpha\,\dot{\alpha} + 2\left(2mR^2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + MR^2\right)\dot{\alpha}\ddot{\alpha} +$$

$$+\dot{\alpha}^2\, 2mR^2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\dot{\alpha} =$$

$$= \dot{\alpha}\left[\ddot{\alpha}\left(2MR^2 + 4mR^2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) + mgR\sin\alpha + 2mR^2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\dot{\alpha}^2\right]$$

Nel caso di piccole oscillazioni intorno ad $\alpha_1 = 0$ si ottiene

$$\ddot{\alpha}\,2MR^2 + mgR\,\alpha = 0$$

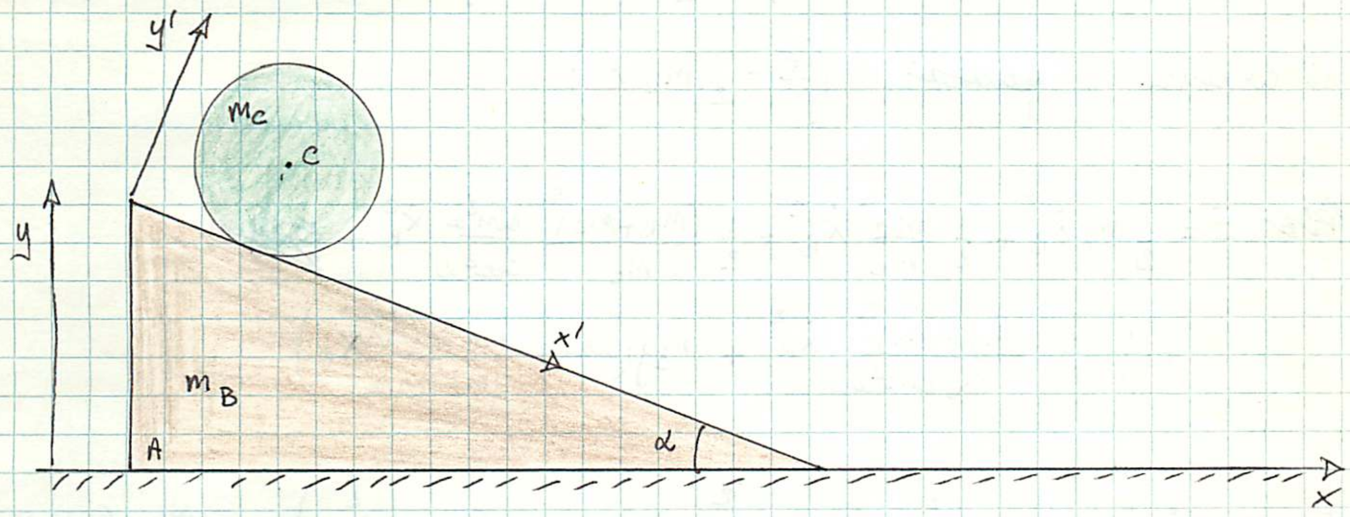
$$\ddot{\alpha} + \frac{mg}{2MR}\alpha = 0$$

il periodo delle piccole oscillazioni è:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2MR}{mg}} = 6.28\ \text{s}$$

Un cilindro omogeneo di massa $m_c = 1\,Kg$, rotola senza strisciare lungo un piano inclinato di un angolo $\alpha = \frac{\pi}{6}$ rispetto all'orizzontale. Il piano inclinato è costituito da un blocco di massa $m_B = 10\,Kg$ che può scorrere su un piano orizzontale liscio. Si determini il modulo a_B dell'accelerazione del blocco considerando trascurabile l'attrito volvente

---



siano x_c' e y_c' le coordinate del centro di massa del cilindro c nel sistema di rif. non inerziale $x'y'$ ed $x_B\ y_B$ quelle del piano inclinato in xy.

$$\begin{cases} x_c = x_B + x_c' \cos\alpha \\ y_c = \underset{R/\cos\alpha}{\overset{\shortparallel}{cost}} - x_c' \sin\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_c = \dot{x}_B + \dot{x}_c' \cos\alpha \\ \dot{y}_c = -\dot{x}_c' \sin\alpha \end{cases}$$

sul sistema non agiscono forze esterne lungo x quindi

$$m_B \dot{x}_B + m_c \dot{x}_c = 0 \longrightarrow (m_B + m_c)\dot{x}_B + m_c \cos\alpha\, \dot{x}_c' = 0$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} \dot{x}_c = -\dfrac{m_B}{m_c}\dot{x}_B \\ \dot{y}_c = \dfrac{m_B + m_c}{m_c}\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\dot{x}_B \end{cases} \qquad \dot{x}_c' = -\dfrac{m_B + m_c}{m_c \cos\alpha}\dot{x}_B$$

poichè il cilindro rotola senza strisciare la sua velocità angolare è

$$\dot\theta = \frac{\dot x_c'}{r} = -\frac{m_B+m_c}{m_c\cos\alpha}\frac{\dot x_B}{r}$$

