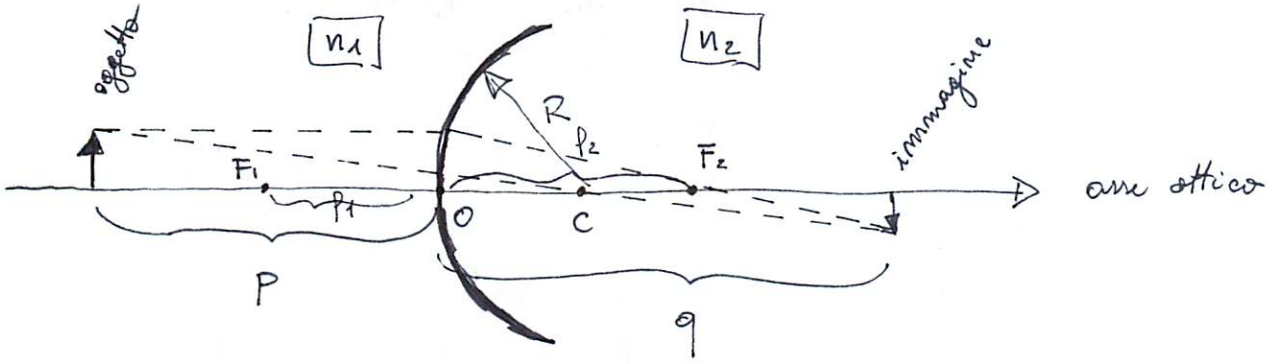
OTTICA GEOMETRICA

DIOTTRO (in approssimazione di raggi parassiali)



$$\boxed{\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R}}$$

$$\boxed{M = -\frac{n_1}{n_2}\,\frac{q}{p}}$$

convenzioni:

scelto il verso dell'asse ottico (dall'oggetto verso il diottro, ad esempio)
si fissi l'origine sulla superficie del diottro

$R > 0$ se il diottro è convesso $R < 0$ se concavo rispetto all'asse ottico

$q > 0$ se l'immagine è a destra del diottro (reale) $q < 0$ se a sinistra (virtuale)
$p > 0$ " l'oggetto " a sinistra " $p < 0$ se a destra

le distanze focali sono f_2 per $p = \infty$ f_1 per $q = \infty$

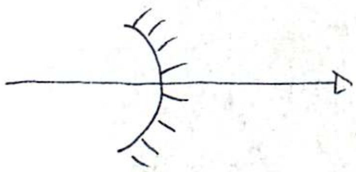
$$f_1 = R\,\frac{n_1}{n_2 - n_1} \qquad f_2 = R\,\frac{n_2}{n_2 - n_1}$$

$M > 0 \Rightarrow$ immagine dritta rispetto all'oggetto

$M < 0 \Rightarrow$ " rovesciata "

* **specchio sferico** : n_1 $\quad n_2 = -n_1$ (= riflessione)

concavo



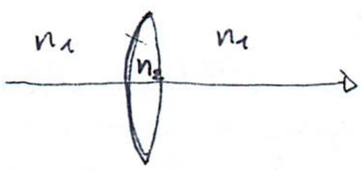
$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{-1-1}{-R} = \frac{2}{R}$$

convesso

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{-1-1}{R} = -\frac{2}{R}$$

* **lente sottile** equivale a due diottri. L'immagine dell'oggetto si forma a distanza x a destra del primo diottro $(x>0)$ ed è l'oggetto a sinistra $(x<0)$ del secondo diottro

esempio: lente sottile biconvessa



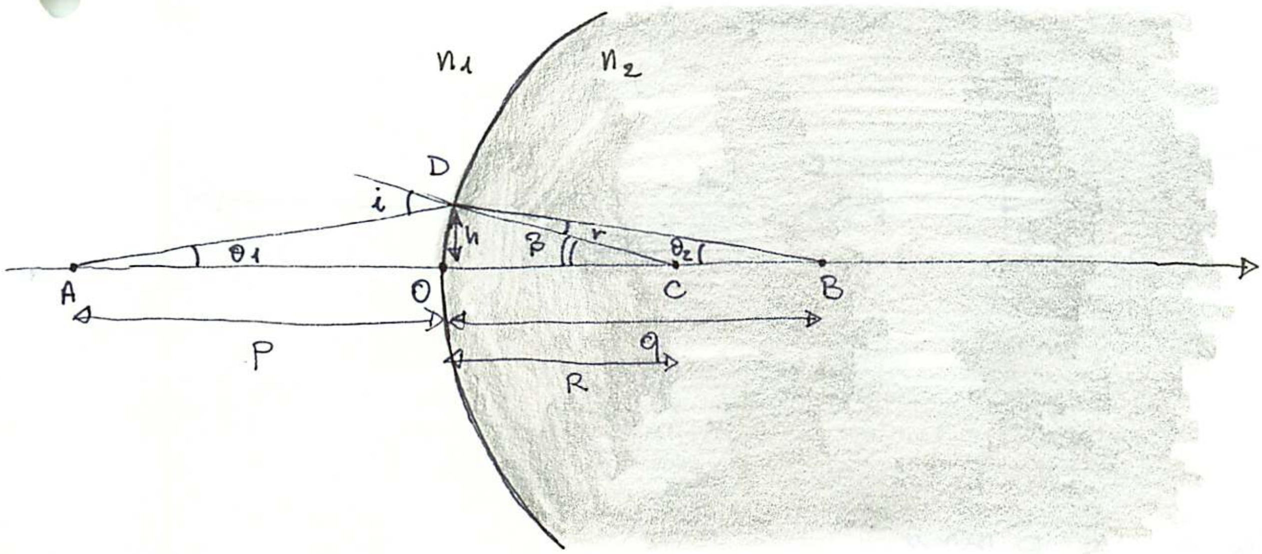
$$\begin{cases} \dfrac{n_1}{p} + \dfrac{n_2}{x} = \dfrac{n_2 - n_1}{R_1} \\[2ex] \dfrac{n_2}{-x} + \dfrac{n_1}{q} = \dfrac{n_1 - n_2}{-R_2} \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{n_2 - n_1}{n_1}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

per $p = \infty$ o $q = \infty$ si ha $\quad \dfrac{1}{f} = \dfrac{n_2 - n_1}{n_1}\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right)$

$$M = \left(-\frac{n_1}{n_2}\frac{x}{p}\right)\left(-\frac{n_2}{n_1}\frac{q}{-x}\right) = -\frac{q}{p}$$

* **lenti non sottili o sistemi ottici complessi** equivalgono ad un insieme di più diottri. L'immagine del diottro $(k-1)$ esimo è l'oggetto (a sinistra o a destra!) del diottro k-esimo.

Equazione del diottro



dal triangolo DCB : $\beta = r + \theta_2$

dal triangolo DAC : $i = \beta + \theta_1$

legge di Snell $n_1 \sin i = n_2 \sin r$

approssim. raggi parassiali $\sin i \simeq i \quad \sin r \simeq r$

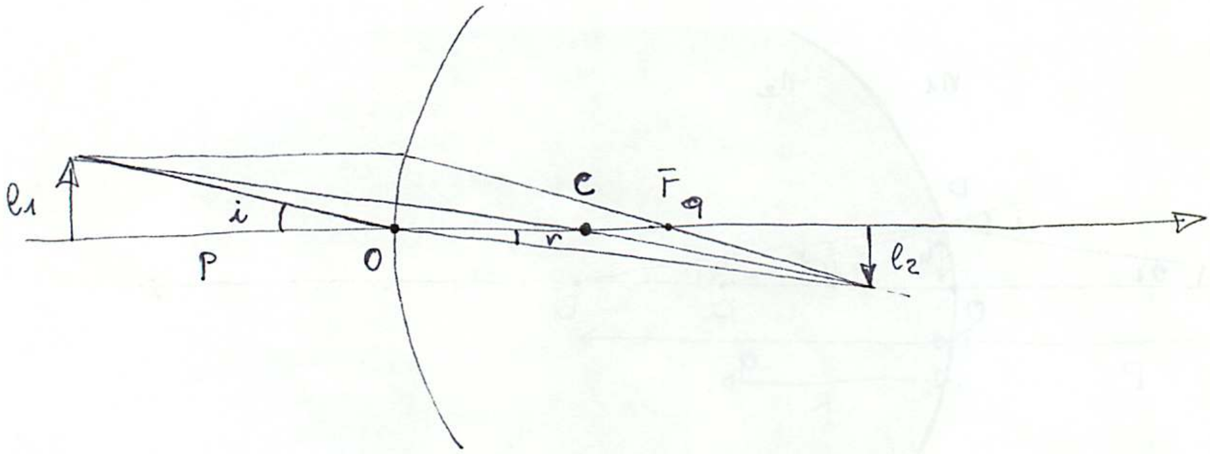
$$n_1 i = n_2 r \Rightarrow n_1(\beta + \theta_1) = n_2(\beta - \theta_2)$$

$$\theta_1 \simeq \frac{h}{p} \quad \theta_2 \simeq \frac{h}{q} \quad \beta \simeq \frac{h}{R}$$

$$n_1\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{p}\right) = n_2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{q}\right)$$

$$\boxed{\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R}}$$

Ingrandimento lineare del diottro



$$|l_1| = p \tan i \simeq p \sin i$$

$$|l_2| = q \tan r \simeq q \sin r$$

$$M \equiv \frac{l_2}{l_1} = -\frac{q \sin r}{p \sin i} = -\frac{n_1\, q}{n_2\, p}$$

$$\boxed{M = -\frac{n_1\, q}{n_2\, p}}$$

Figura 13.16 Costruzione dell'immagine nel caso di una lente convergente (a) (c) e di una lente divergente (b) (d) a seconda che l'oggetto è a distanza maggiore (a) (b) o inferiore (c) (d) della distanza focale.

