RIFLESSIONE
RIFRAZIONE

RIFLESSIONE - RIFRAZIONE

- **indice di rifrazione assoluto** $\quad n = \dfrac{c}{v} = \sqrt{\varepsilon_r} \quad (\mu_r = 1)$

- formula di Clausius Mossotti $\quad \dfrac{n^2-1}{n^2+2} = \dfrac{Ne^2}{3\varepsilon_0 m} \sum_k \dfrac{f_k}{\omega_{0k}^2 - \omega^2 + i\gamma_k \omega}$

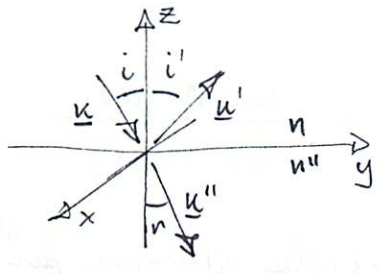
assorbimento : $n \in \mathbb{C}$

dispersione : $\dfrac{dn}{d\omega} \neq 0$

- conduttori $\quad n^2 = 1 - \dfrac{Ne^2}{\varepsilon_0 m \omega^2} \qquad \omega \gg \dfrac{Ne^2}{m\sigma}$

$$n^2 = -i\frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega} \qquad \omega \ll \max\left\{\frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \frac{Ne^2}{m\sigma}\right\}$$

* **riflessione e rifrazione: leggi di Snell**



$$\underline{k} \cdot \underline{x} - \omega t = \underline{k}' \cdot \underline{x} - \omega t = \underline{k}'' \cdot \underline{x} - \omega t$$

a $t=0$ e $z=0$ $\qquad k_x x + k_y y = k'_x x + k'_y y = k''_x x + k''_y y$

$$k^2 - k_z^2 = k^2 \sin^2 i = k_x^2 + k_y^2 = k'^2_x + k'^2_y = k'^2 \sin^2 i' =$$
$$= k''^2_x + k''^2_y = k''^2 \sin^2 r$$

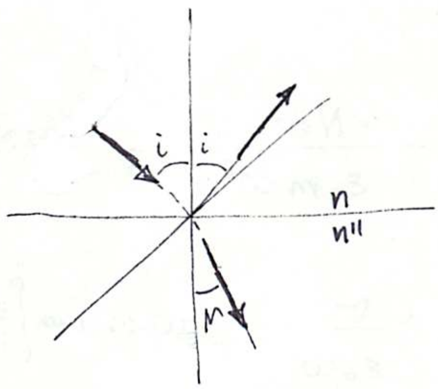
$k = \dfrac{\omega}{v} = k' \quad \Rightarrow \quad \boxed{i = i'}$

$k \neq k'' = \dfrac{v''}{v} = \dfrac{c}{v} \cdot \dfrac{v''}{c} = \dfrac{n}{n''} \quad \Rightarrow \quad \boxed{n \sin i = n'' \sin r}$

- angolo limite (riflessione totale)

$r = \frac{\pi}{2}$ $\quad \sin i = \frac{n''}{n}$ $\quad$ (possibile solo per $n'' < n$!)

* Riflessione e Rifrazione: formule di Fresnel



$\underline{E} = \underline{\pi} + \underline{\sigma}$ $\quad$ $\underline{\pi}$ = polarizz. parallela al piano di incidenza

$\underline{E}' = \underline{\pi}' + \underline{\sigma}'$ $\quad$ $\underline{\sigma}$ = polarizz. perpendicolar

$\underline{E}'' = \underline{\pi}'' + \underline{\sigma}''$

$$\sigma' = -\sigma \frac{\sin(i-r)}{\sin(i+r)} \qquad \pi' = \pi \frac{\tan(i-r)}{\tan(i+r)}$$

$$\sigma'' = 2\sigma \frac{\sin r \cos i}{\sin(i+r)} \qquad \pi'' = 2\pi \frac{\sin r \cos i}{\sin(i+r)\cos(i-r)}$$

- sfasamento π alla riflessione $\begin{cases} n'' > n & \sigma' \text{ sempre} \quad \pi' \text{ se } i+r > 90° \\ n'' < n & \sigma' \text{ mai} \quad \pi' \text{ se } i+r < 90° \end{cases}$

- angolo di Brewster: se $i + r = \frac{\pi}{2}$ $\quad \pi' = 0$

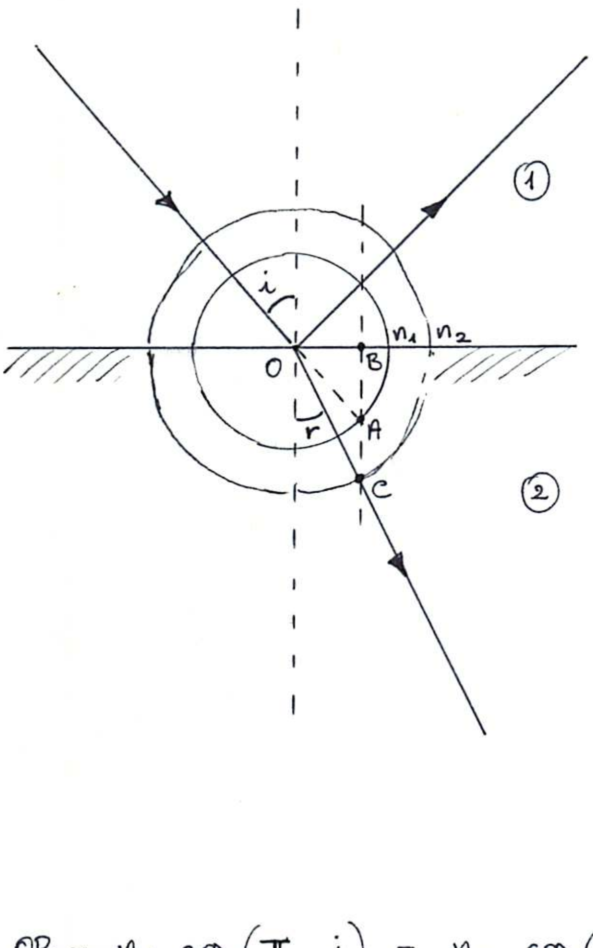
l'onda riflessa è polarizzata perpendicolarmente al piano di incidenza