L'energia del sistema

$$E = \frac{1}{2}m_B\dot x_B^2 + \frac{1}{2}m_c\left(\dot x_c^2+\dot y_c^2\right) + \frac{1}{2}I\dot\theta^2 + mg\,y_c$$

si conserva $\left(I = \frac{1}{2}m_c r^2\right)$

$$E = \frac{1}{2}m_B\dot x_B^2 + \frac{1}{2}\frac{m_B^2}{m_c}\dot x_B^2 + \frac{1}{2}\frac{(m_B+m_c)^2}{m_c}\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\dot x_B^2 + $$
$$+\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{(m_B+m_c)^2}{m_c\cos^2\alpha}\dot x_B^2 + m_c g\left(\cos t + \frac{m_B+m_c}{m_c\cos\alpha}\sin\alpha\, x_B\right)$$

$$\dot E = 0 = \dot x_B\left\{\left(m_B+\frac{m_B^2}{m_c}+\frac{(m_B+m_c)^2}{m_c}\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{2}\frac{(m_B+m_c)^2}{m_c\cos^2\alpha}\right)\ddot x_B + \sin\alpha\frac{m_c g(m_B+m_c)}{m_c\cos\alpha}\right\}$$

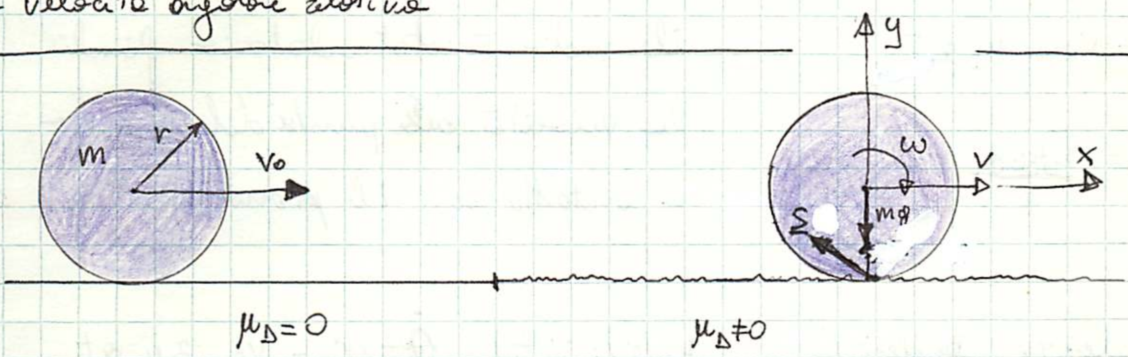
$$\ddot x_B = -\frac{m_c g(m_B+m_c)\sin\alpha\cdot 2m_c\cos^2\alpha/(m_c\cos\alpha)}{(m_B+m_c)^2+2(m_B+m_c)^2\sin^2\alpha+2m_B(m_B+m_c)\cos^2\alpha} =$$

$$= -\frac{2m_c g\sin\alpha\cos\alpha}{m_B+m_c+2(m_B+m_c)\sin^2\alpha+2m_B\cos^2\alpha} =$$

$$= -\frac{2m_c\sin\alpha\cos\alpha}{3m_B+m_c\left(1+2\sin^2\alpha\right)}\,g$$

$$a_B = \frac{2m_c\sin\alpha\cos\alpha}{3m_B+m_c(1+2\sin^2\alpha)}\,g = 0.27\ \mathrm{m\,s^{-2}}$$

Un cilindro omogeneo di massa m e raggio $r = 10$ cm in moto traslatorio con velocità $v_0 = 1 ms^{-1}$ diretta normalmente al suo asse centrale, viene a contatto con una superficie orizzontale scabra parallela a v_0. Si determini il moto del cilindro nel caso che l'attrito volvente sia nullo ed il coefficiente di attrito dinamico sia $\mu_D = 0.2$. Determinare l'istante di tempo t^* di inizio del rotolamento puro e la velocità angolare relativa



pintantoche il cilindro sta nel piano liscio si muove di moto traslatorio uniforme a velocità v_0. quando entra nel piano scabro la forza di attrito lo rallenta e fa iniziare il rotolamento.
Da un certo istante t^* in poi il moto diventa puramente rotatorio con velocità angolare costante.