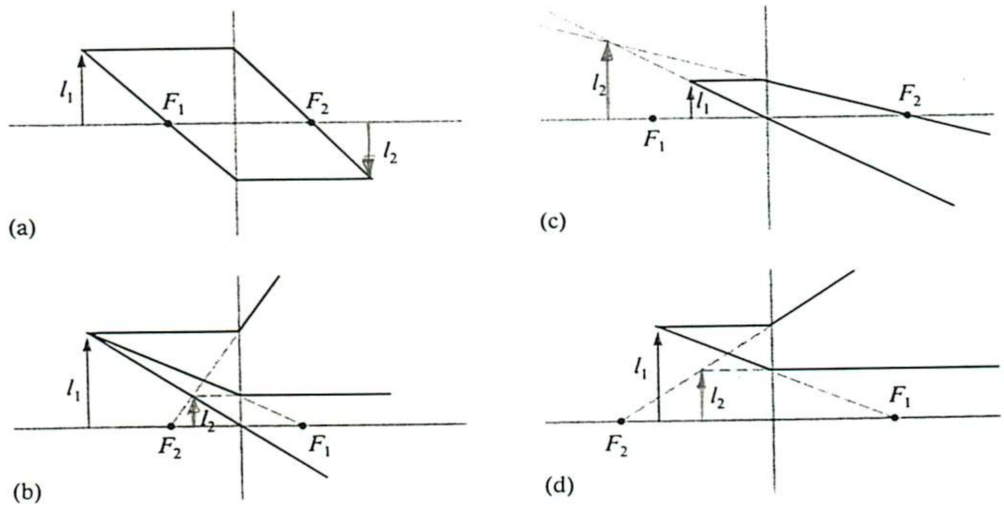
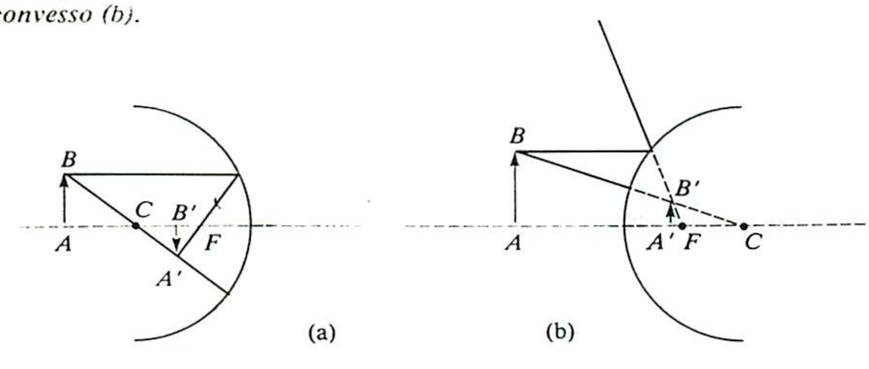


Figura 13.7 Costruzione dell'immagine data da uno specchio sferico concavo (a) e convesso (b).



Una lente sottile convergente di lunghezza focale $f = 9$ mm viene usata come obbiettivo di un proiettore. Determinare la distanza dalla pellicola a cui vanno posti la lente e lo schermo affinché si abbia una immagine ingrandita -12 volte (capovolta)

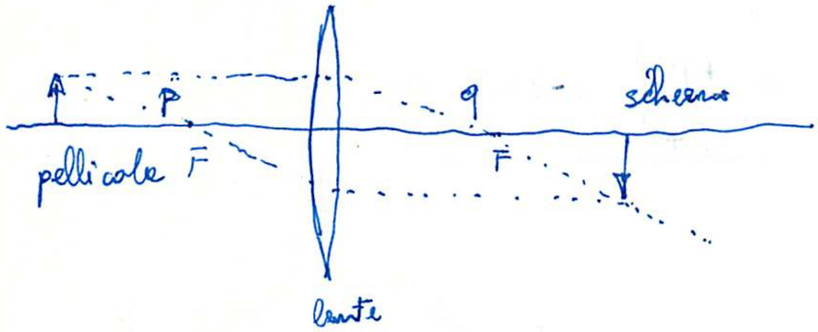
$$\begin{cases} \frac{1}{p} + \frac{n}{x} = \frac{n-1}{R} \\ \frac{n}{-x} + \frac{1}{q} = \frac{1-n}{-R} \end{cases} \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{R}(n-1)$$

$$q = +\infty \qquad p = f \qquad \frac{1}{f} = \frac{2}{R}(n-1)$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \qquad M = -\frac{q}{p}$$

$q = (-M+1) f \qquad p = \left(1 - \frac{1}{M}\right) f \qquad p = 9.75^{mm}$ = distanza lente-pellicola

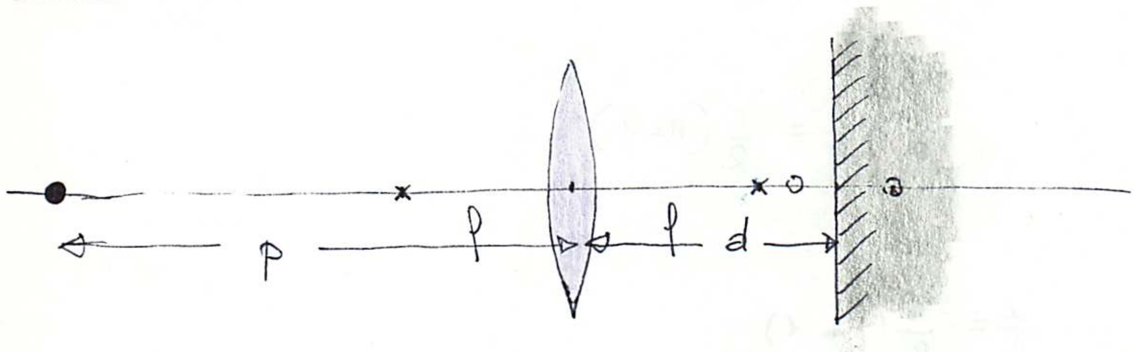
$p + q = 9.75 + 117 = 126.75^{mm}$ = distanza schermo - pellicola



lente convergente = lunghezza focale positiva es.: ()

" divergente = " " negativa es.:)(

Un sistema ottico centrato è costituito da una lente sottile convergente di lunghezza focale $f = 20$ cm e da uno specchio piano parallelo alla lente a distanza $d = 25$ cm da essa.
Determinare la posizione dell'immagine di una sorgente posta sull'asse ottico a distanza $p = 70$ cm dalla lente



la lente forma l'immagine a distanza q':

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q'}=\frac{1}{f} \qquad q'=\frac{pf}{p-f}=28\text{ cm}$$

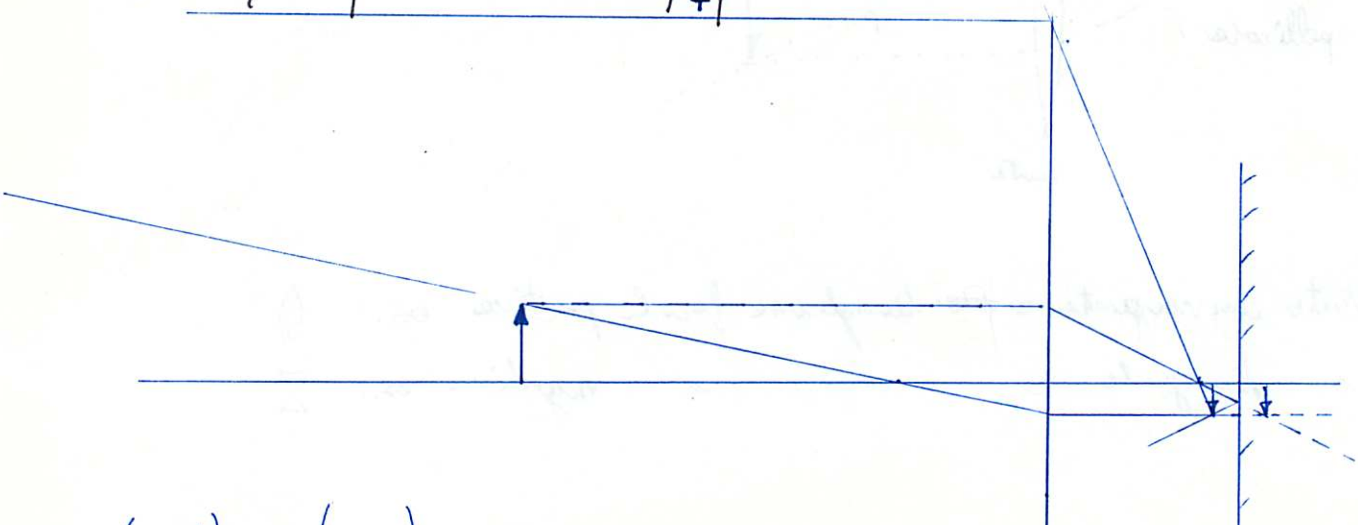
questa viene riflessa dallo specchio e diventa una nuova oggetto per la lente ad una distanza da essa $p'=-d-q''$

$$p'=-d+(q'-d)=-2d+q'=-22\text{ cm}$$

$$\frac{1}{-(q'-d)}+\frac{-1}{q''}=0 \qquad q''=-(q'-d)$$

l'immagine finale si trova a sinistra della lente a distanza $|q|$ da essa

$$\frac{1}{+p'}+\frac{1}{+q}=\frac{1}{-f} \qquad q=-\frac{+p'f}{p'+f}=-220\text{ cm}.$$



$$M=\left(-\frac{q'}{p}\right)\cdot 1\cdot\left(-\frac{q}{p'}\right)=\frac{28}{70}\;\frac{-220}{-22}=\frac{280}{70}=4$$