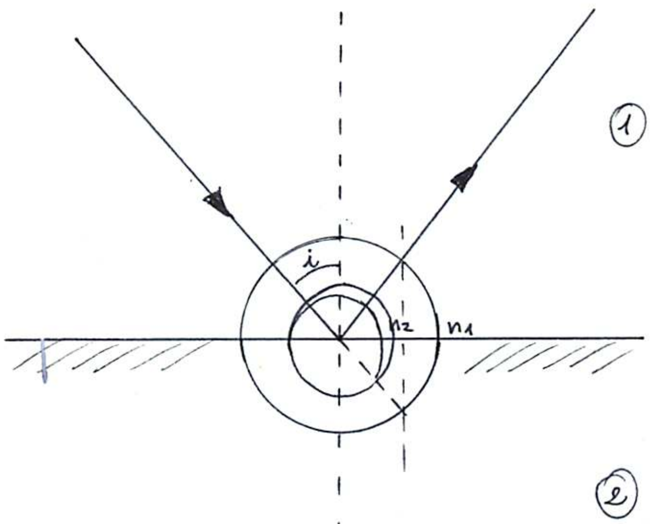
$\sin i\, n = n'' \sin r = n'' \sin\left(\frac{\pi}{2} - i\right) = n'' \cos i$ $\quad \boxed{\tan i = \frac{n''}{n}}$

non si può mai avere esattamente $\sigma' = 0$, $\pi'' = 0$, $\sigma'' = 0$

Riflessione e Rifrazione

Alla superficie di separazione dei mezzi 1 e 2 si tracciano 2 circonferenze di raggi n_1 ed n_2. Si trovino le intersezioni della perpendicolare alla superficie passante per il punto A con i due cerchi. Questi punti danno la direzione dei raggi riflesso e rifratto.





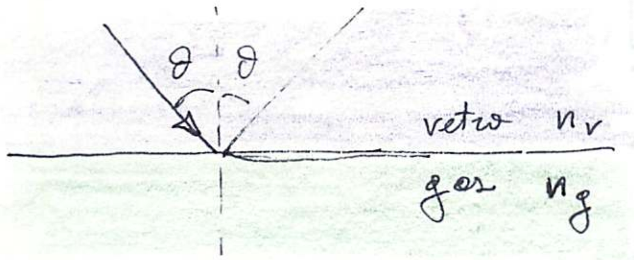
$$OB = n_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} - i\right) = n_2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - r\right)$$

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r$$

se $n_1 > n_2$ si ha assenza di raggio rifratto (riflessione totale)

per $i \geq i^*$: $n_1 \sin i^* = n_2$

Sulla superficie piana di separazione tra una lastra di vetro ($n_v = 1.5$) ed un gas di peso molecolare M incide un raggio luminoso monocromatico con $\theta = 45°$.
Se l'indice di rifrazione del gas è $n_g = 1 + a\rho$ $\quad a = 2 \cdot 10^{-3}\ m^3 kg^{-1}$
dove ρ è la densità determinare la pressione del gas alla quale il raggio non penetra nel gas alla temperatura di 20°C.



si ha riflessione totale quando $\quad n_v \sin\theta = n_g = 1 + a\rho$

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{MP}{RT} \qquad (1\ \text{mole})$$