Sia $\underline{a}(t)$ l'accelerazione del c.m. del cilindro al tempo $t < t^*$ e si consideri $t=0$ l'istante in cui il cilindro entra nel piano scabro

$$m\,\underline{a} = m\underline{g} + \underline{S} \qquad \begin{cases} m\ddot{x} = S_x \\ 0 = -mg + S_y \end{cases} \qquad S_x = -\mu_D S_y$$

$$S_y = mg \qquad \ddot{x} = -\mu_D g < 0$$

scelto inoltre l'asse del cilindro come asse di proiezione della seconda eq. cardinale:

$$I\ddot{\theta} = |S_x| r = \mu_D m g r \qquad \text{con } I = \frac{1}{2} m r^2$$

$$\ddot{\theta} = \frac{2\mu_D g}{r} > 0$$

usando le condizioni iniziali $V(0) = v_0$ $\dot{\theta}(0) = 0$ si ha

$$v(t) = v_0 - \mu_D g t$$

$$\dot{\theta}(t) = \frac{2\mu_D g}{r} t$$

il moto è rototraslatorio finchè la velocità dei punti del cilindro a contatto con il piano è diversa da zero.

tale velocità periferica è $v_p(t) = v(t) - \dot{\theta}(t) r = v_0 - 3\mu_D g t$

l'istante di tempo in cui il moto diventa di puro rotolamento è

$$t^* = \frac{v_0}{3\mu_D g} = 0.17 \text{ s}$$

per $t > t^*$ la velocità angolare di rotolamento è costante e vale

$$\dot{\theta} = \frac{2\mu_D g}{r} \frac{v_0}{3\mu_D g} = \frac{2}{3}\frac{v_0}{r} = 6.667 \text{ rad/s}^{-1}$$

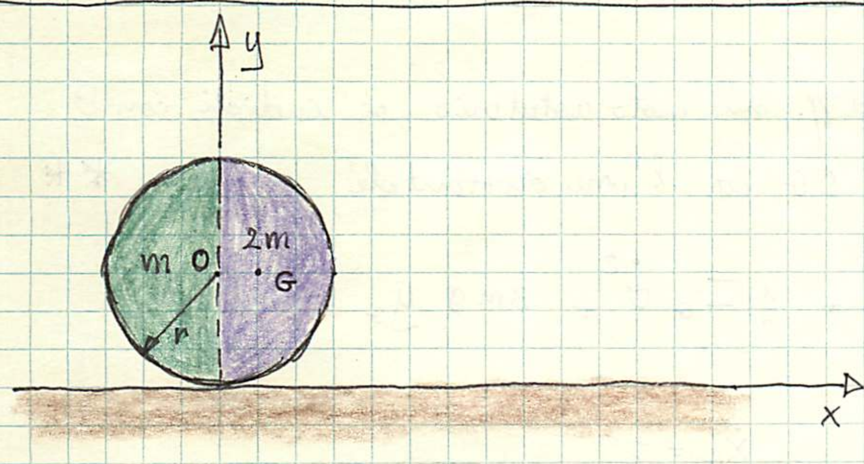
quella del c.m. vale $v(t^*) = \frac{2}{3} v_0$

Si noti che la velocità angolare nel moto di puro rotolamento può essere ottenuta immediatamente dalla conservazione del momento della quantità di moto rispetto all'asse di istantanea rotazione (asse di contatto con il piano dove $\sum M = 0$)

$$\underbrace{m v_0 r}_{\text{puro strisciamento}} = \underbrace{I'\dot{\theta}}_{\text{puro rotolamento}} = I\dot{\theta} + m(\dot{\theta} r) r = \frac{3}{2} m r^2 \dot{\theta}$$

$$\dot{\theta} = \frac{2}{3}\frac{v_0}{r}$$

Un disco sottile di raggio r e massa 3 m formato da due semidischi omogenei di masse m e 2m poggia su un piano orizzontale privo di attrito. Inizialmente il baricentro si trova ad altezza r rispetto al piano di appoggio.
Determinare la traiettoria del baricentro, l'equazione differenziale del moto rotatorio (dopo aver determinato la posizione dell'asse istantaneo di rotazione), l'accelerazione angolare iniziale, la reazione vincolare all'istante iniziale.



