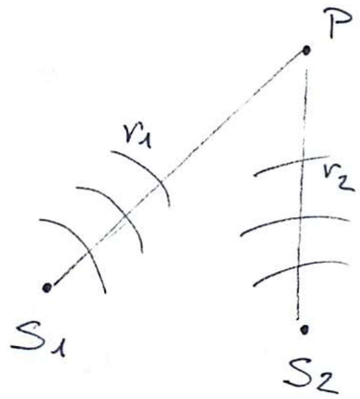
INTERFERENZA
DIFFRAZIONE

* interferenza prodotta da due sorgenti coerenti

$$E_1(P) = E_{01}\, e^{i(\omega t - k r_1)}$$

$$E_2(P) = E_{02}\, e^{i(\omega t - k r_2)}$$



$$I(P) \propto \left| E_1(P) + E_2(P) \right|^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02} \cos\left[k(r_1 - r_2)\right]$$

$$I(P) = I_1(P) + I_2(P) + 2\sqrt{I_1(P)\, I_2(P)}\, \cos\left[k(r_1 - r_2)\right]$$

interferenza costruttiva $\quad r_1 - r_2 = j\lambda$

interferenza distruttiva $\quad r_1 - r_2 = (2j+1)\frac{\lambda}{2} \qquad j = 0, 1, 2, \ldots$

se le due onde attraversano mezzi diversi n_1 ed n_2

$$k(r_1 - r_2) \rightarrow k_1 r_1 - k_2 r_2 = \frac{2\pi}{\lambda}(n_1 r_1 - n_2 r_2)$$

interferenza costruttiva $\quad n_1 r_1 - n_2 r_2 = j\lambda$

interferenza distruttiva $\quad n_1 r_1 - n_2 r_2 = (2j+1)\lambda \qquad j = 0, 1, 2, \ldots$

si noti che $\quad k_1 r_1 - k_2 r_2 = \frac{2\pi}{\lambda}(n_1 r_1 - n_2 r_2) = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta l$

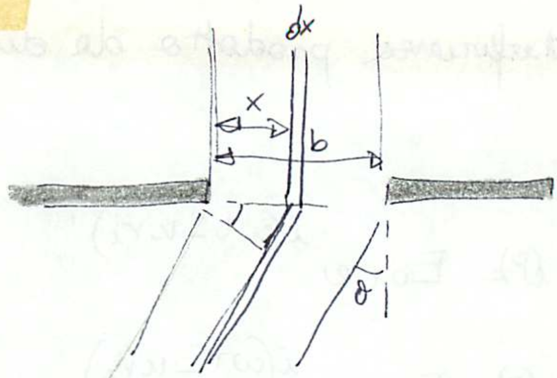
$$\boxed{\frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{\Delta l}{\lambda}}$$

Δl = differenza di cammini ottici

max $\Rightarrow \Delta\varphi$ = numero pari di π

* **Diffrazione di Fraunhofer**

- fenditura rettangolare:



$$dE(x) = \frac{E(x)}{b}\,dx = E_0 e^{i[k(r + x\sin\theta) - \omega t]}\frac{dx}{b}$$

$$E = E_0 e^{i(kr-\omega t)} \int_0^b dx \, \frac{e^{ikx\sin\theta}}{b} = E_0 e^{i(kr-\omega t)} \frac{\sin(kb\sin\theta/2)}{kb\sin\theta/2}$$

$$\boxed{I(\theta) = I_0 \left[\frac{\sin(\pi b \sin\theta/\lambda)}{\pi b\sin\theta/\lambda}\right]^2}$$

massimo assoluto a $\theta = 0$

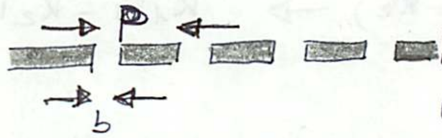
zeri per $b\sin\theta = j\lambda$ $j = 1,2,3,\dots$

potere separatore $= \boxed{\theta = \frac{\lambda}{b}}$

- fenditura circolare: (diametro d)

angolo della prima corona scura $\boxed{\sin\theta = 1.22\,\frac{\lambda}{D}}$

- Reticolo di diffrazione

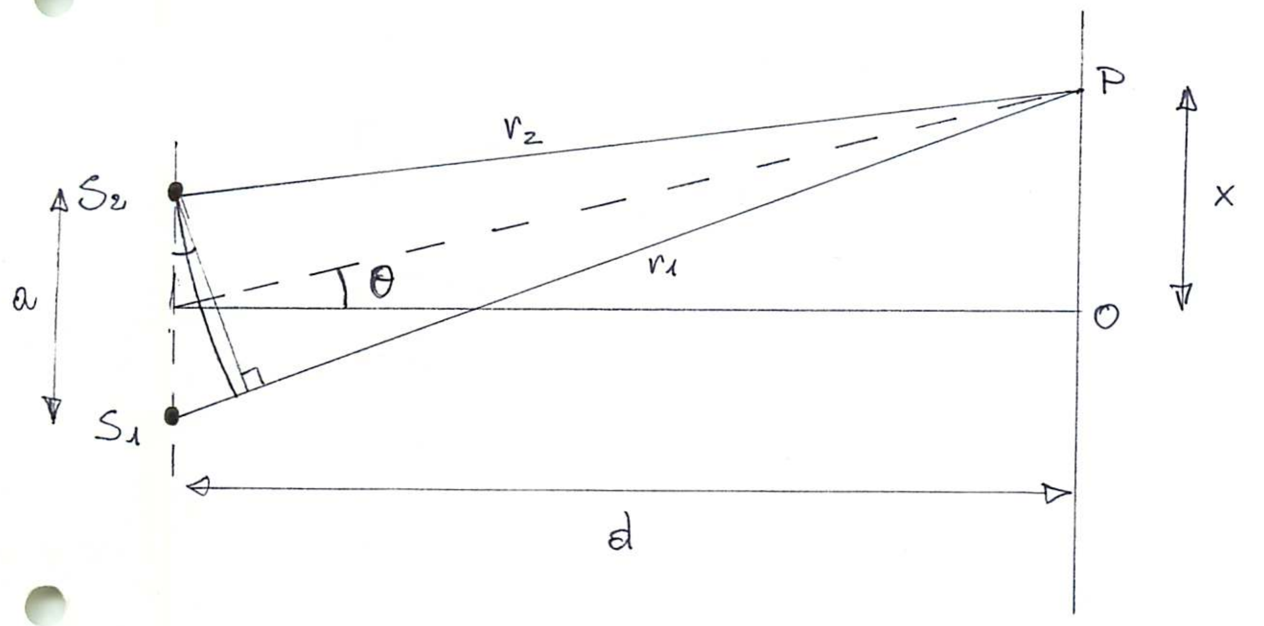


$$I = I_0 \cdot \left[\frac{\sin(\pi b\sin\theta/\lambda)}{\pi b \sin\theta/\lambda}\right]^2 \cdot \left[\frac{\sin(N\pi p\sin\theta/\lambda)}{\sin(\pi p\sin\theta/\lambda)}\right]^2$$

massimi principali $\boxed{p\sin\theta = j\lambda \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots}$

dispersione $\boxed{D \equiv \frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{j}{p\cos\theta}}$