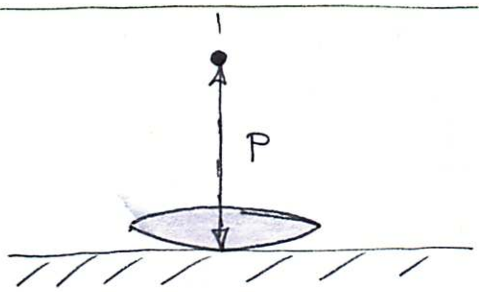
Una lente sottile biconvessa fatta di due calotte identiche con indice di rifrazione $n = 1.55$ è appoggiata su uno specchio piano.

a) Determinare il raggio R della lente affinché un oggetto posto ad una distanza $p = 25$ cm sull'asse abbia immagine sovrapposta a se stesso.

b) La distanza p di un oggetto nelle stesse condizioni dopo aver tolto una calotta dalla lente

---

a)



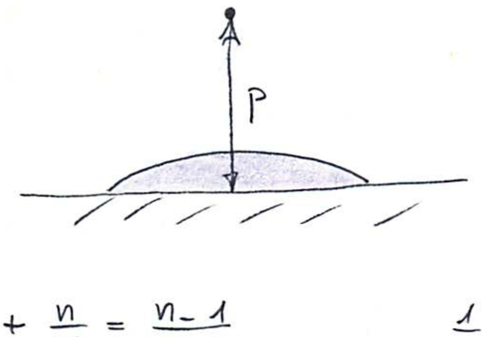
$$\begin{cases} \dfrac{1}{p} + \dfrac{n}{x} = \dfrac{n-1}{R} \\[2ex] \dfrac{n}{-x} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1-n}{-R} \end{cases} \qquad \frac{n}{x} = \frac{1}{q} + \frac{1-n}{R}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{R}(n-1)$$

affinché l'immagine si sovrapponga all'oggetto il punto deve stare nel fuoco : $q = +\infty$

$$\frac{1}{p} = \frac{2}{R}(n-1) \qquad R = 2(n-1)\,p = 27.5 \text{ cm}$$

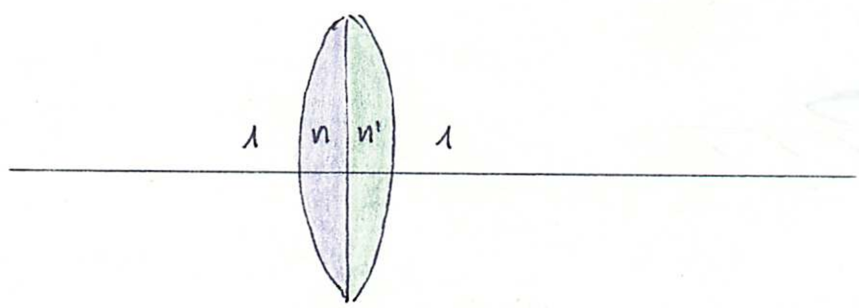
b)



$$\begin{cases} \dfrac{1}{p} + \dfrac{n}{x} = \dfrac{n-1}{R} \\[2ex] \dfrac{n}{-x} + \dfrac{1}{q} = 0 \end{cases} \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{R}(n-1)$$

per $q = +\infty$ $\qquad p = \dfrac{R}{n-1} = 50$ cm.

Due lenti sottili piano-convesse di identiche dimensioni geometriche sono poste a contatto creando un sistema ottico con distanza focale $f = 20$ cm. Sapendo il raggio di curvatura delle lenti, $R = 17$ cm., e l'indice di rifrazione della prima, $n = 1.5$, calcolare quello della seconda.



il sistema ottico è costituito da 3 diottri

$$\begin{cases} \dfrac{1}{p} + \dfrac{n}{x} = \dfrac{n-1}{R} & \text{diottro convesso} \\[2ex] \dfrac{n}{-x} + \dfrac{n'}{y} = 0 & \text{diottro piano, oggetto a destra} \\[2ex] \dfrac{n'}{-y} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1-n'}{-R} & \text{diottro concavo, oggetto a destra} \end{cases}$$

$$\frac{n'}{y} = \frac{1}{q} + \frac{1-n'}{R} \qquad \frac{n}{x} = \frac{n'}{y}$$

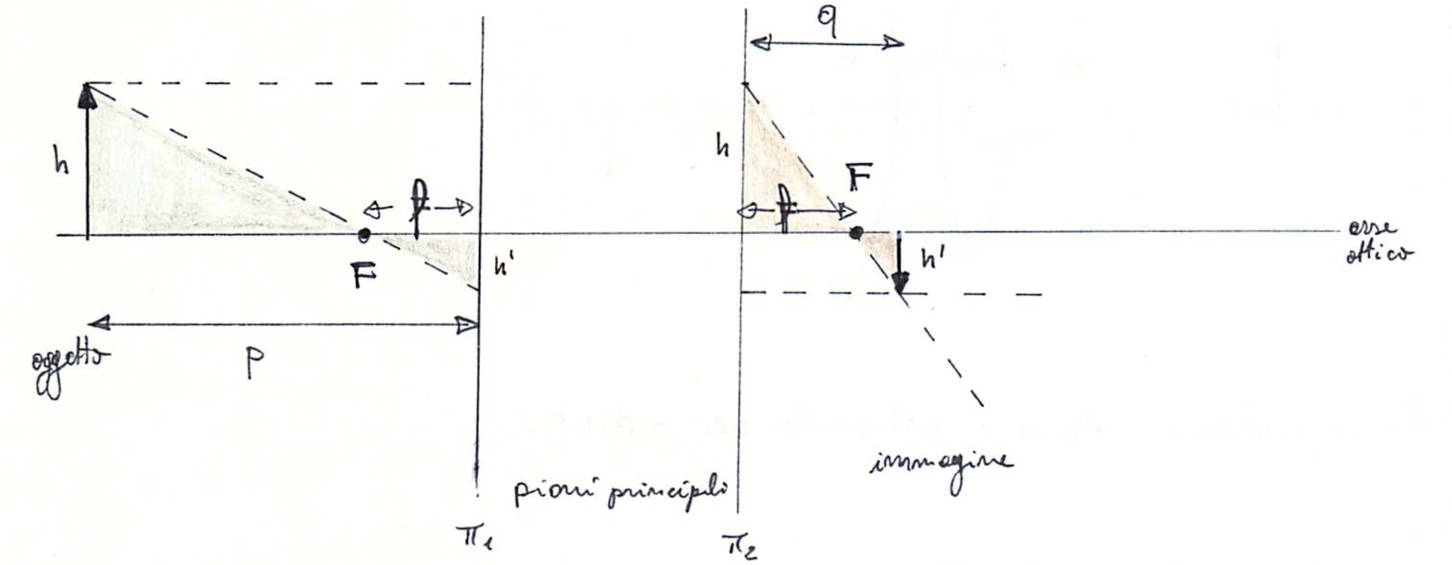
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{n'-1}{R} + \frac{n-1}{R} = \frac{n+n'-2}{R} \qquad \text{per } q = +\infty \quad p = f$$

$$n' = \frac{R}{f} + 2 - n = 1.35$$

Un sistema ottico centrato convergente forma di un oggetto una immagine reale rovesciata con ingrandimento $M = -0.125$.
Se $f = 85$ mm è la distanza focale del sistema calcolare le distanze p e q dell'oggetto e dell'immagine rispetto ai piani principali del sistema.