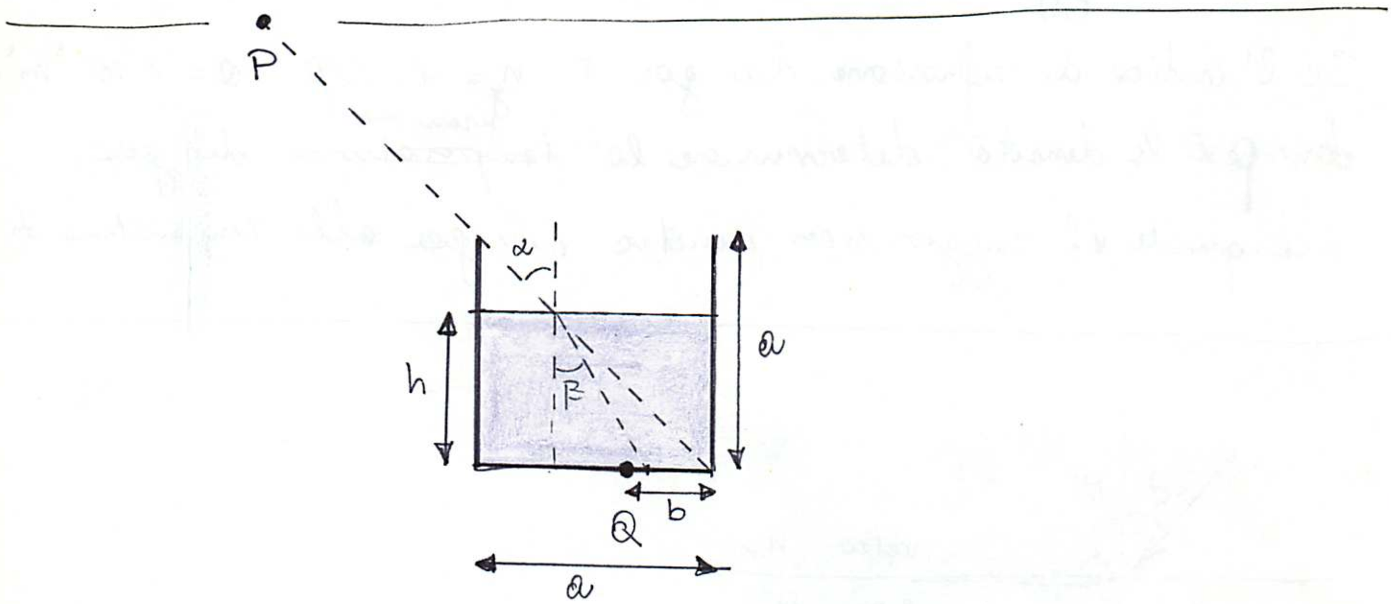
$$1 + a\frac{MP}{RT} = n_v \sin\theta$$

$$P = \left(n_v \sin\theta - 1\right)\frac{RT}{Ma}$$

$$P = \left(1.5 \cdot \sin 45° - 1\right)\frac{8.314 \cdot 293.15}{80\ 10^{-3}\ \ 2\ 10^{-3}} = 9.24\ 10^5\ Pa$$

$$\simeq 9.12\ atm$$

Quale deve essere il livello h dell'acqua nel recipiente in figura affinché dal punto P si possa vedere il punto Q ?



$$\tan\alpha = \frac{a}{a} = 1 \qquad \alpha = 45°$$

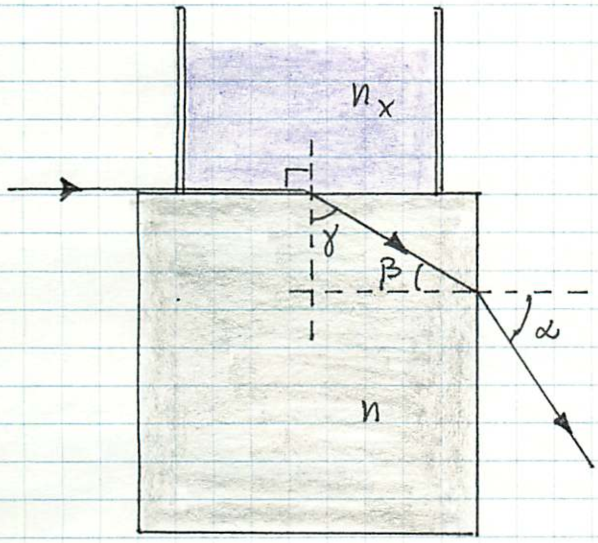
$$1 \sin 45° = n \sin\beta \qquad \tan\beta = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}\,n}}{\sqrt{1 - \frac{1}{2n^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2n^2 - 1}}$$

$$a - \left[(a-h)\tan\alpha + h\tan\beta\right] = b$$

$$\cancel{a} - \cancel{a} + h - h\tan\beta = b$$

$$h = \frac{b}{1 - \tan\beta} = \frac{b}{1 - \frac{1}{\sqrt{2n^2 - 1}}}$$

L'indice di rifrazione n_x di un liquido viene misurato con un rifrattometro di Pulfrich. Il liquido è contenuto in una vaschetta trasparente ricavata sopra un prisma di vetro $n = 1.72$. Determinare n_x se un fascio luminoso radente all'interfaccia liquido prisma viene misurato emergere dal prisma ad un angolo $\alpha = 60°$ con la normale.



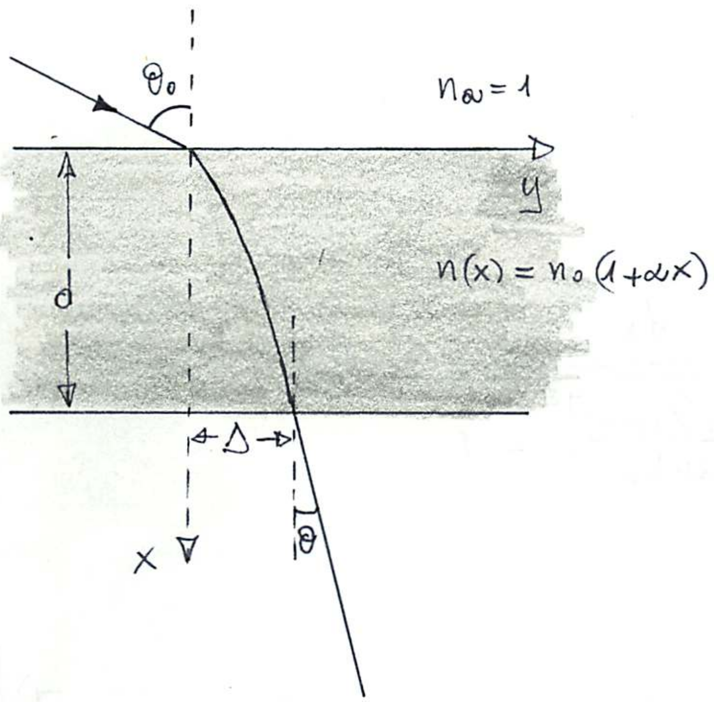
Applicando la legge di Snell nella rifrazione liquido-vetro e vetro-aria si ha:

$$\begin{cases} n_x = n \sin\gamma \\ n \sin\beta = \sin\alpha \end{cases}$$

$$\gamma + \beta = \frac{\pi}{2} \qquad n_x = n \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = n \cos\beta = n\sqrt{1 - \sin^2\beta} =$$

$$= n\sqrt{1 - \frac{\sin^2\alpha}{n^2}} = \sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} = 1.48$$