Esperimento di Young : interferenza di 2 o più sorgenti coerenti su uno schermo lontano



per $a \ll d$ $\qquad r_1 - r_2 \simeq a \sin\theta$

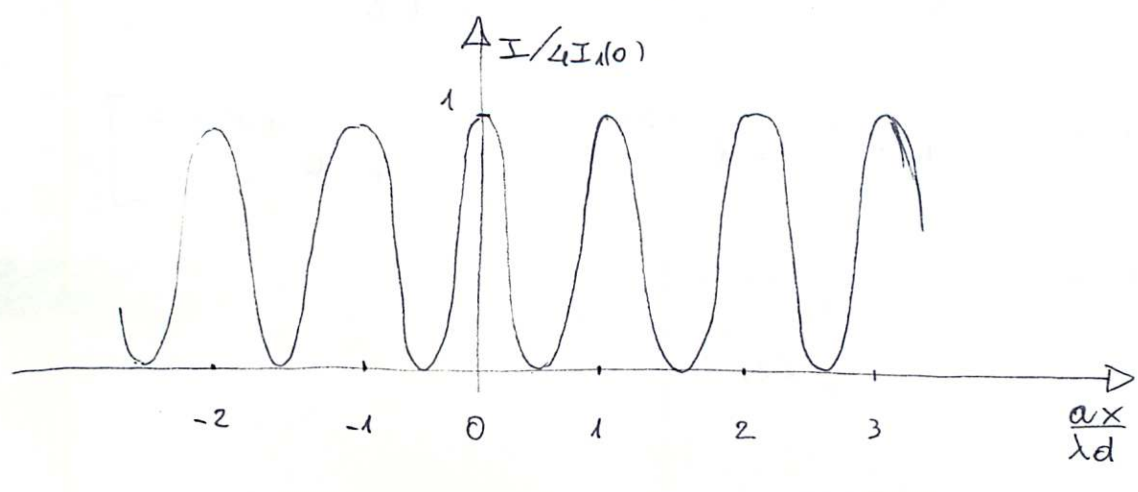
$\sin\theta \simeq \tan\theta = \frac{x}{d}$ $\qquad r_1 - r_2 \simeq \frac{a x}{d}$

massimi di intensità per $\frac{a x}{d} = j\lambda$

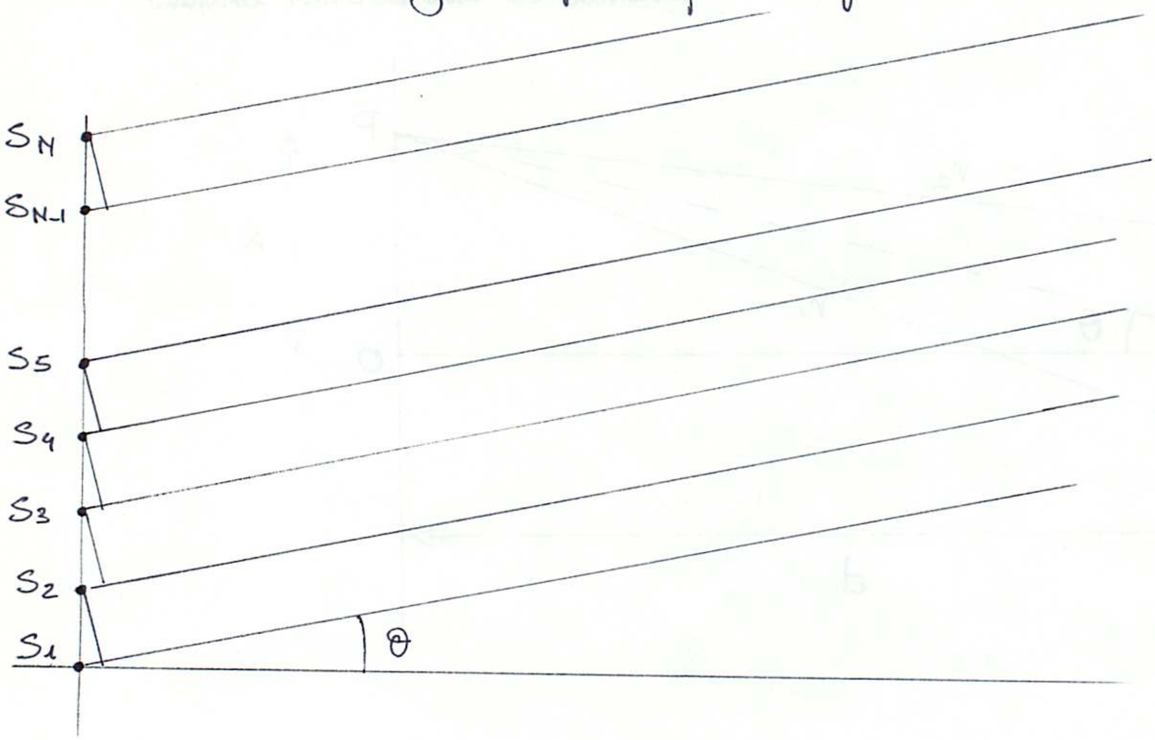
minimi " " " $\frac{a x}{d} = (2j+1)\lambda$

$$I(x) = I_1(x) + I_2(x) + 2\sqrt{I_1(x) I_2(x)} \cos\left(\frac{a x}{d}\frac{2\pi}{\lambda}\right)$$

$$\simeq 2 I_1(0) \left[1 + \cos\left(\frac{a x}{\lambda d} 2\pi\right)\right] = 4 I_1(0) \cos^2\left(\frac{a x}{\lambda d}\pi\right)$$