---

a)



in base alla figura si ha:

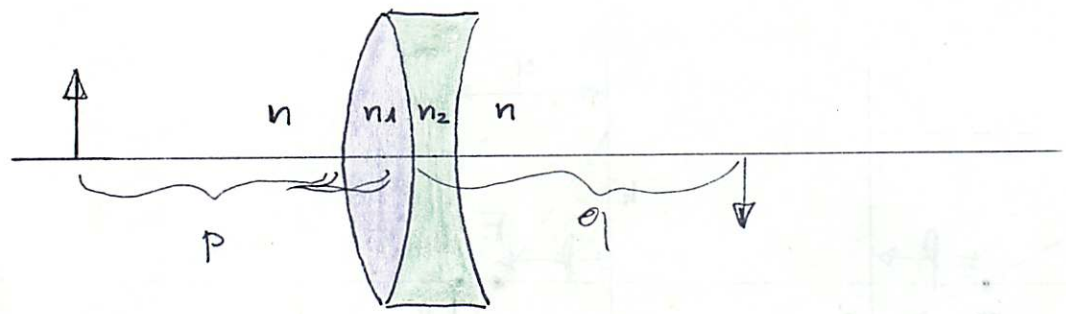
$$\frac{h}{p-f} = \frac{h'}{f} \Rightarrow p - f = f\,\frac{h}{h'} \Rightarrow p = f\left(1 + \frac{1}{|M|}\right) = 765\,\text{mm}$$

$$\frac{h'}{q-f} = \frac{h}{f} \Rightarrow q - f = f\,\frac{h'}{h} \Rightarrow q = f\left(1 + |M|\right) = 95.625\,\text{mm}$$

b) alternativamente si possono usare le equazioni

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \qquad \text{ed } M = -\frac{q}{p}$$

Due lenti sottili una biconvessa ($n_1 = 1.70$) e l'altra biconcava ($n_2 = 1.50$) di raggio $R = 10$ cm sono messe a contatto ed immerse in un mezzo con indice di rifrazione assoluto (n). Determinare n affinché il sistema ottico così costituito abbia distanza focale $f = 34$ cm.



il sistema ottico è costituito da 3 diottri

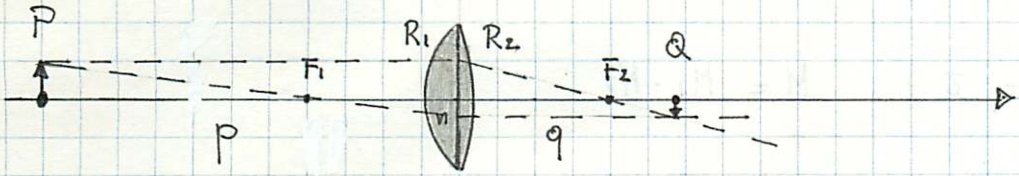
$$\begin{cases} \dfrac{n}{p} + \dfrac{n_1}{x} = \dfrac{n_1 - n}{R} & \text{diottro convesso} \\[2ex] \dfrac{n_1}{-x} + \dfrac{n_2}{y} = \dfrac{n_2 - n_1}{-R} & \text{diottro concavo con oggetto a destra} \\[2ex] \dfrac{n_2}{-y} + \dfrac{n}{q} = \dfrac{n - n_2}{R} & \text{diottro convesso con oggetto a destra} \end{cases}$$

$$\frac{n_2}{y} = \frac{n}{q} + \frac{n_2 - n}{R} \qquad \frac{n_1}{x} = \frac{n_2 - n_1}{R} + \frac{n_2 - n}{R} + \frac{n}{q}$$

$$\frac{n}{p} + \frac{n}{q} = \frac{2}{R}(n_1 - n_2) \qquad \text{per } q = +\infty \quad p \equiv f$$

$$n = \frac{2f}{R}(n_1 - n_2) = 1.36$$

Una lente biconvessa di vetro ($n = 1.5$) ha raggi di curvatura $R_1 = 20$ cm $R_2 = 30$ cm. Determinare la lunghezza focale della lente, la posizione a cui si forma l'immagine di un oggetto a distanza dalla lente $p = 60$ cm e l'ingrandimento relativo.



$$\begin{cases} \dfrac{1}{p} + \dfrac{n}{x} = \dfrac{n-1}{R_1} \\ \\ \dfrac{n}{-x} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1-n}{-R_2} \end{cases}$$

la lente viene considerata sottile : origine dei diottri coincidenti

$$\frac{n}{x} = \frac{n-1}{R_1} - \frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1-n}{R_2}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{n-1}{R_1} + \frac{n-1}{R_2}$$

i due fuochi ha la medesima distanza focale $f = f_1 = f_2$

$$\frac{1}{f} = \frac{n-1}{R_1} + \frac{n-1}{R_2} \qquad f = \frac{R_1 R_2}{(n-1)(R_1+R_2)} = 24 \text{ cm.}$$

la distanza a cui si forma l'immagine è:

$$\frac{1}{q} = \frac{n-1}{R_1} + \frac{n-1}{R_2} - \frac{1}{p} = \frac{1}{2R_1} + \cancel{\frac{1}{2R_2}} - \cancel{\frac{1}{p}}$$

$$q = 2R_1 = 40 \text{ cm}$$

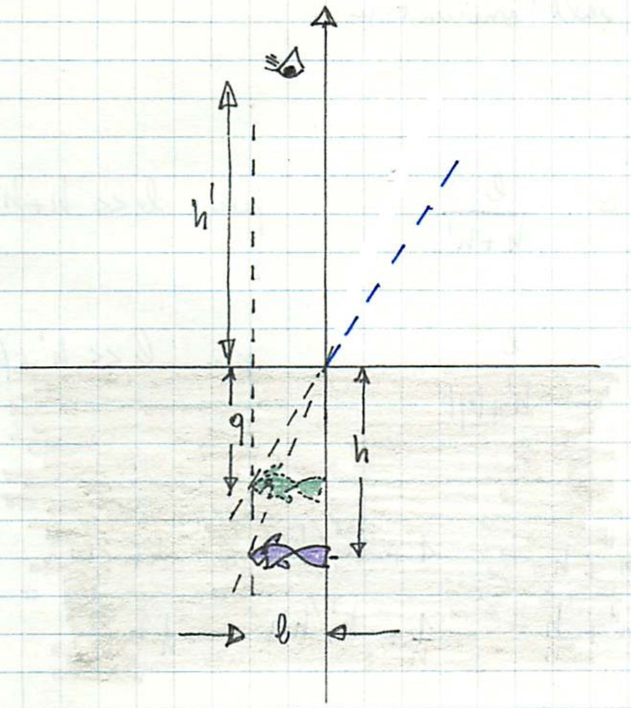
l'ingrandimento è: $M = M_1 \cdot M_2$

$$M_1 = -\frac{1}{n}\frac{x}{p} \qquad M_2 = -\frac{n}{1}\frac{q}{-x}$$

$$M = \frac{1}{n}\frac{x}{p}\frac{n}{1}\frac{q}{-x} = -\frac{q}{p} = -\frac{40}{60} = -\frac{2}{3}$$

l'immagine è reale capovolta e rimpicciolita

Un pesce di lunghezza $l = 10$ cm è immobile in uno specchio ($n=1.33$) d'acqua alla profondità $h = 1$ m. Un osservatore si trova ad una altezza $h' = 2$ m sopra l'acqua. Trovare la profondità apparente del pesce e l'ingrandimento angolare.



il pesce (oggetto) si trova a distanza h da un diottro piano ($R=\infty$) acqua-aria

$$\frac{n}{h} + \frac{1}{q} = \frac{1-n}{\infty} = 0 \qquad q = -\frac{h}{n} = -0.75 \text{ m}$$

cioè l'immagine del pesce è virtuale (si forma nell'acqua).

l'ingrandimento lineare del pesce è:

$$M = -\frac{n}{1}\,\frac{q}{h} = -\frac{n}{h}\left(-\frac{h}{n}\right) = +\frac{h}{h} = 1$$

l'immagine è dritta virtuale e non ingrandita.

l'ingrandimento angolare è il rapporto

$$M_\alpha = \frac{\alpha_i}{\alpha_0}$$

dove α_i e α_0 sono gli angoli sottesi dall'immagine e dall'oggetto dal punto dell'osservatore

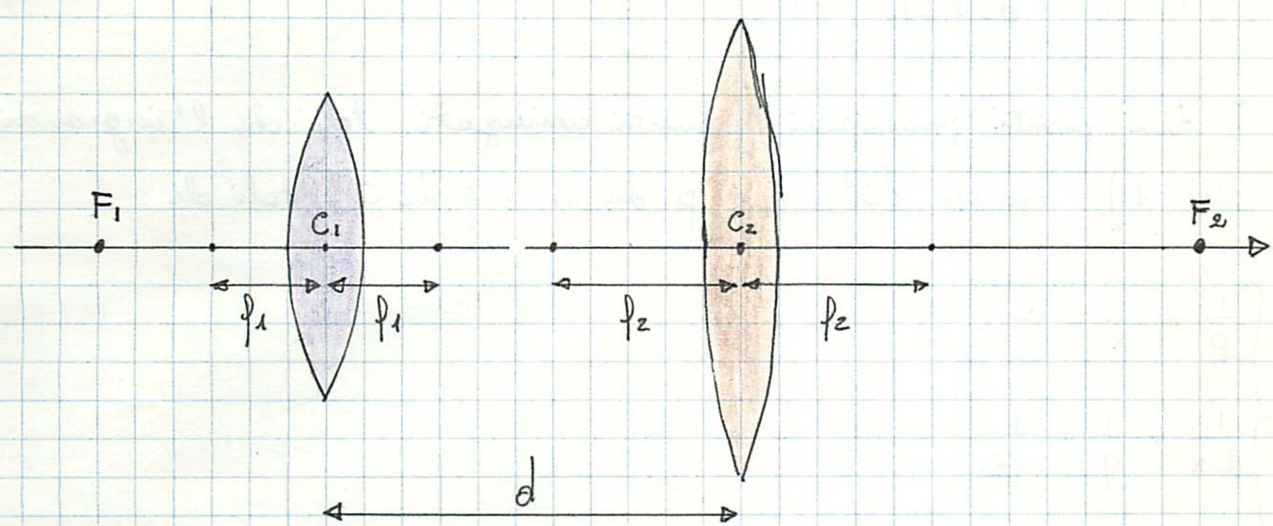
$$\alpha_0 = 2 \arctan\left(\frac{l/2}{h+h'}\right) \simeq \frac{l}{h+h'} \qquad \text{per } l \ll h+h'$$

$$\alpha_i = 2 \arctan\left(\frac{l/2}{|q|+h'}\right) \simeq \frac{l}{h'+|q|} \qquad \text{per } l \ll h'+|q|$$

$$M_\alpha = \frac{l}{h'+|q|} \cdot \frac{h+h'}{l} = \frac{h'+h}{h'+\frac{h}{n}} = \frac{1+h'/h}{\frac{1}{n}+h'/h} = \frac{1+2}{\frac{1}{n}+2} \simeq 1.09$$