Il baricentro giace sull'asse perpendicolare al diametro di separazione dei due semidischi ad una distanza δ dal centro pari a:

$$3m \cdot \delta = \int_0^r \int_0^\pi \frac{2m}{\frac{1}{2}\pi r^2} x\, d\vartheta\, dx \cdot x \sin\vartheta - \int_0^r \int_0^\pi \frac{m}{\frac{1}{2}\pi r^2} x\, d\vartheta\, dx \cdot x \sin\vartheta$$

$$= \frac{4m}{\pi r^2} \frac{1}{3} r^3 \cdot 2 - \frac{2m}{\pi r^2} \frac{1}{3} r^3 \cdot 2 = \frac{4}{3} \frac{m}{\pi} r$$

$$\delta = \frac{4}{9\pi} r$$

All' istante iniziale il centro di massa G sia a destra di O alla quota r cioè abbia coordinate x y $\quad x_G(0) = \delta \quad y_G(0) = r$

②

L'eq. del moto per G è: $3m\,\underline{a}_G = 3m\,\underline{g} + \underline{N}$

essendo $\underline{N}$ la reazione vincolare del piano (normale a x)

$$\begin{cases} 3m\,\ddot{x}_G = 0 \\ 3m\,\ddot{y}_G = N - 3mg \end{cases}$$

$x_G(t) = x_G(0) =$ costante la traiettoria del baricentro è dunque la retta $x_G = \delta$

Per determinare l'eq. diff. del moto rotatorio si indichi con θ l'angolo formato da OG con l'asse orizzontale si ha: **

$$E = \frac{1}{2}\,3m\left(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2\right) + \frac{1}{2} I_G\,\dot{\theta}^2 + 3mg\,y_G = \text{costante}$$

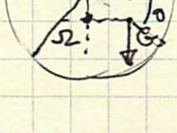
$$\begin{cases} x_G = \delta & \dot{x}_G = 0 \\ y_G = r - \delta\sin\theta = r - \overline{OG}\sin\theta & \dot{y}_G = -\delta\cos\theta\,\dot{\theta} \end{cases}$$

$$I_G = I_O - 3m\delta^2$$

$$I_O = \int_0^r\int_0^\pi \frac{2m}{\frac{1}{2}\pi r^2}\,x\,d\theta\,dx\,x^2 + \int_0^r\int_0^\pi \frac{m}{\frac{1}{2}\pi r^2}\,x\,d\theta\,dx\,x^2 =$$

$$= \frac{4m}{r^2}\,\frac{1}{4}r^4 + \frac{2m}{r^2}\,\frac{1}{4}r^4 = \frac{3}{2}mr^2$$

** Si noti che $\frac{1}{2}\,3m\left(\dot{x}_G^2 + \dot{y}_G^2\right) + \frac{1}{2} I_G\,\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} I_\Omega\,\dot{\theta}^2$ essendo Ω il centro di rotazione istantaneo dato dalle intersezioni delle perpendicolari alle velocità di O ($\dot{y}_O = 0$) e G ($\dot{x}_G = 0$)



$\underline{v}_O = \underline{\omega} \times \Omega O$ $\underline{v}_G = \underline{\omega} \times \Omega G$

$$E = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2\left[3m\delta^2\cos^2\theta + \frac{3}{2}mr^2 - 3m\delta^2\right] + 3mg\left(r - \delta\sin\theta\right)$$

$$= \frac{1}{2}\dot{\theta}^2\left[\frac{3}{2}mr^2 - 3m\delta^2\sin^2\theta\right] + 3mg\left(r - \delta\sin\theta\right) = \text{cost.}$$

$$\dot{E} = 0 = \dot{\theta}\left\{\ddot{\theta}\left(\frac{3}{2}mr^2 - 3m\delta^2\sin^2\theta\right) - 3mg\delta\cos\theta - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\dot{\theta}\, 3m\delta^2\, 2\sin\theta\cos\theta\,\dot{\theta}\right\}$$

$$\ddot{\theta}\left(\frac{1}{2}r^2 - \delta^2\sin^2\theta\right) - \delta^2\sin\theta\cos\theta\,\dot{\theta}^2 - g\delta\cos\theta = 0$$