Un raggio di luce incide con angolo θ_0 su una lastra a facce piane e parallele. La lastra ha spessore d ed indice di rifrazione $n_0(1+\alpha x)$ essendo x la profondità.
Determinare l'angolo di uscita rispetto alla normale e la distanza Δ



per la legge di Snell $\quad n(x)\sin\theta(x) = \text{costante} = n_a \sin\theta_0$

$$\sin\theta(x) = \frac{\sin\theta_0}{n_0(1+\alpha x)} \qquad \theta = \theta(d) = \arcsin\left(\frac{\sin\theta_0}{n_0(1+\alpha d)}\right)$$

Nel sistema di riferimento xy indicato si ha:

$$\frac{dy(x)}{dx} = \tan\theta(x)$$

$$\frac{d\,y(x)}{dx} = \sqrt{\frac{\dfrac{\sin^2\theta_0}{n_0^2(1+\alpha x)^2}}{1-\dfrac{\sin^2\theta_0}{n_0^2(1+\alpha x)^2}}} = \sqrt{\frac{\dfrac{\sin^2\theta_0}{n_0^2}}{(1+\alpha x)^2-\dfrac{\sin^2\theta_0}{n_0^2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\left[\dfrac{n_0(1+\alpha x)}{\sin\theta_0}\right]^2-1}}$$

$$\Delta = \int_{x=0}^{x=d} dy(x) = \int_0^d \frac{dx}{\sqrt{\left[\dfrac{n_0(1+\alpha x)}{\sin\theta_0}\right]^2-1}} =$$

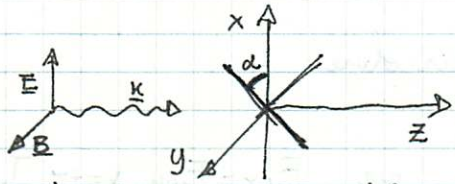
$$= \frac{\sin\theta_0}{\alpha n_0}\int_{\frac{n_0}{\sin\theta_0}}^{\frac{n_0(1+\alpha d)}{\sin\theta_0}} \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}} = \frac{\sin\theta_0}{\alpha n_0}\ln\left(z+\sqrt{z^2-1}\right)\Bigg|_{\frac{n_0}{\sin\theta_0}}^{\frac{n_0(1+\alpha d)}{\sin\theta_0}}$$

$$= \frac{\sin\theta_0}{\alpha n_0}\ln\frac{\dfrac{n_0(1+\alpha d)}{\sin\theta_0}+\sqrt{\left[\dfrac{n_0(1+\alpha d)}{\sin\theta_0}\right]^2-1}}{\dfrac{n_0}{\sin\theta_0}+\sqrt{\left(\dfrac{n_0}{\sin\theta_0}\right)^2-1}}$$

Una lamina polaroid viene usata come analizzatore di polarizzazione di una radiazione incidente ortogonalmente con intensità I_0
Si calcoli l'intensità trasmessa nel caso di polarizzazione lineare, circolare, ellittica e radiazione non polarizzata.

---

1) polarizzazione lineare



sia α l'angolo tra l'asse di trasmissione del polaroid e l'asse di oscillazione del campo elettrico $E_x = E_0 \cos\left[2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}\right) + \varphi\right]$

$$= E_0 \cos(kx - \omega t + \varphi)$$

la proiezione di E sull'asse del polaroid (campo trasmesso) è:

$E_p = E_x \cos\alpha$ per cui

$I_p = I_0 \cos^2\alpha$ (legge di Malus)

2) polarizzazione ellittica D: $\gamma \in]-\pi, 0[$ S: $\gamma \in]0, \pi[$

$$E_x = E_{0x} \cos(kx - \omega t + \varphi)$$
$$E_y = E_{0y} \cos(kx - \omega t + \varphi + \gamma)$$

$$E_p = E_x \cos\alpha + E_y \sin\alpha$$

$$I_p = \langle E_p \times H_p \rangle = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \langle E_p^2 \rangle = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \langle E_x^2 \cos^2\alpha + E_y^2 \sin^2\alpha + 2 E_x E_y \sin\alpha \cos\alpha \rangle =$$

$$= \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \left(\frac{1}{2} E_{0x}^2 \cos^2\alpha + \frac{1}{2} E_{0y}^2 \sin^2\alpha + E_{0x} E_{0y} \sin\alpha \cos\alpha \cos\gamma \right)$$

$$I_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \langle E_x^2 + E_y^2 \rangle = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \frac{1}{2} \left(E_{0x}^2 + E_{0y}^2 \right)$$

$$I_p = I_0 \frac{E_{0x}^2 \cos^2\alpha + E_{0y}^2 \sin^2\alpha + 2 E_{0x} E_{0y} \sin\alpha \cos\alpha \cos\gamma}{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}$$