Due lenti di sottili di lunghezze focali f_1 e f_2 con lo stesso asse ottico sono a distanza d. Trovare i fuochi di questo sistema ottico e i suoi punti principali

---



per ciascuna lente vale l'equazione $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f}$ (2 diottri)

per il sistema di due lenti si ha:

$$\begin{cases} \frac{1}{p}+\frac{1}{x}=\frac{1}{f_1} \\ \frac{1}{d-x}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f_2} \end{cases}$$

dove x è misurato da C_1

il primo primo punto focale F_1 è a distanza p da C_1 quando $q \to \infty$

$d-x=f_2 \qquad x=d-f_2 \qquad \frac{1}{p}=\frac{1}{f_1}-\frac{1}{d-f_2}=\frac{d-f_1-f_2}{f_1(d-f_2)}$

$$p=f_1\,\frac{d-f_2}{d-f_1-f_2} > f_1$$

Il secondo punto focale F_2 è a distanza q da C_2 per $p \to \infty$

$$x = f_1 \qquad \frac{1}{q} = \frac{1}{f_2} - \frac{1}{d-f_1} = \frac{d-f_1-f_2}{f_2(d-f_1)}$$

$$q = f_2 \, \frac{d-f_1}{d-f_1-f_2} > f_2$$

I due punti principali (punti coniugati tali che l'ingrandimento sia 1) hanno distanze p da C_1 e q da C_2 tali che:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{f_1} \\ \dfrac{1}{d-x} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{f_2} \\ 1 = \left(-\dfrac{x}{p}\right) \cdot \left(-\dfrac{q}{d-x}\right) \end{cases}$$

$$\frac{p}{x} = \frac{p}{f_1} - 1 \qquad \frac{q}{d-x} = \frac{q}{f_2} - 1$$ dividendo membro a membro:

$$1 = \frac{q/f_2 - 1}{p/f_1 - 1} \qquad \frac{p}{f_1} = \frac{q}{f_2} \equiv \eta$$

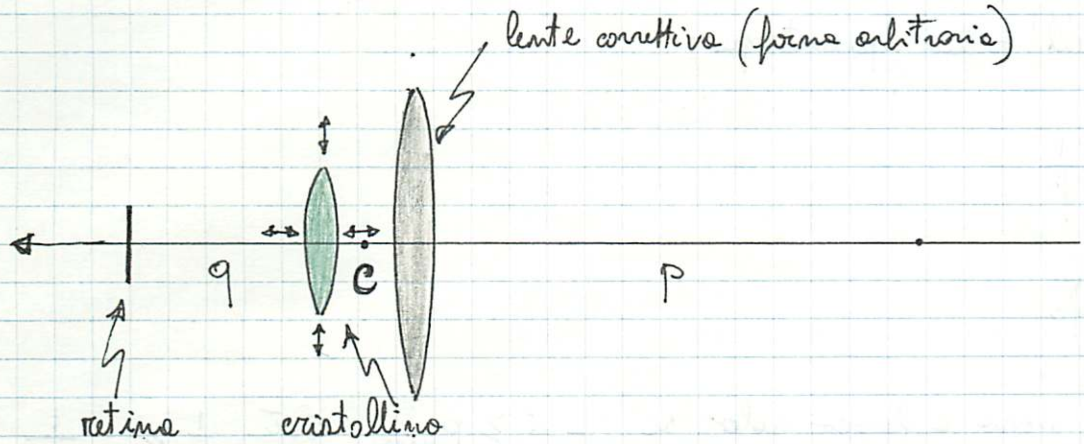
$$\frac{1}{x} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{p} = \frac{p-f_1}{f_1 p} \qquad x = \frac{f_1 p}{p-f_1} = \frac{f_1 \eta}{\eta - 1}$$

$$\frac{1}{d-x} = \frac{q-f_2}{f_2 q} \qquad d - x = \frac{f_2 q}{q-f_2} \qquad x = d - \frac{f_2 q}{q - f_2} = d - \frac{f_2 \eta}{\eta - 1}$$

$$\frac{f_1 \eta}{\eta - 1} = d - \frac{f_2 \eta}{\eta - 1} \qquad f_1 \eta = d\eta - d - f_2 \eta$$

$$\eta = \frac{d}{d-f_1-f_2} \qquad p = \frac{f_1 d}{d-f_1-f_2} \qquad q = \frac{f_2 d}{d-f_1-f_2}$$

Un occhio emmetrope (normale) può adattare il cristallino (lente) in modo da mettere a fuoco sulla retina oggetti la cui distanza p è compresa tra $p_{min} = 25$ cm. e $p_{max} = \infty$. Determinare quale lente deve essere impiegata per correggere un occhio miope in cui $p_{max} = 50$ cm ed uno ipermetrope in cui $p_{min} = 100$ cm. Si trascuri la distanza tra lente e cristallino.



Nell'ipotesi di lenti sottili e distanza lente-cristallino trascurabile sia C il centro del sistema ottico centrato.

Nel caso dell'occhio miope detta f la focale della lente e f_c quella del cristallino

$$\begin{cases} \frac{1}{p} + \frac{1}{x} = \frac{1}{f} \\ -\frac{1}{x} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f_c} \end{cases}$$

q è la distanza cristallino-retina fissa.

f_c può variare mettendo a fuoco finché $-x \leq p_{max}$

$\frac{1}{x} \leq -\frac{1}{p_{max}}$

Volendo mettere a fuoco punti all'infinito ($p = \infty$):

$$-\frac{1}{p_{max}} \geq \frac{1}{f} \qquad f \leq -p_{max} = -50 \text{ cm}$$

la lente deve avere un numero di diottrie

$$D \leq \frac{1}{f(m)} = -2$$

(anche $D = -3$ andrebbe bene ma il cristallino non sarebbe sfruttato al massimo).

Nel caso dell'occhio ipermetrope:

$$\begin{cases} \frac{1}{p} + \frac{1}{x} = \frac{1}{f} \\ -\frac{1}{x} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f_c} \end{cases}$$

ora mi ho messo a fuoco solo se $-x \geq p_{min}$ cioè $\frac{1}{x} \geq -\frac{1}{p_{min}}$

volendo mettere a fuoco punti distanti $p = 25$ cm:

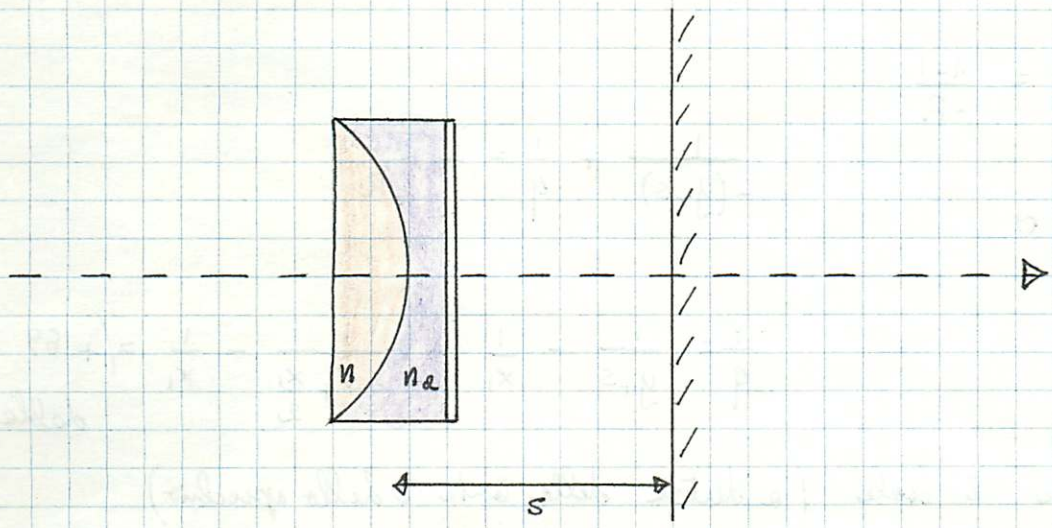
$$\frac{1}{f} - \frac{1}{p} \geq -\frac{1}{p_{min}} \qquad \frac{1}{f} \geq \frac{1}{p} - \frac{1}{p_{min}}$$

$$f \leq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p_{min}}\right)^{-1} = 33.3 \text{ cm}$$

$$D \geq \frac{1}{f(m)} = +3 \text{ diottrie}$$

Una scatola dello spessore trascurabile è chiusa da un lato da una sottile lastra trasparente e dall'altro da una lente piano convessa. Quando la scatola è vuota i raggi luminosi paralleli all'asse ottico convergono in $x_1 = 50$ cm, quando la scatola è piena d'acqua $n_a = 4/3$ convergono in $x_2 = 150$ cm. Trovare l'indice di rifrazione "n" della lente. Si supponga poi di eliminare la lastra di vetro e porre uno specchio piano a distanza $s = 2$ cm dalla lente. Trovare l'immagine di una sorgente posta a distanza $p = x_1/3$ dalla lente