Nel caso di N sorgenti puntiformi identiche spaziate di a:



se nella direzione θ ad una distanza r_1 da S_1 il campo elettrico prodotto da S_1 è $\quad Re\left\{E\, e^{i(kr_1-\omega t)}\right\}$

osservando che
$$k(r_2-r_1)\equiv\delta = a\sin\theta\,\frac{2\pi}{\lambda}$$
$$k(r_3-r_1)=2\delta$$
$$\vdots$$
$$k(r_N-r_1)=(N-1)\delta$$

il campo elettrico totale è la parte reale di

$$E e^{i(kr_1-\omega t)} + E e^{i(kr_2-\omega t)} + \dots + E e^{i(kr_N-\omega t)} =$$

$$= E e^{i(kr_1-\omega t)}\left[1+e^{i\delta}+e^{i2\delta}+\dots+e^{i(N-1)\delta}\right]=$$

$$= E e^{i(kr_1-\omega t)}\cdot\frac{1-e^{i\delta N}}{1-e^{i\delta}} =$$

$$= E e^{i(k r_1 - \omega t)} \frac{e^{i\frac{\delta N}{2}}\left[e^{i\frac{\delta N}{2}} - e^{-i\frac{\delta N}{2}}\right]}{e^{i\frac{\delta}{2}}\left[e^{i\frac{\delta}{2}} - e^{-i\frac{\delta}{2}}\right]} =$$

$$= E e^{i\left[k r_1 - \omega t + \frac{\delta}{2}(N-1)\right]} \frac{\sin\left(\delta \frac{N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

se I_0 è l'intensità di una singola sorgente

$$I(\theta) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2} N \delta\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}\delta\right)} \qquad \delta = 2\pi \frac{a}{\lambda} \sin\theta$$

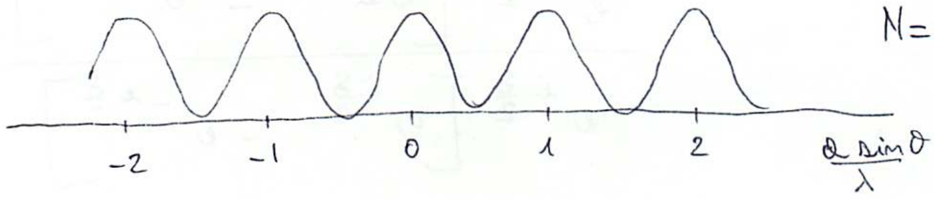
per $\frac{1}{2}\delta = j\pi$ cioè per $a \sin\theta = j\lambda$ $\quad j = 0, 1, 2, 3, \dots$

$I(\theta)$ ha massimi del valore di $N^2 I_0$; tra questi massimi principali occorrono $N-1$ minimi ($I=0$) ottenuti per $\frac{1}{2} N \delta = j\pi$

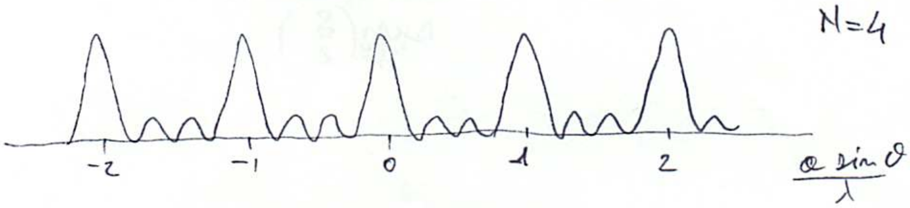
$$a \sin\theta = \frac{j}{N}\lambda$$

tra 2 massimi principali consecutivi occorrono $N-2$ massimi secondari.

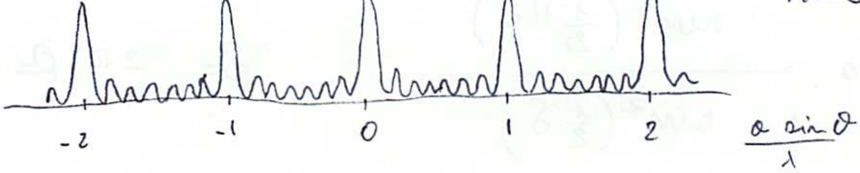
N=2


-2
-1
0
1
2
$\frac{a \sin\theta}{\lambda}$

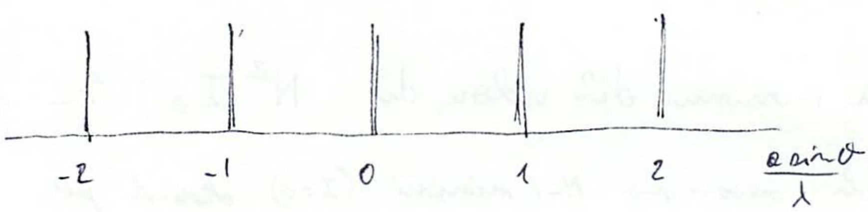
N=4


-2
-1
0
1
2
$\frac{a \sin\theta}{\lambda}$

N=8

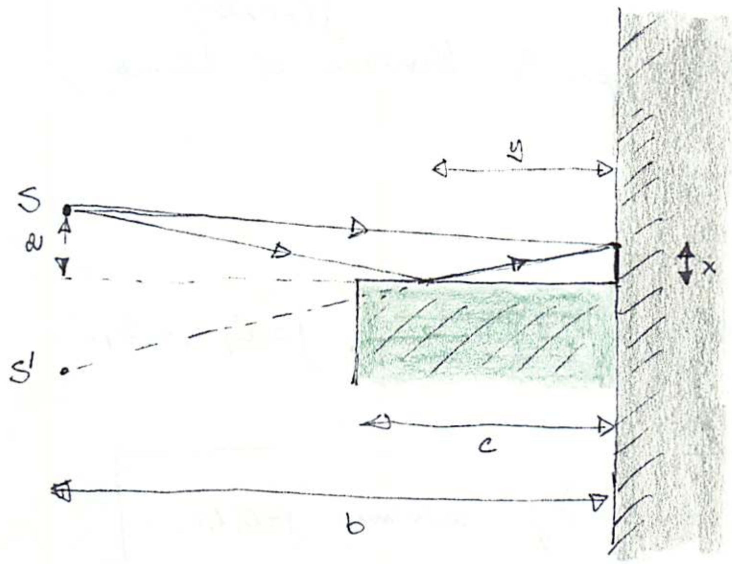

-2
-1
0
1
2
$\frac{a \sin\theta}{\lambda}$

N>>1


-2
-1
0
1
2
$\frac{a \sin\theta}{\lambda}$

Specchio di Lloyd

Determinare le posizioni x dei minimi di interferenza



$$\boxed{b \gg a}$$

fissato x deve essere $\frac{x}{y} = \frac{a}{b-y}$ cioè $y = \frac{xb}{x+a}$

cammino ottico raggio diretto $= \sqrt{b^2 + (a-x)^2} = b\sqrt{1 + \left(\frac{a-x}{b}\right)^2} \simeq b + \frac{1}{2}\frac{(a-x)^2}{b}$

cammino ottico raggio riflesso $= \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{a^2 + (b-y)^2} =$

$$= \sqrt{x^2 + \frac{x^2 b^2}{(x+a)^2}} + \sqrt{a^2 + \frac{b^2 a^2}{(x+a)^2}} =$$