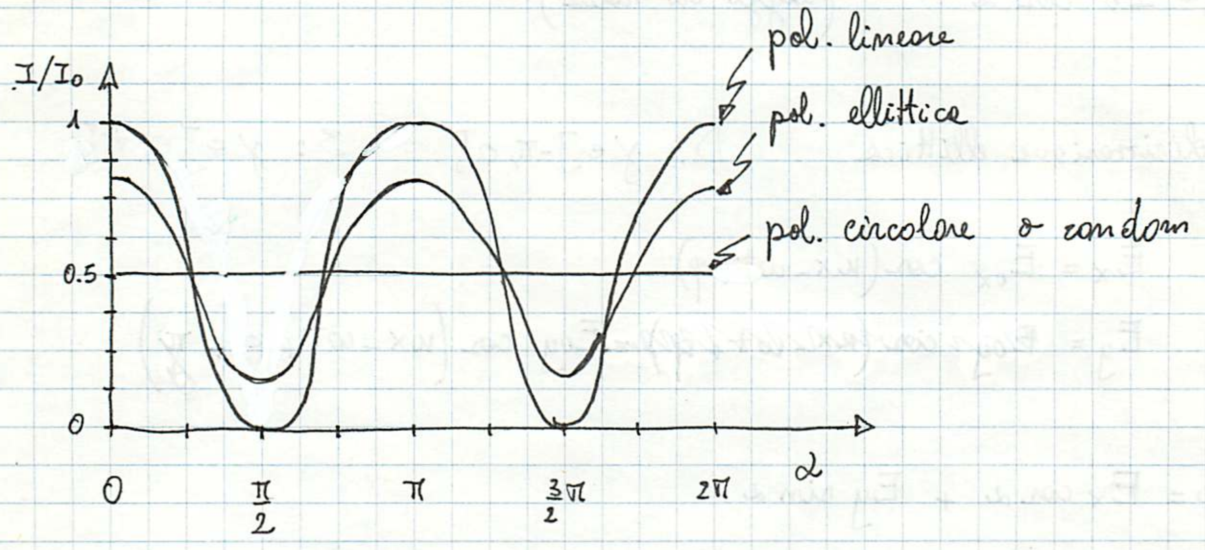
3) polarizzazione circolare

dal caso 2) per $E_{0x} = E_{0y}$, $\gamma = \pm\frac{\pi}{2}$ $I_p = I_0 \frac{1}{2}$

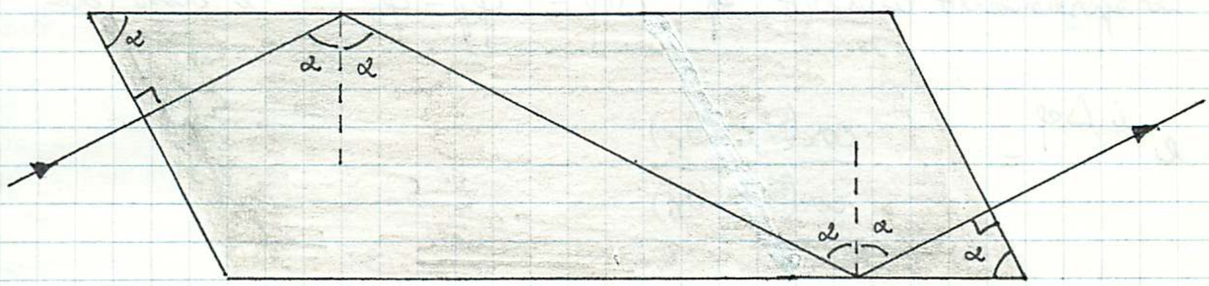
4) non polarizzata

dal caso 1) per α variabile casualmente in $[0, 2\pi]$

$$I_p = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I_0 \cos^2\alpha \, d\alpha = \frac{1}{2} I_0$$



Il rombo di Fresnel è un prisma di vetro ($n = 1.51$) con angoli acuti $\alpha = 54{,}6°$. Dimostrare che in caso di incidenza normale alla superficie del prisma la radiazione riemerge con la componente normale al piano di incidenza sfasata di $\frac{\pi}{2}$ rispetto a quella parallela. Determinare lo stato di polarizzazione all'uscita per luce incidente polarizzata linearmente, ellitticamente e circolarmente.



Per la geometria del problema il raggio luminoso all'ingresso e all'uscita del vetro subisce due riflessioni interne con angolo di incidenza α.

Poiché α è maggiore dell'angolo limite

$$n \sin \theta_\ell = 1 \qquad \theta_\ell = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) = 41.47°$$

non viene persa radiazione per rifrazione nel vuoto.

In ciascuna riflessione interna lo sfasamento relativo tra le componenti normale al piano di incidenza e parallela può essere calcolato con le eq. di Fresnel.:

$$\frac{E_{oi}'(\parallel)}{E_{oi}(\parallel)} = \frac{\tan(\theta_i-\theta_r)}{\tan(\theta_i+\theta_r)} = \frac{\sin(\theta_i-\theta_r)}{\sin(\theta_i+\theta_r)} \cdot \frac{\cos(\theta_i+\theta_r)}{\cos(\theta_i-\theta_r)} =$$

$$= - \frac{E_{oi}'(\perp)}{E_{oi}(\perp)} \; \frac{\cos(\theta_i+\theta_r)}{\cos(\theta_i-\theta_r)}$$

per $\theta_i > \theta_{lim}$ i rapporti $\frac{E_{oi}'(\parallel)}{E_{oi}(\parallel)} = e^{i\varphi_\parallel}$ $\frac{E_{oi}'(\perp)}{E_{oi}(\perp)} = e^{i\varphi_\perp}$

sono puri fattori di fase

Lo sfasamento relativo $\Delta\varphi = \varphi_\parallel - \varphi_\perp$ è dato da:

$$e^{i\Delta\varphi} = - \frac{\cos(\theta_i+\theta_r)}{\cos(\theta_i-\theta_r)}$$