all'istante iniziale $\theta(0) = 0 \quad \dot{\theta}(0) = 0$

$$\ddot{\theta}(0) = \frac{2g\delta}{r^2} = \frac{8g}{9\pi r}$$

poichè $\ddot{y}_G = -\delta\cos\theta\,\ddot{\theta} + \delta\sin\theta\,\dot{\theta}^2$

$$\ddot{y}_G(0) = -\delta\,\ddot{\theta}(0) = -\frac{8}{9\pi}g\frac{\delta}{r}$$

$$3m\ddot{y}_G(0) = N(0) - 3mg$$

la reazione vincolare all'istante iniz. è:

$$N(0) = 3mg - \frac{8}{9\pi}\frac{\delta}{r}3mg = 3mg\left(1 - \frac{8}{9\pi}\frac{\delta}{r}\right) =$$

$$= 3mg\left(1 - \frac{8}{9\pi}\frac{4}{9\pi}\right) = 3mg\left(1 - \frac{32}{81\cdot\pi^2}\right)$$

$$I\,\ddot{\theta}(t) = M(\theta(t))$$

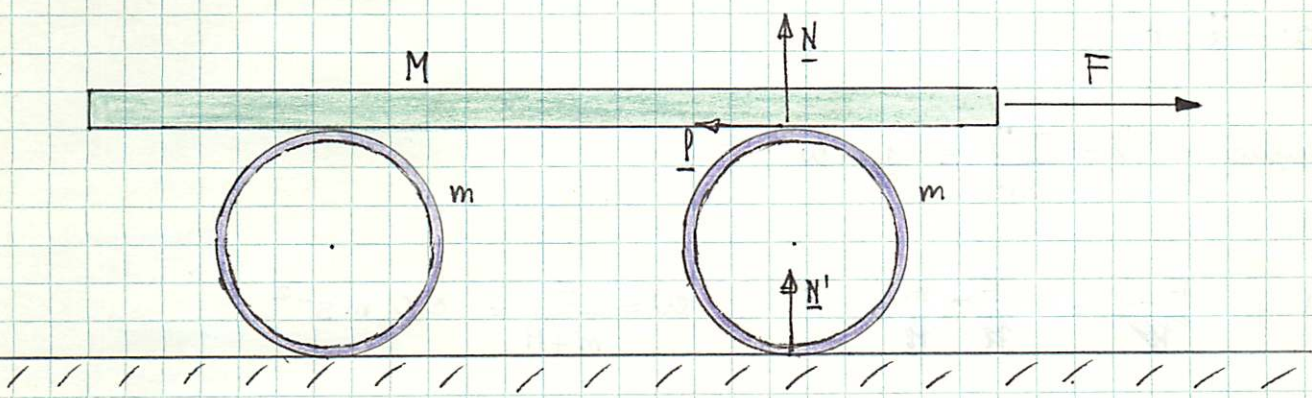
$$I\,\ddot{\theta}\,\dot{\theta} = M\,\dot{\theta} \qquad \frac{1}{2} I \frac{d}{dt}\left(\dot{\theta}^2\right) = M\,\dot{\theta}$$

$$\int_0^t dt' \, \frac{1}{2} I \frac{d}{dt}\left(\dot{\theta}^2\right) = \int_0^t dt' \, M\,\dot{\theta} = \int_0^{\theta(t)} d\theta' \, M$$

$$\frac{1}{2} I \dot{\theta}^2(t) - \frac{1}{2} I \dot{\theta}(0)^2 = L_{0\to\theta} = -\left[\mathcal{U}(\theta) - \mathcal{U}(0)\right]$$

$$\frac{1}{2} I \dot{\theta}(t)^2 + \mathcal{U}(\theta(t)) = \text{costante} \qquad -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \theta} = M$$

Una tavola di massa $M = 20$ Kg poggia su due cilindri cavi identici di massa $m = 5{,}0$ Kg ciascuno e omogenei, disposti con gli assi paralleli su di un piano orizzontale: il sistema è inizialmente in quiete. Si determinino l'accelerazione a della tavola e le forze di attrito f tra tavola e cilindri e f' tra cilindri e piano orizzontale qualora venga applicata alla tavola una forza orizzontale $F = 200$ N e nella ipotesi che i cilindri rotolino senza strisciare.