$$= \frac{xb}{(x+a)}\sqrt{1 + \frac{(x+a)^2}{b^2}} + \frac{ba}{(x+a)}\sqrt{1 + \frac{(x+a)^2}{b^2}}$$

$$\simeq \frac{xb}{x+a} + \frac{1}{2}\frac{(x+a)x}{b} + \frac{ba}{x+a} + \frac{1}{2}\frac{(x+a)a}{b} =$$

$$= b + \frac{1}{2}\frac{(x+a)^2}{b}$$

differenza di cammino ottico = $\Delta l = \dfrac{2ax}{b}$

considerando lo sfasamento di π per la riflessione $(i+r>90°)$ si hanno

minimi se

$$\Delta\varphi + \pi = 2\pi \frac{2ax}{b\lambda} + \pi = (2j+1)\pi \qquad j = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\frac{2ax}{b\lambda} = j \qquad \boxed{x = \frac{b}{2a}\lambda j \quad \text{minimi} \quad j = 0, 1, 2, \dots}$$

$$x_0 = 0 \qquad x_1 = \frac{b}{2a}\lambda \qquad x_2 = \frac{b}{2a}2\lambda \quad \dots\dots$$

per $a = 3$ mm $\quad b = 100$ cm $\quad c = 30$ cm $\quad \lambda = 5890$ Å

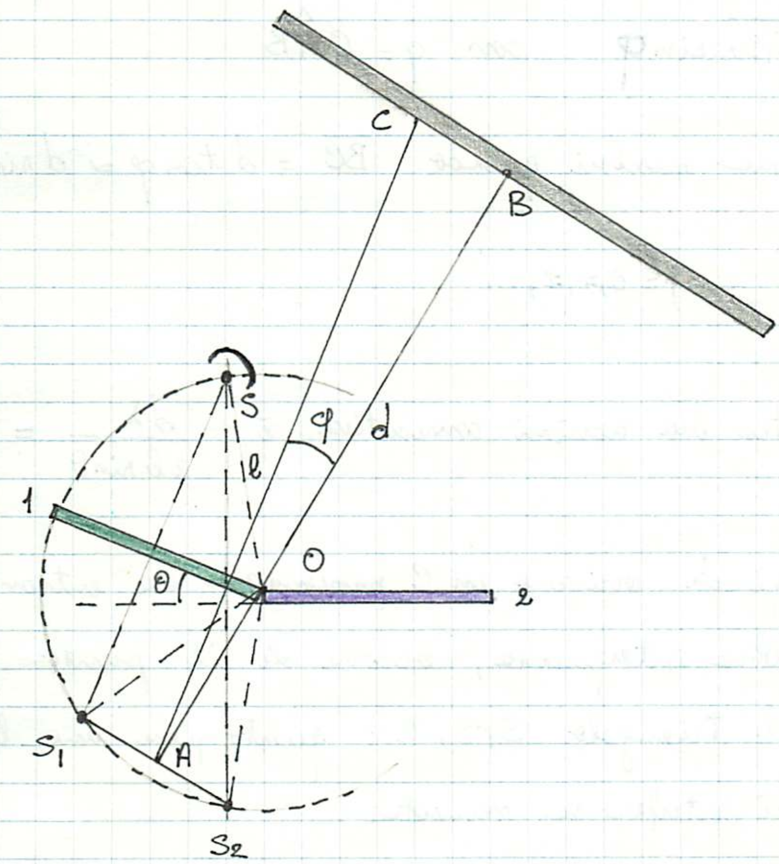
si ha $x_j = j \cdot 0.098$ mm

le frange si possono formare se $y \leq c$

cioè $\dfrac{xb}{x+a} \leq c \qquad xb \leq xc + ac \qquad x(b-c) \leq ac$

$$\boxed{x \leq \frac{ac}{b-c}} = 0.128 \text{ cm}$$

Due specchi piani (specchi di Fresnel) formano tra loro un angolo $\theta = 10^{-2}$ rad. A distanza $l = 10$ cm dalla retta comune ai piani degli specchi è posta una sorgente puntiforme S di luce gialla ($\lambda = 6000 Å$). A distanza $d = 1$ m delle immagini S_1 ed S_2 è situato uno schermo (non colpito direttamente da S) parallelo al segmento $S_1 S_2$. Si calcoli la posizione delle frange di interferenza sullo schermo.



Sia O il punto per cui passa l'asse comune ai due specchi; considerato il cerchio di centro O e raggio l su di esso giace la sorgente suddetta S. Le immagini S_1 e S_2 di S sugli specchi si trovano tracciando le perpendicolari agli specchi stessi fino a incontrare il cerchio di raggio l. Queste due immagini sono le sorgenti coerenti che producono interferenza sullo schermo.

La distanza tra le sorgenti è $\overline{S_1 S_2} = 2\, \overline{A S_2} = 2\, l \sin S_2\hat{O}A$

posto $\alpha = S\hat{O}1$ si ha $S\hat{O}S_2 = 2(\alpha+\theta)$ $S\hat{O}S_1 = 2\alpha$

sottraendo $S\hat{O}S_2 - S\hat{O}S_1 = S_2\hat{O}S_1 = 2\, S_2\hat{O}A = 2\theta$

quindi $\overline{S_1S_2} = 2 l \sin\theta$

Nel punto C dello schermo si ha un massimo di interferenza quando $(\overline{CS_1} - \overline{CS_2})\frac{2\pi}{\lambda} = 2j\pi$ $j = 0, \pm1, \pm2 \ldots$ cioè $\overline{CS_1} - \overline{CS_2} = j\lambda$

$\overline{CS_1} - \overline{CS_2} \simeq \overline{S_1S_2}\sin\varphi$ con $\varphi = C\hat{A}B$

quindi si hanno massimi quando $\overline{BC} = d\tan\varphi \simeq d\sin\varphi =$

$= d\,\frac{j\lambda}{2l\sin\theta}$ $j = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

la distanza tra due massimi consecutivi è $\frac{d\lambda}{2l\sin\theta} = 3.0\ 10^{-4}\,m$

Affinchè i raggi che arrivano in C provengano da entrambi gli specchi, e quindi si abbia interferenza, occorre che il punto O giaccia all'interno del triangolo S_1S_2C: questo pone una limitazione alla figura di interferenza osservata.