Nel caso considerato $\theta_i = \alpha$ posto $x = e^{i\theta_r}$ la legge di Snell dà:

$$n \sin\alpha = \frac{x - x^{-1}}{2i} \qquad x^2 - 2 i n \sin\alpha \, x - 1 = 0$$

$$x = i n \sin\alpha \pm \sqrt{-n^2\sin^2\alpha + 1} = i\left[n\sin\alpha \pm \sqrt{n^2\sin^2\alpha - 1}\right] \equiv i y$$

$$e^{i\Delta\varphi} = - \frac{\cos(\alpha+\theta_r)}{\cos(\alpha-\theta_r)} = - \frac{\cos\alpha\left(iy - \frac{i}{y}\right) - 2n\sin^2\alpha}{\cos\alpha\left(iy - \frac{i}{y}\right) + 2n\sin^2\alpha} =$$

$$= \frac{2n\sin^2\alpha - i\left(y-\frac{1}{y}\right)\cos\alpha}{2n\sin^2\alpha + i\left(y-\frac{1}{y}\right)\cos\alpha} =$$

$$= \frac{\left[2n\sin^2\alpha - i\left(y-\frac{1}{y}\right)\cos\alpha\right]^2}{\left(2n\sin^2\alpha\right)^2 + \left(y-\frac{1}{y}\right)^2\cos^2\alpha}$$

$$\tan \Delta\varphi = -\frac{2\, 2n\sin^2\alpha \left(y-\frac{1}{y}\right)\cos\alpha}{\left(2n\sin^2\alpha\right)^2 - \left(y-\frac{1}{y}\right)^2\cos^2\alpha} = -1$$

$$\Delta\varphi = -45^\circ$$

Dopo 2 riflessioni interne si ha $\varphi_\perp - \varphi_\parallel = \frac{\pi}{2}$

a) Se l'onda incidente è polarizzata linearmente si ha:

$$\begin{cases} E_{in}(\perp) = E_0 \cos\beta \cos(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t) \\ E_{in}(\parallel) = \pm E_0 \sin\beta \cos(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_{out}(\perp) = E_0 \cos\beta \cos(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t) \\ E_{out}(\parallel) = \pm E_0 \sin\beta \cos\left(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t - \frac{\pi}{2}\right) = E_0 \sin\beta \cos\left(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t \mp \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

all'uscita l'onda è polarizzata circolarmente ~~ellitticamente~~ destra $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ o sinistra $\left(+\frac{\pi}{2}\right)$ ad eccezione dei casi $\beta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ in cui una delle due componenti $\perp$ o $\parallel$ si annulla.

b) Se l'onda incidente è polarizzata ellitticamente destra o sinistra

$$\begin{cases} E_{in}(\perp) = E_0 \cos\beta \cos(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t) \\ E_{in}(\parallel) = E_0 \sin\beta \cos(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t + \gamma) \end{cases}$$

D: $-\pi < \gamma < 0$

S: $0 < \gamma < \pi$

$$\begin{cases} E_{out}(\perp) = E_0 \cos\beta \cos(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t) \\ E_{out}(\parallel) = E_0 \sin\beta \cos\left(\underline{k}\cdot\underline{r} - \omega t + \gamma - \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

all'uscita l'onda è ancora polarizzata ellitticamente ma può cambiare verso (se $|\gamma| > \frac{\pi}{2}$).

c) se l'onda incidente è polarizzata circolarmente destra o sinistra

$$\begin{cases} E_{in}(\perp) = E_0 \cos(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t) \\ E_{in}(\parallel) = E_0 \cos\left(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t \mp \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

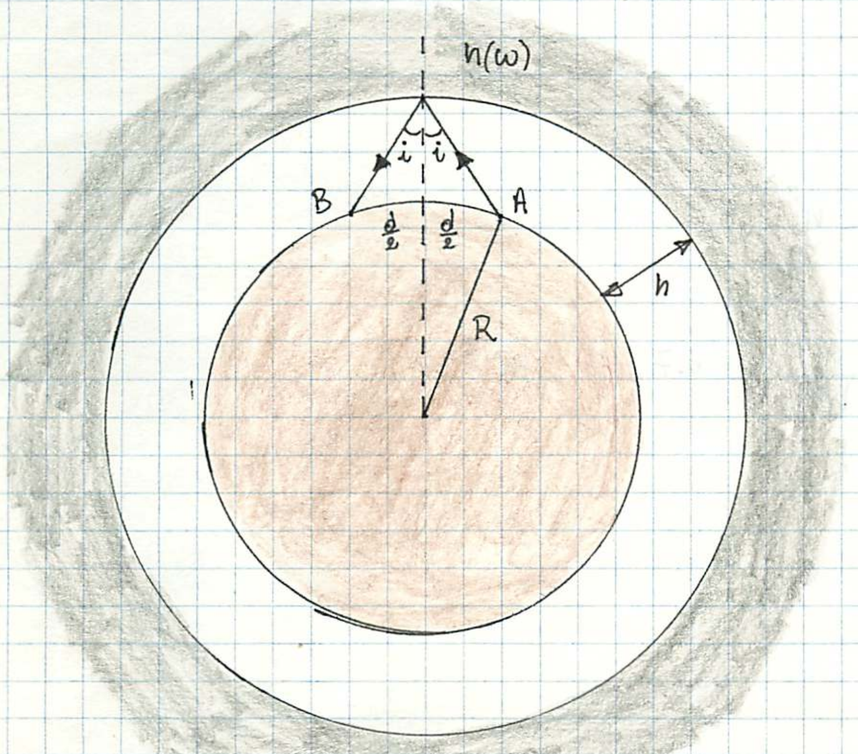
$$\begin{cases} E_{out}(\perp) = E_0 \cos(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t) \\ E_{out}(\parallel) = \mp E_0 \cos(\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t) \end{cases}$$