Sulla tavola agiscono la forza peso $M\underline{g}$ la forza $\underline{F}$ e le reazioni vincolari dei due cilindri $\underline{R} + \underline{R} = 2\underline{R}$ identiche, decomponibili in una componente normale $\underline{N}$ ed una orizzontale $\underline{f}$ opposta ad $\underline{F}$: $\underline{R} = \underline{N} + \underline{f}$

L'eq. del moto per la tavola $M\underline{g} + \underline{F} + 2\underline{N} + 2\underline{f} = M\underline{a}$

proiettata sull'asse orizzontale fornisce

$$F - 2f = Ma$$

Ciascun cilindro è soggetto alla forza peso $m\underline{g}$, alla reazione vincolare della tavola $-\underline{R} = -\underline{N} - \underline{f}$ e quella del piano $\underline{R}' = \underline{N}' + \underline{f}'$ con $\underline{N}'$ normale al piano ed $\underline{f}'$ orizzontale.

Il momento di queste forze rispetto all'asse istantaneo di contatto del cilindro con il piano dà:

$$f\,2r = I\,\ddot{\alpha}$$

dove r è il raggio del cilindro e I il momento di inerzia rispetto all'asse citato: $I = I_0 + mr^2 = 2mr^2$

Poiché i cilindri rotolano senza strisciare l'accelerazione angolare $\ddot{\alpha}$ è:

$$a = \ddot{\alpha}\,2r$$

Segue $$f = \frac{I\ddot{\alpha}}{2r} = \frac{1}{2}ma$$

$$Ma = F - 2f = F - ma \qquad a = \frac{F}{m+M} = 8.0\ \mathrm{m\,s^{-2}}$$

$$f = \frac{F}{2}\,\frac{m}{m+M} = 20\ \mathrm{N}$$

Per ricavare f' si scrive il momento delle forze applicate ai cilindri per l'asse centrale:

$$fr \pm f'r = I_0\,\ddot{\alpha} \qquad I_0 = mr^2$$

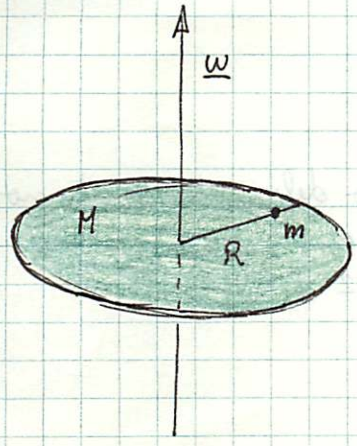
poiché è ancora $\ddot{\alpha} = \frac{a}{2r}$

$$f' = \pm\left(mr^2\frac{a}{2r^2} - f\right) = \pm\left(\frac{1}{2}ma - f\right) = 0$$

oppure dalla 1ª eq. della dinamica per il sistema:

$$F \pm f' = (m+M)\,a = F \Rightarrow f' = 0$$

Un disco di raggio R e massa M ruota con velocità angolare costante ω intorno all'asse verticale passante per il centro; un insetto partendo dal bordo del disco si muove con velocità costante lungo un raggio del disco verso il centro. Si calcoli il lavoro compiuto dall'insetto e quello compiuto dal sistema di mantenere il disco a velocità costante nello spostamento dell'insetto dal bordo al centro.



Il momento della quantità di moto del disco rispetto all'asse di rotazione è $\underline{l}_d = I\,\underline{\omega}$ costante

dove I = momento d'inerzia $= \frac{1}{2} M R^2$

quello dell'insetto è $\underline{l}_i = m\underline{\omega}\, r(t)^2$ variabile nel tempo

essendo $r(t)$ la distanza dell'insetto dal centro del disco.

Il momento applicato al disco è pertanto:

$$\underline{M} = \frac{d}{dt}\left(\underline{l}_d + \underline{l}_i\right) = m\underline{\omega}\frac{d}{dt}\, r(t)^2$$

Tale momento compie un lavoro

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \underline{M} \cdot \underline{\omega} \, dt = \int_{t_1}^{t_2} m\omega^2 \frac{d}{dt} r(t)^2 \, dt = \int_R^0 m\omega^2 \, d r^2 =$$