Quando O giace sul segmento S_2C si ha $\varphi = \theta$ e quando O giace sul segmento S_1C $\varphi = -\theta$: dunque $|\varphi| \leq \theta$

ovvero $|\varphi| \simeq |\sin\varphi| = \left|\frac{j\lambda}{2l\sin\theta}\right| \simeq \left|\frac{j\lambda}{2l\theta}\right| \leq \theta$

$|j| \leq \frac{2l}{\lambda}\theta^2 \simeq 33.33$

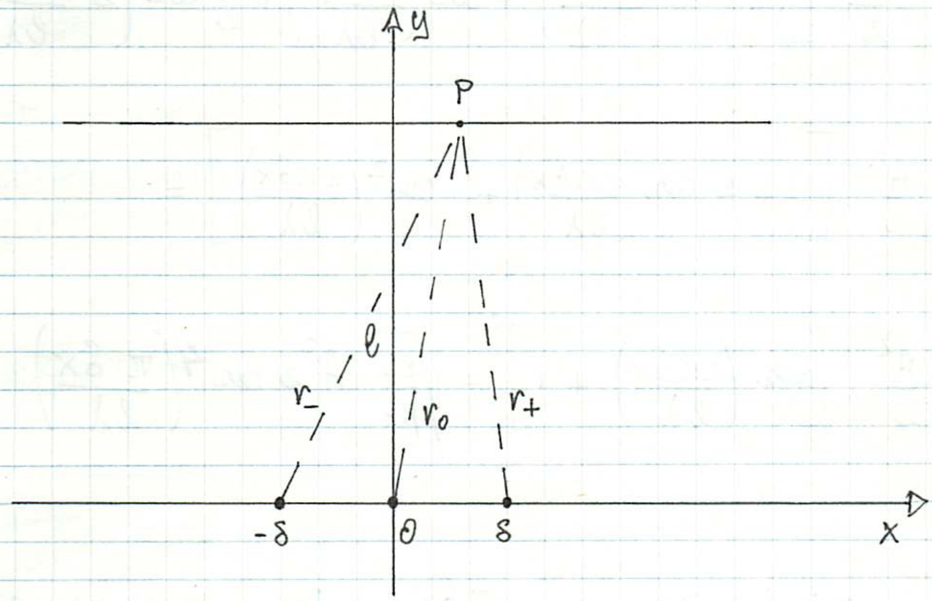
Si possono avere $33 + 33 + 1 = 67$ massimi corrispondenti ad una figura di interferenza ampia $66 \cdot 3\,10^{-4}\,m = 19.8$ mm

Tre sorgenti puntiformi e coerenti di onde e.m. $S_{\pm}, S_0$ sono disposte lungo l'asse x nei punti di coordinate $(\pm\delta, 0, 0)$ e $(0, 0, 0)$. Le onde monocromatiche emesse hanno campi elettrici paralleli tra loro dati da:

$$E_{\pm} = \frac{A}{2}\cos\left[2\pi\left(\nu t - \frac{r_{\pm}}{\lambda}\right)\right] \qquad E_0 = A\cos\left[2\pi\left(\nu t - \frac{r_0}{\lambda}\right)\right].$$

Discutere le variazioni di intensità luminosa lungo una retta parallela all'asse x a distanza l da esso. Calcolare la posizione del primo minimo per $\lambda = 550$ nm $\delta = 0.15$ mm $l = 1.30$ m

---



In un generico punto P di coordinate $(x, l, 0)$ il campo elettrico è

$$E_P = \mathrm{Re}\left\{ \frac{A}{2} e^{i 2\pi\left(\nu t - \frac{r_-}{\lambda}\right)} + \frac{A}{2} e^{i 2\pi\left(\nu t - \frac{r_+}{\lambda}\right)} + A e^{i 2\pi\left(\nu t - \frac{r_0}{\lambda}\right)} \right\} =$$

$$= \mathrm{Re}\left\{ \frac{A}{2} e^{i 2\pi\left(\nu t - \frac{r_0}{\lambda}\right)} \left(2 + e^{i 2\pi \frac{r_0 - r_-}{\lambda}} + e^{i 2\pi \frac{r_0 - r_+}{\lambda}} \right) \right\}$$

$$I_P = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\, \frac{1}{2} \left| \frac{A}{2} e^{i 2\pi\left(\nu t - \frac{r_0}{\lambda}\right)} \left(2 + e^{i 2\pi \frac{r_0 - r_-}{\lambda}} + e^{i 2\pi \frac{r_0 - r_+}{\lambda}} \right) \right|^2 =$$

$$= \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\, \frac{1}{2}\, \frac{A^2}{4} \left[6 + 4\cos\left(2\pi \frac{r_0 - r_-}{\lambda}\right) + 4\cos\left(2\pi \frac{r_0 - r_+}{\lambda}\right) + 2\cos\left(\frac{r_+ - r_-}{\lambda} 2\pi\right) \right]$$

$$r_\pm - r_0 = \sqrt{(x \mp \delta)^2 + \ell^2} - \sqrt{x^2 + \ell^2} =$$

$$= \sqrt{x^2 + \ell^2 + \delta^2 \mp 2\delta x} - \sqrt{x^2 + \ell^2} = \sqrt{x^2 + \ell^2}\left(\sqrt{1 + \frac{\delta^2 \mp 2\delta x}{x^2 + \ell^2}} - 1\right)$$

per $\delta \ll x \ll \ell$ $\qquad r_\pm - r_0 \simeq \ell\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\mp 2\delta x}{\ell^2} - 1\right) = \mp \frac{\delta x}{\ell}$

$$I(x) = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,\frac{A^2}{2}\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi\delta x}{\ell\lambda}\right) + \cos\left(\frac{2\pi\delta x}{\ell\lambda}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(2\,\frac{2\pi\delta x}{\ell\lambda}\right) + \frac{1}{2}\right] =$$

$$= \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,\frac{A^2}{2}\left[1 + 2\cos\left(\frac{2\pi\delta x}{\ell\lambda}\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi\delta x}{\ell\lambda}\right)\right] =$$

$$= \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,\frac{A^2}{2}\left[\cos\left(\frac{2\pi\delta x}{\ell\lambda}\right) + 1\right]^2 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,A^2\,2\cos^4\left(\frac{\pi\delta x}{\ell\lambda}\right)$$