l'onda uscente è polarizzata linearmente

Nei casi b) e c) il rombo di Fresnel si comporta come una lamina quarto d'onda (anche nel caso a) con $S \leftrightarrow D$) però il suo funzionamento non dipende da λ!

Un semplice modello per la ionosfera è un mezzo descritto dalla costante dielettrica relativa $\varepsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$ ($\omega_p^2 = \frac{\delta e^2}{\varepsilon_0 m}$ dove e ed m sono la carica e la massa di 1 elettrone e δ la densità di elettroni), che avvolge la terra a partire da una quota $h = 300$ Km. Si spieghi in base a quale fenomeno la trasmissione di segnali radio di pulsazione ω tra due punti della terra via una riflessione all'interfaccia tra atmosfera e ionosfera viene favorita se $\omega > \omega_p$.
Si calcoli l'indice di rifrazione della ionosfera alla lunghezza d'onda $\lambda = 21$ m sapendo che solo stazioni distanti più di $d = 1000$ Km possono essere collegate mediante un segnale riflesso dalla ionosfera.
Si calcoli infine la densità di elettroni nella ionosfera in queste condizioni. Si consideri $\frac{d}{2R} \ll 1$ R = raggio della terra

---



per $\omega > \omega_p$ $n(\omega) < 1$ e si può avere il fenomeno della riflessione totale all'interfaccia atmosfera ($n=1$) ionosfera ($n<1$).
La mancata perdita di energia del segnale e.m. (riflettanza unitaria) aiuta fortemente la trasmissione tra due stazioni A B

la riflessione totale avviene se l'angolo di incidenza $i \geq i^*(\omega)$

dove $\sin i^* = n(\omega)$

Poiché $\sin i \simeq \dfrac{d/2}{\sqrt{(d/2)^2 + h^2}}$ (per $\dfrac{d}{2R} \ll 1$)

cioè i cresce al crescere di d la distanza minima di ricezione del segnale corrisponde all'angolo limite i^*.

L'indice di rifrazione della ionosfera nelle condizioni considerate è:

$$n = \frac{d/2}{\sqrt{(d/2)^2 + h^2}} = 0.86$$

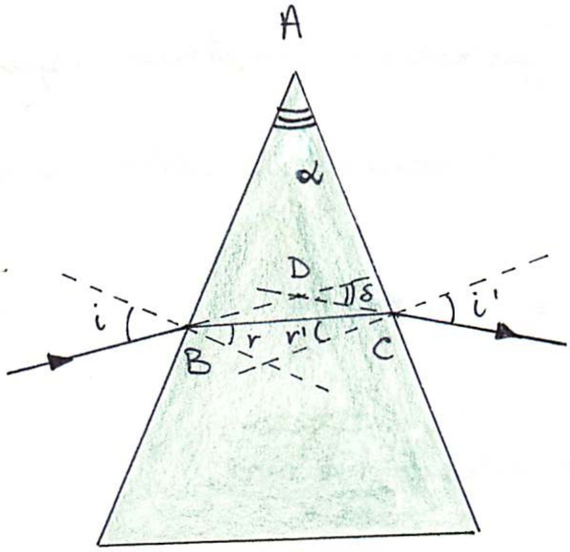
Dalla relazione $(\mu_r \simeq 1)$ $n^2 = \varepsilon_r$ si ha

$$n^2 = 1 - \frac{\delta e^2}{\varepsilon_0 m}\left(\frac{\lambda}{2\pi c}\right)^2$$

$$\delta = \left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right)^2 \frac{\varepsilon_0 m}{e^2}\left(1 - n^2\right) =$$

$$= \left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right)^2 \frac{\varepsilon_0 m}{e^2}\frac{h^2}{(d/2)^2 + h^2} = 6.7\ 10^{11}\ m^{-3}$$

Prisma



$$\begin{cases} \sin i = n \sin r \\ \sin i' = n \sin r' \end{cases}$$

angolo di deviazione del raggio $= \delta = D\hat{B}C + D\hat{C}B = (i - r) + (i' - r')$

dal triangolo ABC : $\alpha + \left(\frac{\pi}{2} - r\right) + \left(\frac{\pi}{2} - r'\right) = \pi \Rightarrow \alpha = r + r'$