---



Detto R il raggio di curvatura della lente si ha:

scatola vuota:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{p} + \dfrac{n}{x} = 0 \\[2ex] \dfrac{n}{-x} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1-n}{-R} \end{cases} \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{n-1}{R}$$

scatola con acqua:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{p} + \dfrac{n}{x} = 0 \\[2ex] \dfrac{n}{-x} + \dfrac{n_a}{y} = \dfrac{n_a - n}{-R} \\[2ex] \dfrac{n_a}{-y} + \dfrac{1}{q} = 0 \end{cases} \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{n - n_a}{R}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x_1} = \dfrac{n-1}{R} \\ \\ \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{n-n_a}{R} \end{cases} \qquad n = \frac{n_a x_2 - x_1}{x_2 - x_1} = 1.5$$

lente + specchio:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{n-1}{R} \\ \\ \dfrac{1}{s-x} + \dfrac{-1}{y} = 0 \\ \\ \dfrac{1}{-(y+s)} + \dfrac{n}{z} = \dfrac{n-1}{-R} \\ \\ \dfrac{n}{-z} + \dfrac{1}{q} = 0 \end{cases}$$

per $p = \dfrac{x_1}{3} \Rightarrow \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x_1} - \dfrac{3}{x_1} \qquad x = -\dfrac{x_1}{2} = -25\,cm$

$y = s - x = +27\ cm$ (a destra dello specchio)

$$\frac{1}{-(y+s)} + \frac{1}{q} = -\frac{n-1}{R}$$

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{y+s} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{2s + \frac{x_1}{2}} - \frac{1}{x_1} = (+69\ cm)^{-1}$$

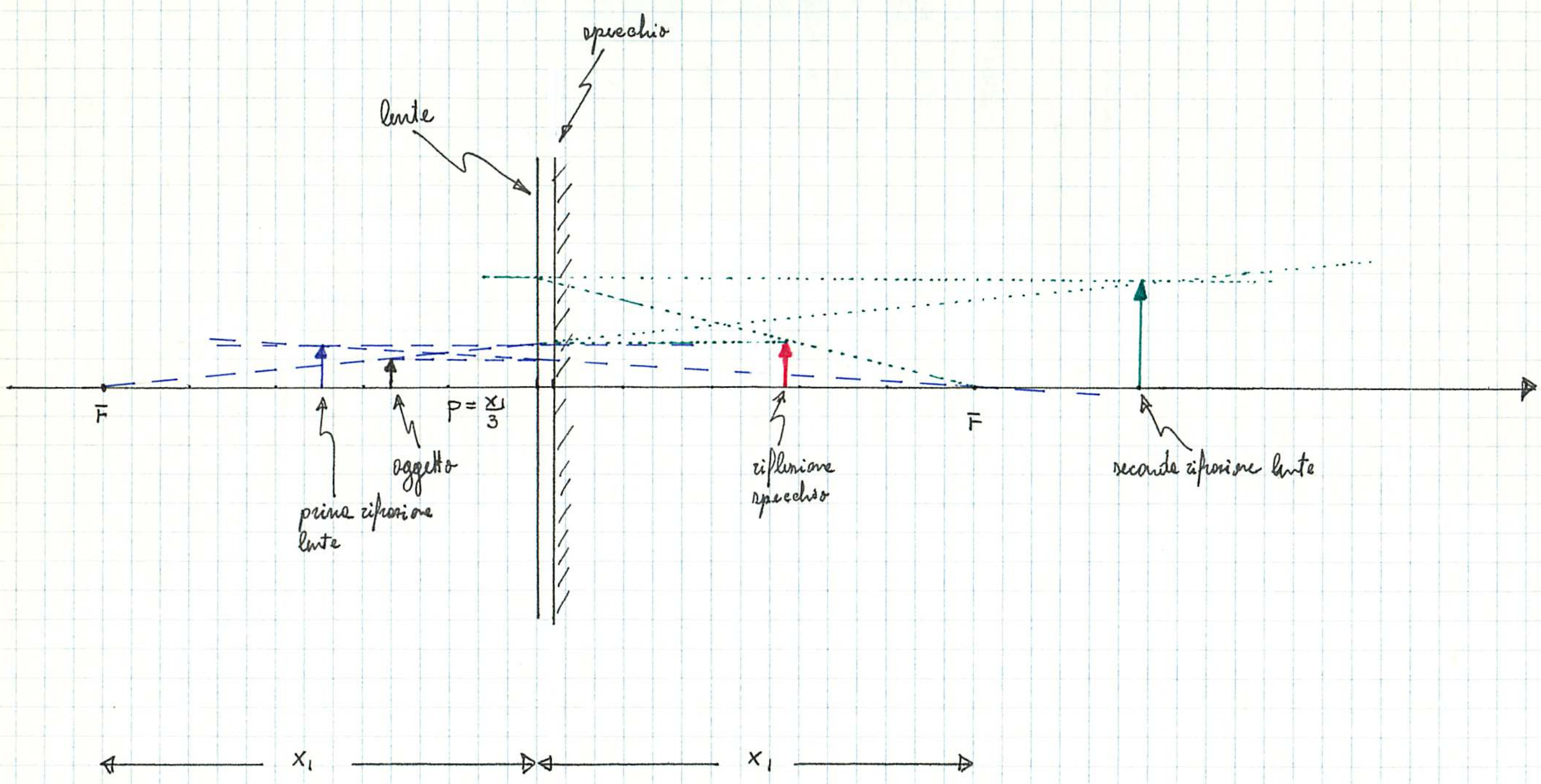
dalla lente

l'immagine è reale (a destra della lente e dello specchio)

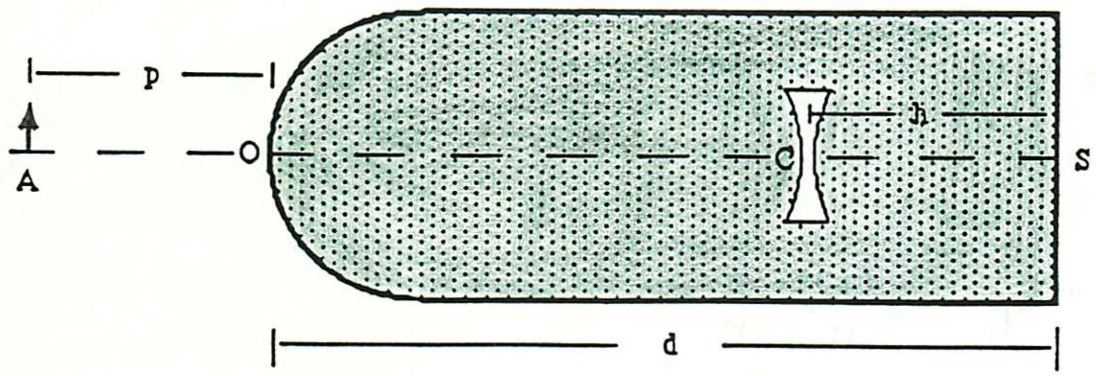
l'ingrandimento lineare vale:

$$M = \left(-\frac{x}{p}\right) \cdot 1 \cdot \left(-\frac{q}{-(y+s)}\right) = -\frac{xq}{p\,(y+s)} = +3.57$$

l'immagine è dritta $(M > 0)$ ed ingrandita $(|M| > 1)$


specchio
lente
F
P = x1/3
oggetto
prima rifrazione lente
riflessione specchio
F
seconda rifrazione lente
x1
x1

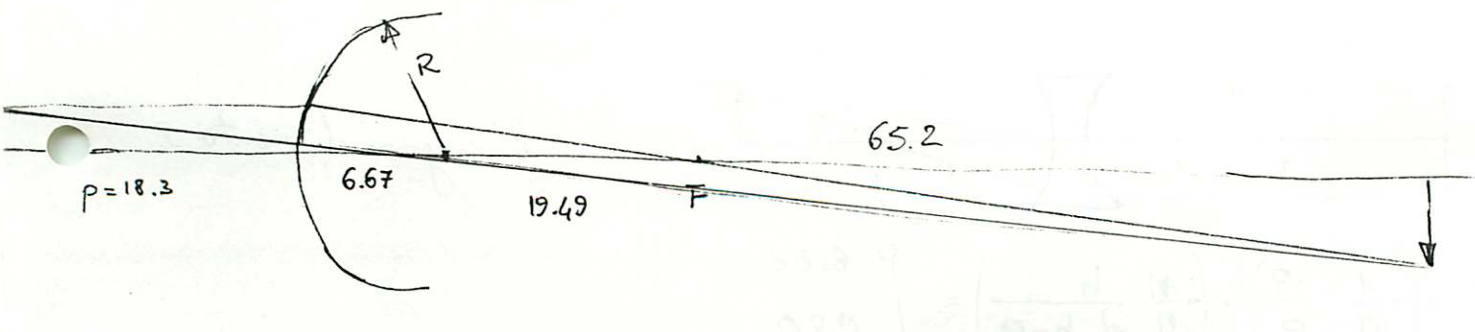
Un cilindro di cloruro di sodio (indice di rifrazione n = 1,52) è sagomato come in figura: la superficie di sinistra è costituita da una calotta sferica di raggio R = 6,67 cm, mentre la superficie di destra è uno schermo piano S. La lunghezza totale del cilindro è d = 103 cm. Il cilindro, sulla cui superficie laterale è un materiale che assorbe perfettamente la luce, si trova immerso nel vuoto. A una distanza p = 18,3 cm dal vertice O, perpendicolarmente all'asse del cilindro, è posto un oggetto A di dimensioni ridotte rispetto a R. Si vuole scavare nel cilindro una cavità, la cui forma sia quella di una lente sottile biconcava simmetrica, con raggio di curvatura r = 4,91 cm. Determinare:
a) I valori possibili per la distanza h tra S e il centro C della cavità, se si vuole che l'immagine di A si formi su S.
b) Gli ingrandimenti lineari dell'immagine sullo schermo che si hanno in corrispondenza di quei valori possibili di h.