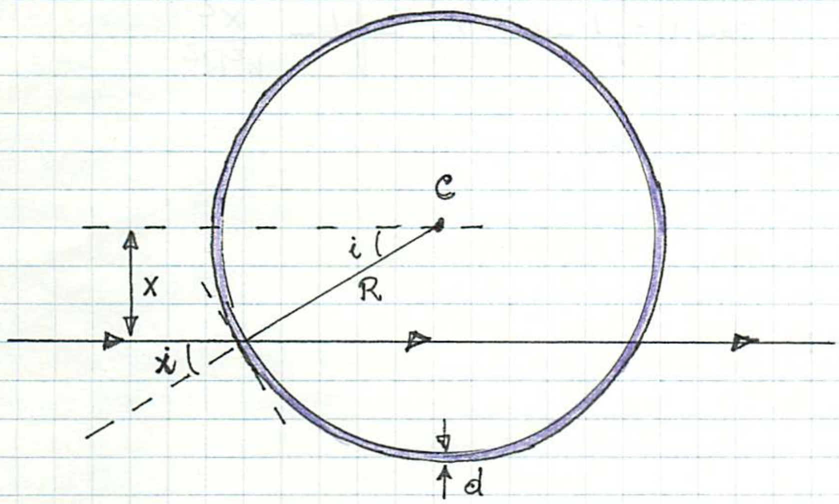
Si hanno massimi quando $\frac{\pi\delta x}{\ell\lambda} = j\pi \qquad j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

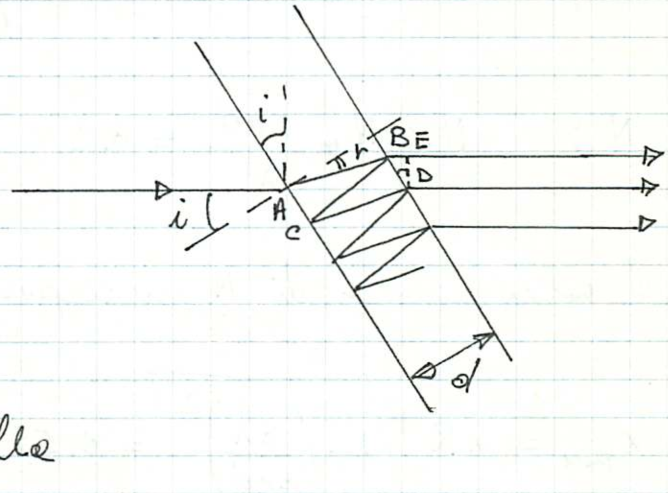
e minimi per $\frac{\pi\delta x}{\ell\lambda} = (2j+1)\frac{\pi}{2} \qquad j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

per $x = 0$ si ha un massimo

per $x = \pm \frac{\lambda}{2}\frac{\ell}{\delta} = \pm 2.38$ mm i primi due minimi

Un fascetto laser con $\lambda = 633$ nm attraversa una bolla di sapone sferica di raggio $R = 2.0$ cm. a distanza x dal centro.
La bolla ha pareti spesse $d = 2.0$ μm e indice di rifrazione $n = 1.3$
Quale è il valore minimo x_{min} di x perchè si osservi un massimo di interferenza nel fascio trasmesso?





il fascio laser incide sulla bolla con un angolo i tale che $\sin i = \frac{x}{R}$

Per $d \ll R$ la parete attraversata è piatta e si ha:

Δl = differenza di cammino ottico $= (\overline{BC} + \overline{CD})\, n - BE \cdot 1 =$

$$= 2 \frac{d}{\cos r} n - \frac{2d}{\cos r} \sin i \sin i = \frac{2d}{\cos r} n - \frac{2d}{\cos r} \sin r \, n \sin r =$$

$$= \frac{2d}{\cos r}\, n\left(1 - \cos^2 r\right) = 2nd\cos r$$

se $\Delta l = N\lambda$ $N = 1, 2, 3, \ldots$ si ha massima intensità trasmessa attraverso la prima e la seconda parete attraversata

Dalla legge di Snell: $\cos r = \sqrt{1 - \sin^2 r} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{n^2R^2}}$

$$2nd\sqrt{1 - \frac{x^2}{n^2R^2}} = N\lambda$$

$$x = nR\sqrt{1 - \left(\frac{N\lambda}{2nd}\right)^2}$$

la positività del radicando impone una limitazione su N

$$N \leq \frac{2nd}{\lambda} \simeq 8.2 \quad \Rightarrow \quad N \leq 8$$

al valore massimo di N corrisponde il valore minimo di x:

$$x_{min} = nR\sqrt{1 - \left(\frac{8\lambda}{2nd}\right)^2} = 0.59 \text{ cm.}$$

Intensità media con il metodo complesso

$$\underline{E}_1 = \underline{E}_{01} \cos\left(\underline{k}_1 \cdot \underline{x} - \omega t + \varphi_1\right)$$

$$\underline{E}_2 = \underline{E}_{02} \cos\left(\underline{k}_2 \cdot \underline{x} - \omega t + \varphi_2\right)$$

$$I(\underline{x}) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \quad \frac{1}{T}\int_0^T \left(\underline{E}_1 + \underline{E}_2\right)\cdot\left(\underline{E}_1 + \underline{E}_2\right) dt =$$

$$= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left\{ \underline{E}_{01}\cdot\underline{E}_{01} \frac{1}{2} + \underline{E}_{02}\cdot\underline{E}_{02} \frac{1}{2} + \frac{2\underline{E}_{01}\cdot\underline{E}_{02}}{T} \right. \cdot$$

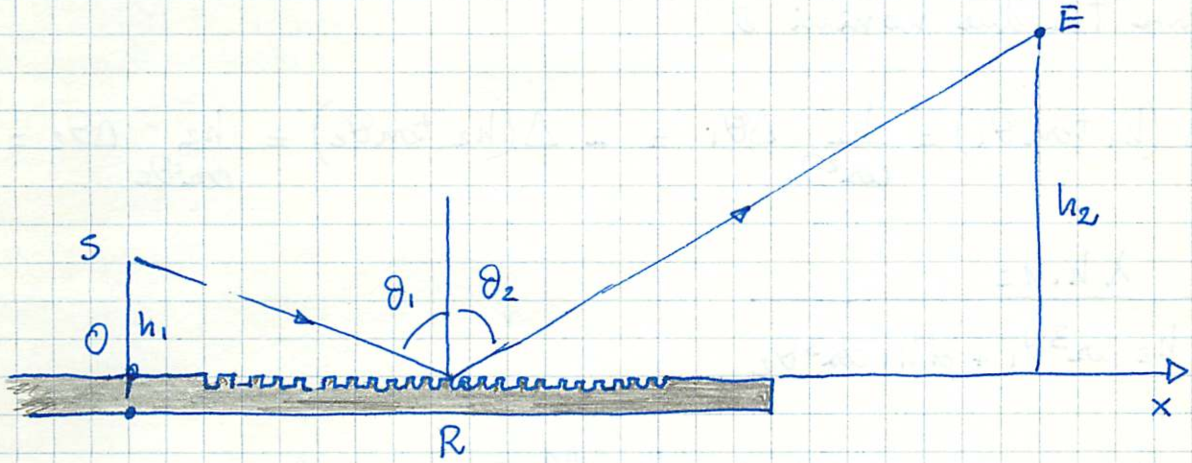
$$\left. \cdot \int_0^T \frac{1}{2}\left(\cos\left[(\underline{k}_1+\underline{k}_2)\cdot\underline{x} - 2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2\right] + \cos\left[(\underline{k}_1-\underline{k}_2)\cdot\underline{x} + (\varphi_1-\varphi_2)\right]\right) dt \right\}$$

$$= \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{1}{2}\left(\underline{E}_{01}\cdot\underline{E}_{01} + \underline{E}_{02}\cdot\underline{E}_{02} + 2\underline{E}_{01}\cdot\underline{E}_{02} \cos\left[(\underline{k}_1-\underline{k}_2)\cdot\underline{x} + (\varphi_1-\varphi_2)\right] \right)$$