$\delta = i + i' - \alpha$ $\qquad \frac{d\delta}{di} = 1 + \frac{di'}{di}$

differenziando le due relazioni di Snell

$\cos i \, di = n \cos r \, dr$

$\cos i' \, di' = n \cos r' \, dr'$

e notando che $dr + dr' = 0$ in quanto $r + r' = \alpha =$ costante

$$\frac{di'}{di} = \frac{\cos i}{\cos i'} \frac{n \cos r'}{n \cos r} \frac{dr'}{dr} = - \frac{\cos i}{\cos i'} \frac{\cos r'}{\cos r}$$

$$\frac{d\,\delta(i)}{di} = 1 - \frac{\cos r'}{\cos r} \cdot \frac{\cos i}{\cos i'}$$

per $i = i'$ ed $r = r'$ (percorso simmetrico rispetto alla bisettrice del prisma) $\delta(i)$ assume il valore minimo

$$\delta_m = 2i - \alpha \qquad \text{e} \qquad r = \frac{\alpha}{2}$$

$$i = \arcsin\left(n \sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\boxed{\delta_m = 2 \arcsin\left(n \sin\frac{\alpha}{2}\right) - \alpha}$$

invertendo si può ricavare n noti α e δ_m

$$\boxed{n = \frac{\sin\left(\frac{\delta_m + \alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}}$$

Dispersione del prisma $D \equiv \frac{d\delta}{d\lambda} = \frac{d\delta}{dn} \cdot \frac{dn}{d\lambda} = \frac{di'}{dn} \cdot \frac{dn}{d\lambda}$

$0 = \sin r + n\cos r \frac{dr}{dn}$ $\qquad \cos i' \frac{di'}{dn} = \sin r' + n\cos r' \frac{dr'}{dn}$ $\qquad \frac{dr'}{dn} + \frac{dr}{dn} = 0$

$$\frac{di'}{dn} = \frac{\sin\alpha}{\cos i' \cos r} = \frac{2 \sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\left(\frac{\delta_m + \alpha}{2}\right)}$$ in minima deviazione

$n \simeq A + \frac{B}{\lambda^2}$ (formula di Cauchy)

$$\boxed{D = \frac{2 \sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\left(\frac{\delta_m + \alpha}{2}\right)} \left(-\frac{2B}{\lambda^3}\right)}$$

giustificazione della formula di Cauchy

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

$$n^2 = 1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m (\omega_0^2 - \omega^2)}$$

$$n = \left[1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m (\omega_0^2 - \omega^2)}\right]^{\frac{1}{2}} \simeq 1 + \frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m \omega_0^2}\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^{-1}$$

$$\simeq 1 + \frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m \omega_0^2}\left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) \qquad \omega \ll \omega_0$$

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$$

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2} \qquad A = 1 + \frac{Ne^2}{2\varepsilon_0 m \omega_0^2} \sim 2$$

$$B = \frac{2\pi^2 c^2 Ne^2}{\varepsilon_0 m \omega_0^4} = \frac{4\pi^2 c^2}{\omega_0^2}(A-1)$$

$$= \lambda_0^2 (A-1) \sim 10^6 \text{Å}^2$$

$$\frac{di'}{dn} = \frac{\sin r' + n\cos r' \frac{\sin r}{n\cos r}}{\cos i'} = \frac{\sin r' \cos r + \sin r \cos r'}{\cos i' \cos r}$$

$$= \frac{\sin(r + r')}{\cos i' \cos r} = \frac{\sin \alpha}{\cos\left(\frac{\alpha + \delta_m}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$\frac{di'}{dn} = \frac{\sin r' + n\cos r' \frac{dr'}{dn}}{\cos i'} = \frac{\sin r' + n\cos r' \frac{\sin r}{n\cos r}}{\cos i'} =$$

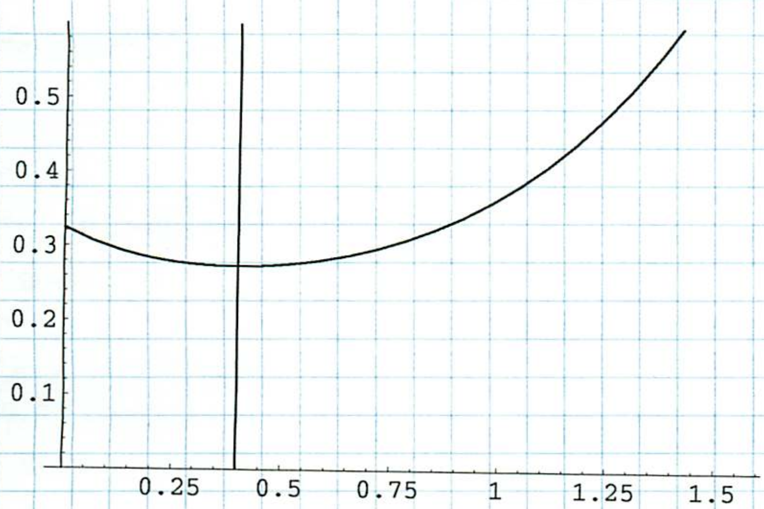
$$= \frac{\sin r'\cos r + \cos r'\sin r}{\cos i'\cos r} = \frac{\sin (r+r')}{\cos i' \cos r} = \frac{\sin \alpha}{\cos i' \cos r}$$

```
In[106]:= n = 1.5
          alpha = Pi / 6
          r1[i1_] := ArcSin[Sin[i1] / n]
          r2[i1_] := alpha - r1[i1]
          i2[i1_] := ArcSin[Sin[r2[i1]] * n]
          delta[i1_] := i1 + i2[i1] - alpha

          y[i1_] := (i1 - N[ArcSin[Sin[alpha / 2] * n]]) / 0.00001
          Plot[{delta[i1], y[i1]}, {i1, 0, Pi / 2}, PlotRange -> {0, 0.6}]

Out[106]= 1.5
```

Out[107]= $\frac{\pi}{6}$




```
Out[113]= - Graphics -
```