Il diottro di raggio R forma l'immagine di A a distanza q da O :

$$\frac{1}{p} + \frac{n}{q} = \frac{n-1}{R} \qquad R > 0$$

$$q = \frac{n p R}{(n-1)p - R} = 65.2 \text{ cm}$$



L'immagine del diottro diventa oggetto per la lente sottile

a distanza $p' = (d-h) - q$

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = \frac{1-n}{n}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \qquad r_1 = -r \quad r>0$$

$$r_2 = +r$$

imponendo $q' = h$

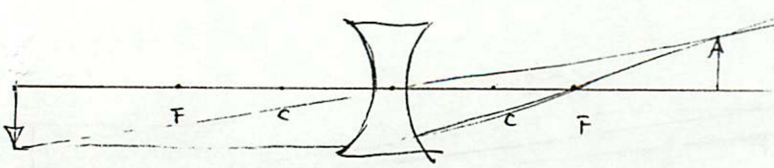
$$\frac{1}{d-h-q} + \frac{1}{h} = \frac{-1+n}{n}\,\frac{2}{r}$$

$$\frac{\cancel{h} + d - \cancel{h} - q}{dh - h^2 - qh} = \frac{2(n-1)}{nr} \qquad nr(d-q) = -h^2\,2(n-1) - (q-d)h\,2(n-1)$$

$$h^2\,2(n-1) + 2(n-1)(q-d)h + nr(d-q) = 0$$

$$h = \frac{(n-1)(d-q) \pm \sqrt{(n-1)^2(q-d)^2 - 2(n-1)nr(d-q)}}{2(n-1)}$$

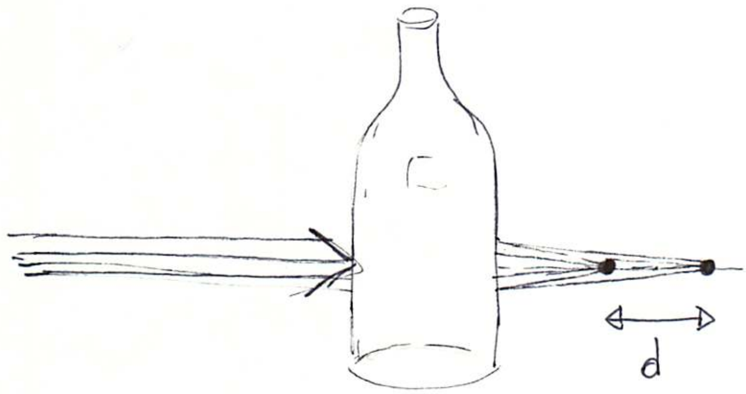
$$h = \frac{1}{2}\left[d - q \pm \sqrt{(d-q)^2 - \frac{2nr(d-q)}{n-1}}\right] = \begin{cases} 28.2 \text{ cm} \\ 9.63 \text{ cm} \end{cases}$$

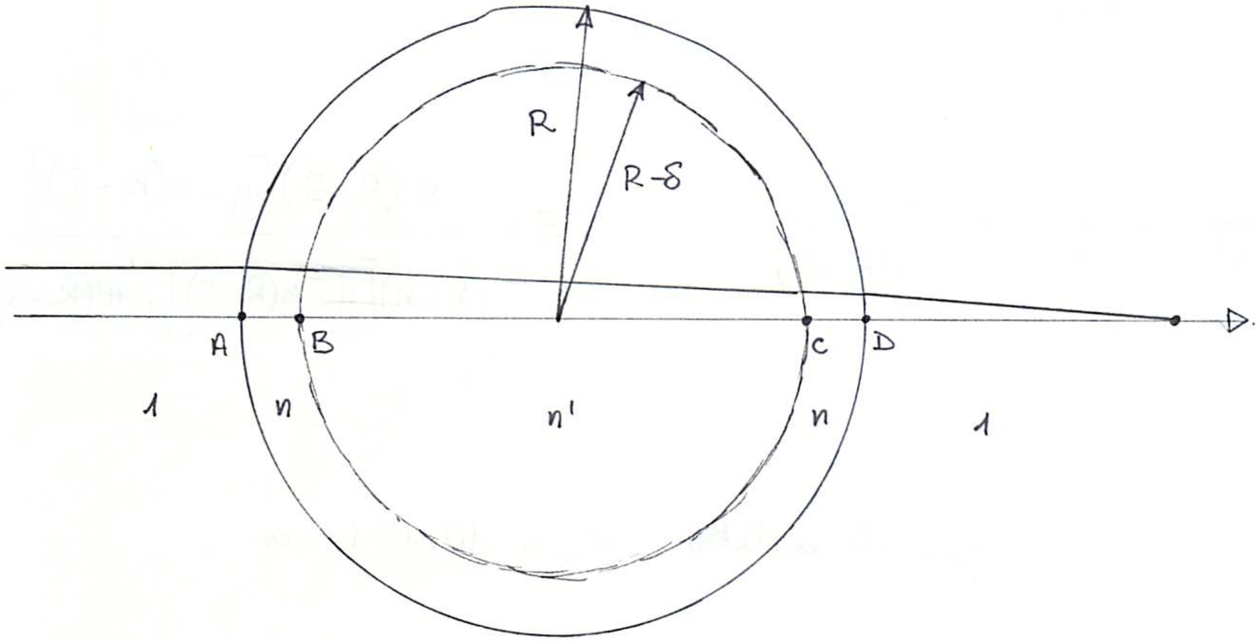


l'ingrandimento è:

$$M = \left(-\frac{1}{n}\,\frac{q}{p}\right)\cdot\left(-\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}}\,\frac{h}{d-h-q}\right) = \begin{cases} 6.88 \\ 0.80 \end{cases}$$

Un raggio di sole colpisce una bottiglia nella direzione di un suo diametro. La bottiglia ha un raggio esterno $R = 5$ cm ed è costituita da un vetro di indice di rifrazione $n = 1.5$ e spessore $\delta = 5$ mm. Essa è riempita di un liquido che ha indice di rifrazione n' dipendente dalla lunghezza d'onda. Se $n' = 1.35$ per la luce violetta e $n' = 1.30$ per quella rossa determinare la separazione d tra le immagini rossa e violetta.





il raggio di sole proveniente da distanza ∞ subisce la rifrazione attraverso 4 diottri

1° diottro; origine A

$$\frac{1}{p} + \frac{n}{x} = \frac{n-1}{R} \qquad p = \infty \qquad x = \frac{n}{n-1} R = 15 \text{ cm}$$

a destra di A

2° diottro, origine B

$$\frac{n}{-(x-\delta)} + \frac{n'}{y} = \frac{n'-n}{R-\delta} \qquad y = \frac{n'(R-\delta)(x-\delta)}{(n'-n)(x-\delta) + n(R-\delta)}$$

per il violetto $y_v = 19.254$ cm

per il rosso $y_r \simeq 22.032$ cm

3° diottro, origine C

$$\frac{n'}{-\left[y-2(R-\delta)\right]}+\frac{n}{z}=\frac{n-n'}{-(R-\delta)} \qquad z=\frac{n(R-\delta)\left[y-2(R-\delta)\right]}{(n'-n)\left[y-2(R-\delta)\right]+n'(R-\delta)}$$

per il violetto $z_v = 15.256$ cm

per il rosso $z_r = 23.816$ cm

4° diottro, origine D

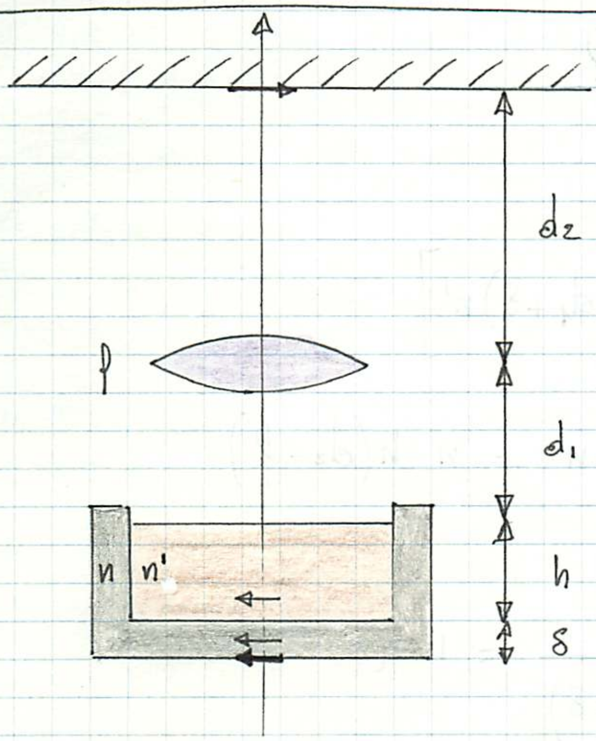
$$\frac{n}{-(z-\delta)}+\frac{1}{q}=\frac{1-n}{-R} \qquad q=\frac{R(z-\delta)}{(n-1)(z-\delta)+nR}$$

per il violetto $q_v = 4.959$ cm

per il rosso $q_r = 6.085$ cm

$d = q_r - q_v = 11.26$ mm

Un recipiente di vetro (indice di rifrazione $n=1.5$ spessore delle pareti $\delta = 0.8$ cm) contenente un liquido trasparente con indice di rifrazione n' incognito viene appoggiato sopra un oggetto di spessore trascurabile. Una lente sottile convergente di lunghezza focale $f=10.0$ cm viene posta ad una distanza $d_1=8.0$ cm dalla superficie superiore del liquido e l'immagine dell'oggetto si forma su uno schermo distante dalla lente $d_2 = 27.0$ cm.
Sapendo che l'altezza del liquido nel recipiente è $h=9.0$ cm calcolare n' e l'ingrandimento lineare dell'oggetto.