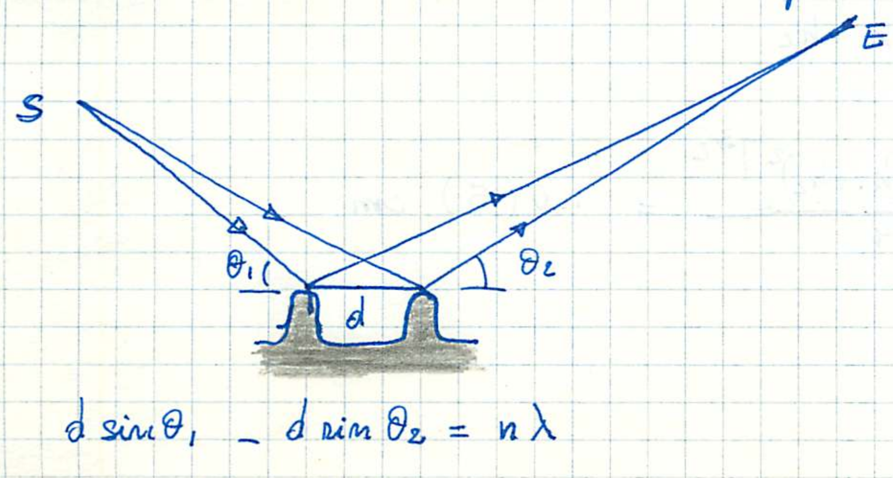
$$I(\underline{x}) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{1}{2} \left| \underline{E}_{01} e^{i\left(\underline{k}_1\cdot\underline{x} - \omega t + \varphi_1\right)} + \underline{E}_{02} e^{i\left(\underline{k}_2\cdot\underline{x} - \omega t + \varphi_2\right)} \right|^2$$

la regola può essere generalizzata ad un numero qualsiasi di campi

Una sorgente luminosa monocromatica ($\lambda = 550$ nm) puntiforme si trova ad altezza $h_1 = 1.0$ cm sopra il centro O di un disco fonografico. L'occhio di un osservatore, situato ad una altezza $h_2 = 10.0$ cm ed una distanza $\ell = 110.0$ cm da O, vede oltre all'immagine geometrica della sorgente un sistema di frange sulla superficie del disco causate dalla riflessione sulle creste dei solchi. Sapendo che la distanza tra i solchi è $d = 0.5$ mm, calcolare la distanza Δx tra due massimi luminosi consecutivi sul disco.



la condizione di interferenza costruttiva per i raggi riflessi da due creste di solco adiacenti e prossime al punto R è:



$$d \sin\theta_1 - d \sin\theta_2 = n\lambda$$

dove $\theta_1 = \theta_1(n)$ $\quad \theta_2 = \theta_2(n)$ $\quad$ differenziando rispetto ad n e ponendo

$\Delta\theta_1 = \theta_1(n+1) - \theta_1(n)$ $\qquad \Delta\theta_2 = \theta_2(n+1) - \theta_2(n)$

$$\lambda = d\left(\cos\theta_1\,\Delta\theta_1 - \cos\theta_2\,\Delta\theta_2\right)$$

Inoltre $a = h_1 \tan\theta_1 + h_2 \tan\theta_2$ che differenziata da

$$0 = \frac{h_1}{\cos^2\theta_1}\,\Delta\theta_1 + \frac{h_2}{\cos^2\theta_2}\,\Delta\theta_2$$

risolvendo rispetto a $\Delta\theta_1$ e $\Delta\theta_2$:

$$\Delta\theta_1 = \frac{\dfrac{\lambda h_2}{\cos^2\theta_2}}{\dfrac{d h_2 \cos\theta_1}{\cos^2\theta_2} + \dfrac{d h_1 \cos\theta_2}{\cos^2\theta_1}} \qquad \Delta\theta_2 = \frac{-\dfrac{\lambda h_1}{\cos^2\theta_1}}{\dfrac{d h_2 \cos\theta_1}{\cos^2\theta_2} + \dfrac{d h_1 \cos\theta_2}{\cos^2\theta_1}}$$

la distanza tra due massimi è:

$$\Delta x = \Delta\left(h_1 \tan\theta_1\right) = \frac{h_1}{\cos^2\theta_1}\,\Delta\theta_1 = -\Delta\left(h_2 \tan\theta_2\right) = -\frac{h_2}{\cos^2\theta_2}\,\Delta\theta_2 =$$

$$= \frac{\lambda h_1 h_2}{d h_2 \cos^3\theta_1 + d h_1 \cos^3\theta_2}$$

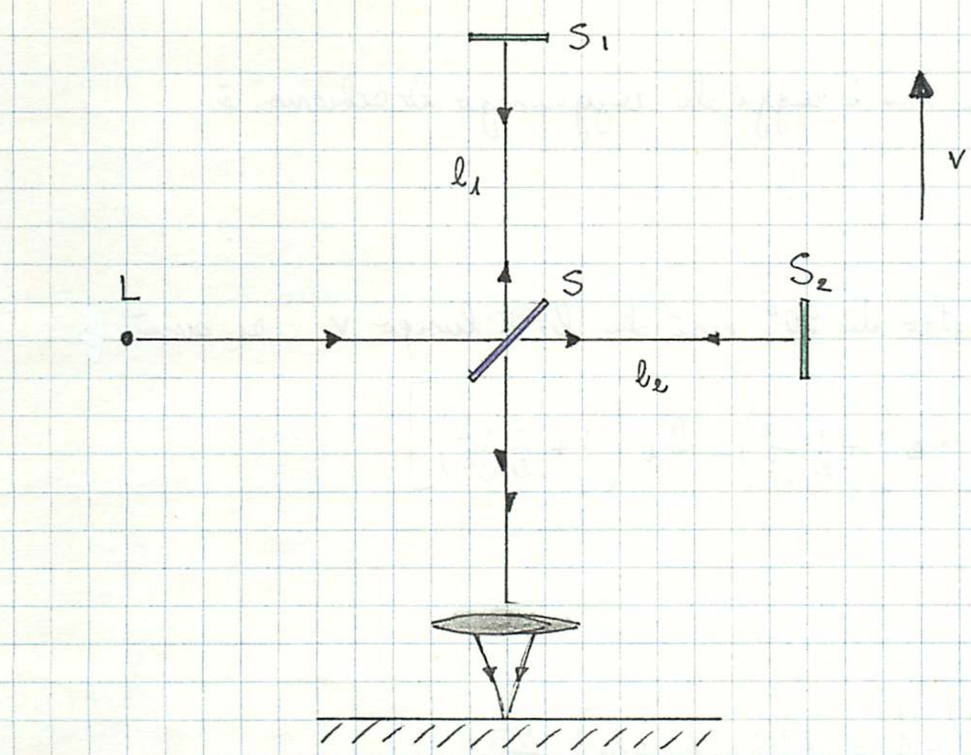
gli angoli θ_1 e θ_2 sono prossimi alla riflessione speculare:

$\theta_1 \simeq \theta_2 \simeq \theta_0$ con $(h_1+h_2)\tan\theta_0 = a$

$$\frac{1}{\cos\theta_0} = \sqrt{1+\tan^2\theta_0} = \frac{\sqrt{(h_1+h_2)^2 + a^2}}{h_1+h_2}$$

$$\Delta x = \frac{\lambda}{d}\;\frac{h_1 h_2\left[a^2 + (h_1+h_2)^2\right]^{3/2}}{(h_1+h_2)^4} = 1.0(15)\ \text{cm}.$$

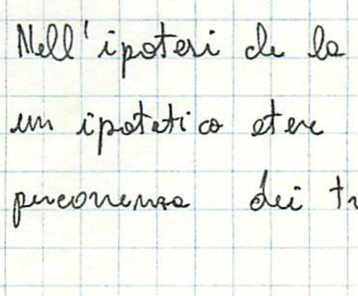
Esperimento di Michelson - Interferometro di Michelson (1881)



Siano l_1 ed l_2 le lunghezze dei due bracci dell'interferometro

Nell'ipotesi che la velocità della luce c si componga con quella v di un ipotetico etere; supposto v nella direzione di l_1 i tempi percorrenza dei tratti SS_1S e SS_2S sono:

$$t_1 = \frac{l_1}{c+v} + \frac{l_1}{c-v} = l_1 \frac{2c}{c^2-v^2} = 2\frac{l_1}{c}\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$



$$\frac{v^2 t_2^2}{4} + l_2^2 = \frac{c^2 t_2^2}{4}$$

$$t_2 = 2\frac{l_2}{\sqrt{c^2-v^2}} = 2\frac{l_2}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\Delta t \equiv t_2 - t_1 = \frac{2}{c}\left(\frac{l_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{l_1}{1-\frac{v^2}{c^2}}\right) \simeq \frac{2}{c}\left[l_2\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right) - l_1\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)\right]$$

essendo $\frac{v}{c} \ll 1$

la differenza di fase tra i raggi che raggiungono lo schermo è

$$\phi = 2\pi \frac{c\,\Delta t}{\lambda}$$

Ruotato l'interferometro di 90° così che l_2 è lungo v si avrà

$$\Delta t' = t_2' - t_1' \simeq \frac{2}{c}\left[l_2\left(1+\frac{v^2}{c^2}\right) - l_1\left(1+\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)\right]$$

$$\phi' = 2\pi \frac{c\,\Delta t'}{\lambda}$$

quindi $\Delta\phi = \phi' - \phi = \frac{2\pi c}{\lambda}\left(l_1 + l_2\right)\frac{v^2}{c^2}$

per $v \neq 0$ si ha una variazione di differenza di fase cioè uno spostamento delle righe di interferenza

per $v =$ velocità della terra $\simeq 30\ \mathrm{Km\,s^{-1}}$

$\lambda = 5500\ \text{Å}$

$l_1 \simeq l_2 \simeq 11\ \mathrm{m}$ (Michelson-Morley, 1887)

$\frac{\Delta\phi}{2\pi} \simeq 0.4$

Potere separatore di un reticolo di diffrazione

In un reticolo con N fenditure larghe b e di passo p si ha:

$$I = I_0 \left[\frac{\sin(\pi b \sin\theta/\lambda)}{\pi b \sin\theta/\lambda}\right]^2 \left[\frac{\sin(N\pi p \sin\theta/\lambda)}{\sin(\pi p \sin\theta/\lambda)}\right]^2$$

due lunghezze d'onda λ e $\lambda+\Delta\lambda$ si dicono risolte se il j-esimo massimo principale di $\lambda+\Delta\lambda$ coincide con un minimo adiacente al j-esimo massimo di λ

Si chiama potere risolutore del j-esimo massimo la quantità

$$R_j = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$$

dove $\Delta\lambda$ è la minima differenza di lunghezza d'onda risolta.

il massimo j-esimo è dato da:

$$p \sin\theta = j\lambda \quad \Rightarrow \quad \cos\theta \, \Delta\theta = \frac{j\Delta\lambda}{p}$$

i minimi adiacenti al massimo j-esimo sono dati da:

$$N\pi p \sin\theta/\lambda = Nj\pi \pm \pi$$

cioè $$\sin\theta^{\pm} = \frac{Nj \pm 1}{N} \, \frac{\lambda}{p}$$

$$\sin\theta^{+} - \sin\theta^{-} = \frac{2\lambda}{Np} = 2\sin\left(\frac{\theta^{+}-\theta^{-}}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta^{+}+\theta^{-}}{2}\right)$$

osservando che $\theta^+ \simeq \theta^- \simeq \theta$ $(N \gg 1)$ si ha:

$$\sin\left[\frac{1}{2}(\theta^+ - \theta^-)\right] \simeq \frac{1}{2}(\theta^+ - \theta^-)$$

$$\cos\left[\frac{1}{2}(\theta^+ + \theta^-)\right] \simeq \cos\theta$$

quindi

$$\frac{2\lambda}{Np} = (\theta^+ - \theta^-) \cdot \cos\theta$$

$$= 2\cancel{\Delta\theta} \cdot \frac{j\Delta\lambda}{p\cancel{\Delta\theta}}$$

$$\boxed{R_j \equiv \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = Nj}$$

Potere separatore di una apertura circolare

per una apertura circolare di diametro d il primo anello scuro capita per $\sin\theta \simeq \theta = 1.22\,\frac{\lambda}{d}$

la minima separazione angolare α tra due sorgenti puntiformi lontane si ha quando il massimo della prima capita sul primo minimo della seconda:

$$\boxed{\alpha = 1.22\,\frac{\lambda}{d}}$$