$$= - m\omega^2 R^2 < 0$$

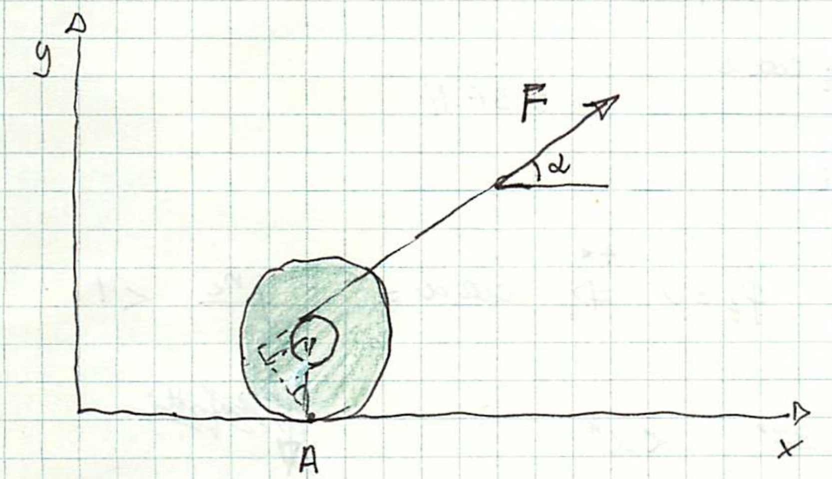
tale lavoro è negativo infatti il momento di inerzia del sistema disco + insetto diminuisce quando l'insetto si muove dalla periferia al centro.

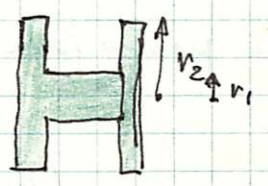
Il lavoro compiuto dall'insetto = - lavoro del sistema esterno =

$= m\omega^2 R^2$

Si consideri il rocchetto in figura di massa $m = 100$ g, raggi $r_1 = 1$ cm $r_2 = 4$ cm e momento di inerzia $I = 500$ g cm^2 rispetto all'asse centrale. Sul cilindro interno è avvolto un filo ideale teso da una forza $F = 1$ N costante inclinata di $\alpha = 30°$ rispetto al piano di appoggio orizzontale. Supponendo che il rocchetto rotoli senza strisciare si determini l'equazione del moto e le reazioni vincolari. Si determini inoltre il valore di α affinché il rocchetto rotoli senza strisciare su un piano liscio

---





il momento della forza F rispetto all'asse per A è

$$M_A = F\left(r_1 + r_2 \cos\alpha\right)$$

$$M_A = I_A \ddot{\theta} \qquad I_A = I + m r_2^2$$

$\dot{\theta} = \dfrac{\dot{x}}{r_2}$ dove $\dot{x}$ è la velocità del baricentro

Il momento rispetto ad A della forza peso e della reazione vincolare è nullo.

$$\ddot{x} = \frac{F\left(\frac{r_1}{r_2} + \cos\alpha\right)}{\left(m + \frac{I}{r_2^2}\right)} \qquad \ddot{y} = 0$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F\cos\alpha + \phi_t \\ m\ddot{y} = -mg + F\sin\alpha + \phi_n \end{cases}$$

dove ϕ_t e ϕ_n sono le componenti tangenziale e normale della reazione vincolare

$$\phi_n = mg - F\sin\alpha \simeq 0.48\,N$$

$$\phi_t = F\,\frac{\frac{r_1}{r_2} - \frac{I}{mr_2^2}\cos\alpha}{1 + \frac{I}{mr_2^2}} = 0.37\,N$$

Se il piano fosse liscio $\phi_t = 0 \overset{**}{\Rightarrow} \cos\alpha = \frac{mr_1r_2}{I} < 1$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{mr_1r_2}{I}\right) = 37° \quad < \alpha^*$$

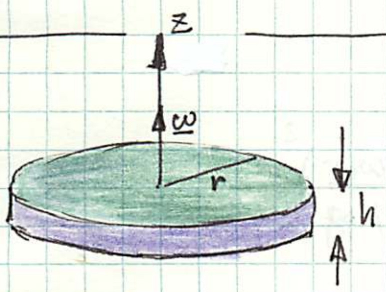
$$** \quad F\cos\alpha = \frac{mF\left(\frac{r_1}{r_2} + \cos\alpha\right)}{m + \frac{I}{r_2^2}} = \frac{mr_2F(r_1 + r_2\cos\alpha)}{mr_2^2 + I}$$

$$\cancel{mr_2^2 F\cos\alpha} + IF\cos\alpha = mr_1r_2F + \cancel{mr_2^2F\cos\alpha}$$

$$\cos\alpha = \frac{mr_1r_2}{I}$$

$$\phi_n \geq 0 \Rightarrow \sin\alpha \leq \frac{mg}{F} \qquad \alpha \leq \alpha^* = \arcsin\left(\frac{mg}{F}\right) \simeq 78°$$

Un disco cilindrico omogeneo di raggio $r = 10$ cm , spessore h
e massa $m = 6$ Kg , possiede un movimento di rotazione attorno al suo asse centrale con velocità angolare $\omega_0 = 6\pi$ rad s^{-1}. Il disco viene posato con una sua faccia sopra una superficie orizzontale scabra con coefficiente di attrito dinamico $\mu_D = 0.2$. Si calcoli il tempo t^* impiegato dal disco per fermarsi e l'angolo θ^* di cui esso ruota nel tempo t^*.



posto l'asse z parallelo ad ω si ha:

$$I \ddot{\theta}(t) = M_z$$

dove $I = \frac{1}{2} m r^2$

M_z = momento delle forze di attrito lungo z =

$$= -\int_0^{2\pi}\int_0^{r} \mu_D g \frac{m}{\pi r^2}\, dx \cdot x\, d\theta\, x = -\mu_D g \frac{m}{\pi r^2}\, 2\pi\, \frac{1}{3} r^3 = -\frac{2}{3}\mu_D g m r$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{4}{3}\frac{\mu_D g}{r}$$

integrando con le condizioni iniziali $\dot{\theta}(0) = \omega_0$ $\theta(0) = 0$

$$\dot{\theta}(t) = \omega_0 - \frac{4}{3}\frac{\mu_D g}{r} t$$

$$\theta(t) = \omega_0 t - \frac{2}{3}\frac{\mu_D g}{r} t^2$$

il tempo di arresto è dato da:

$$\dot{\theta}(t^*) = 0 = \omega_0 - \frac{4}{3}\frac{\mu_D g}{r} t^*$$

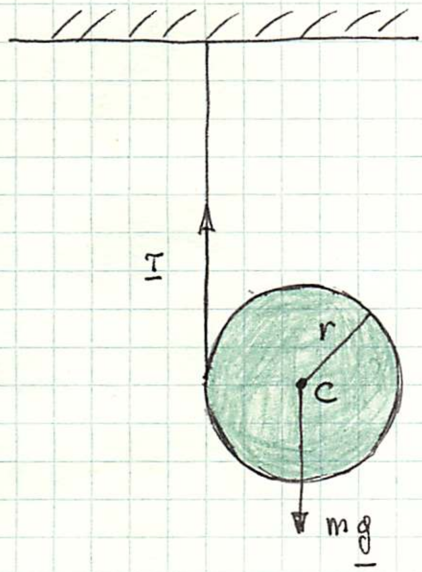
$$t^* = \frac{3\omega_0 r}{4\mu_D g} = 0.72 \text{ s}$$

l'angolo ruotato è:

$$\theta^* = \theta(t^*) = \omega_0 \frac{3\omega_0 r}{4\mu_D g} - \frac{2}{3}\frac{\mu_D g}{r}\left(\frac{3}{4}\frac{\omega_0 r}{\mu_D g}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\omega_0^2 \frac{3r}{4\mu_D g} = \frac{3r\omega_0^2}{8\mu_D g} = 6.798 \text{ rad}$$

Un filo inestensibile, di massa trascurabile, è avvolto attorno ad un cilindro di raggio r e lunghezza trascurabile e massa m = 3 Kg. Si tiene ferma l'estremità libera del filo e si lascia il cilindro cadere sotto l'azione della forza peso. Si determini l'accelerazione a dell'asse del cilindro e la tensione τ del filo.



Sia θ l'angolo formato da un raggio del cilindro rispetto ad un raggio di riferimento. Detta h la lunghezza del filo svolto

$h = \text{cost} + r\theta$ $\qquad\qquad$ $\ddot{h} = a = r\ddot{\theta}$

Le due eq. cardinali, di cui quella dei momenti proiettata sull'asse passante per il centro del cilindro, danno:

$mg - \tau = ma$

$r\tau = I\ddot{\theta}$

poiché il cilindro è approssimato da un disco $I = \frac{1}{2} m r^2$

$$\tau = mg - mr\ddot{\theta}$$

$$mgr - mr^2\ddot{\theta} = \frac{1}{2} m r^2 \ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{2}{3}\frac{g}{r} \qquad \omega = \frac{2}{3} g = 6.53 \ ms^{-2}$$

$$\tau = \frac{1}{3} mg = 9.8 \ N$$