Considerato l'asse ottico orientato come in figura, la rifrazione attraverso le interfacce vetro-liquido e liquido-aria e la lente sottile sono descritte da:

$$\begin{cases} \dfrac{n}{\delta} + \dfrac{n'}{x} = 0 \\[2mm] \dfrac{n'}{h-x} + \dfrac{1}{y} = 0 \\[2mm] \dfrac{1}{d_1 - y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{f} \end{cases}$$

dove x y e z sono distanze orientate rispetto alle interfacce vetro-liquido e liquido-aria e al centro della lente, rispettivamente

$$X = -\delta \frac{n'}{n}$$

$$\frac{1}{y} = -\frac{n'}{h + \delta \frac{n'}{n}} = -\frac{n'n}{nh + n'\delta} \qquad y = -\frac{nh + n'\delta}{nn'}$$

imponendo $z = d_2$

$$\frac{1}{d_1 + \frac{nh+n'}{nn'}} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{nn'}{nn'd_1 + nh + n'\delta} = \frac{d_2 - f}{d_2 f}$$

$$n d_2 f n' = (d_2 - f)\left[nh + (n d_1 + \delta) n'\right]$$

$$\left[n d_2 f - (d_2 - f)(n d_1 + \delta)\right] n' = n\, h (d_2 - f)$$

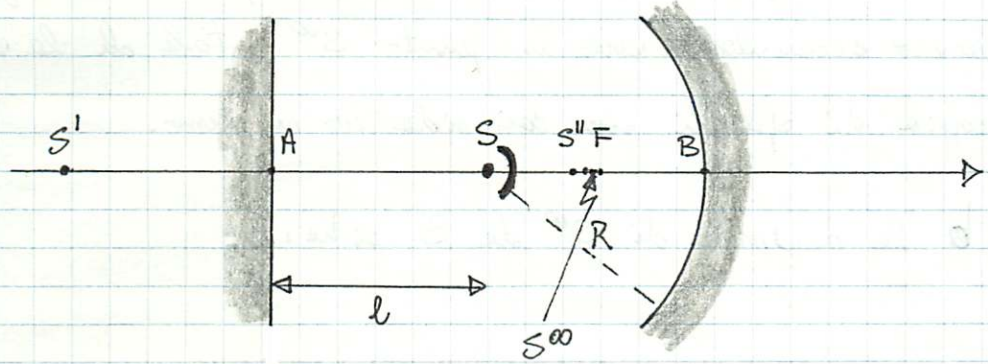
$$n' = n \frac{h(d_2 - f)}{n d_2 f - (d_2 - f)(n d_1 + \delta)} = 1.2(2)$$

Nella rifrazione attraverso le superfici vetro-liquido liquido-aria
l'ingrandimento è $M = 1$
Attraverso la lente si ha un ingrandimento

$$M = -\frac{d_2}{d_1 - y} = -\frac{d_2 nn'}{d_1 nn' + nh + n'\delta} = -1.7$$

l'immagine è rovesciata e più grande 1.7 volte.

Una sorgente puntiforme S è situata tra due specchi uno piano e l'altro concavo con $R = 20$ cm. La sorgente si trova al centro di curvatura dello specchio concavo e a distanza $l = 20$ cm da quello piano. Grazie ad uno schermo la luce di S non raggiunge direttamente lo specchio concavo. Trovare le posizione delle immagini di S



La sorgente S viene riflessa dallo specchio piano in S'

Fissato il verso dell'asse ottico come in figura e posto $|X| = |S'A|$

$$\frac{1}{-l} + \frac{-1}{X} = \frac{-1-1}{\infty} = 0 \qquad X = -l$$

l'immagine è virtuale alla stessa distanza di S dallo specchio

S' diventa oggetto per la riflessione nello specchio sferico che crea l'immagine S''; detto $|q| = |S''B|$ si ha:

$$\frac{1}{2l+R} + \frac{-1}{q} = \frac{-1-1}{-R}$$

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{2l+R} - \frac{2}{R} = \frac{R-4l-2R}{(2l+R)R} \qquad q = \frac{-R(2l+R)}{R+4l} = -12 \text{ cm} = -\frac{R}{2}\,\frac{2l+R}{2l+\frac{R}{2}}$$

Si noti che S'' si forma prima del fuoco F (distante $\frac{R}{2}$ da B) dello specchio sferico

S'' si riflette sullo specchio piano creando S''' la quale tramite lo specchio sferico crea S^{IV}

S^{IV} si trova tra S'' e F

Il processo si ripete infinite volte con infinite immagini che si vanno accumulando verso un punto S^{∞} tale che la sua immagine sulla coppia di specchi coincide con se stesso.

Detta b la distanza di S^{∞} da B si ha:

$$\frac{1}{2(l+R-b)+b} + \frac{-1}{-b} = \frac{2}{R}$$

$$\frac{1}{2l+2R-b} + \frac{1}{b} = \frac{2}{R} \qquad \frac{\cancel{b}+2l+2R-\cancel{b}}{(2l+2R-b)\,b} = \frac{2}{R}$$

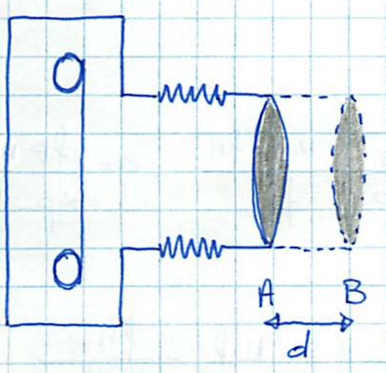
$$(l+R)\,R = (2l+2R-b)\,b \qquad \text{poiché } l=R$$

$$2R^2 = 4Rb - b^2$$

$$b^2 - 4Rb + 2R^2 = 0 \qquad b = 2R \pm \sqrt{4R^2 - 2R^2} \qquad (b < R)$$

$$b = 2R\left(1 - \sqrt{1-\frac{1}{2}}\right) = 2R\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 11.72 \text{ cm}$$

La macchina fotografica schematizzata in figura ha l'obbiettivo mobile. Nelle posizioni A e B sono messi a fuoco sulla pellicola oggetti infinitamente distanti e distanti 1 metro rispettivamente. Si calcoli la lunghezza focale dell'obbiettivo sapendo che la distanza AB è $d = 5$ cm. La macchina, a perfetta tenuta stagna, viene immersa in liquido con indice di rifrazione $n = 4/3$. Sapendo che la lente dell'obbiettivo è fatta da un materiale con indice di rifrazione $n_0 = 3/2$, si calcoli la distanza tra i punti A' e B' analoghi dei precedenti



Quando la macchina è in aria l'equazione della lente sottile che schematizza l'obbiettivo è $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$

se l'obbiettivo è in A $\quad p = \infty$ e $q = f$

se l'obbiettivo è in B $\quad p = 1\,m$ e $q = f + d$

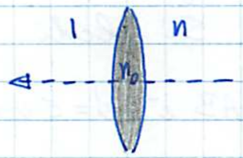
sostituendo nell'eq. della lente: $\frac{1}{p} + \frac{1}{f+d} = \frac{1}{f}$

$$\frac{1}{f+d} = \frac{p-f}{pf} \qquad fp = (p-f)(f+d) = pd - f^2 + pf - fd$$

$$f^2 + fd - pd = 0 \qquad f = \frac{-d + \sqrt{d^2 + 4pd}}{2}$$ (soluzione negativa scartata)

$$f = \frac{-5 + \sqrt{25 + 4 \cdot 100 \cdot 5}}{2} = \frac{-5 + 45}{2} = 20 \text{ cm}$$

Quando la macchina è nel liquido l'equazione della lente sottile che schematizza l'obbiettivo è:



$$\begin{cases} \dfrac{n}{p} + \dfrac{n_0}{x} = \dfrac{n_0 - n}{R} \\ -\dfrac{n_0}{x} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{1 - n_0}{-R} \end{cases} \Rightarrow \frac{n}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2n_0 - 1 - n}{R}$$

per $n = 1$ si riottiene il caso precedente, quindi: $\dfrac{2n_0 - 2}{R} = \dfrac{1}{f}$

l'equazione della lente è quindi: $\dfrac{n}{p} + \dfrac{1}{q} = \dfrac{\alpha}{f}$ $\qquad \alpha = \dfrac{2n_0 - n - 1}{2n_0 - 2} = \dfrac{2}{3}$

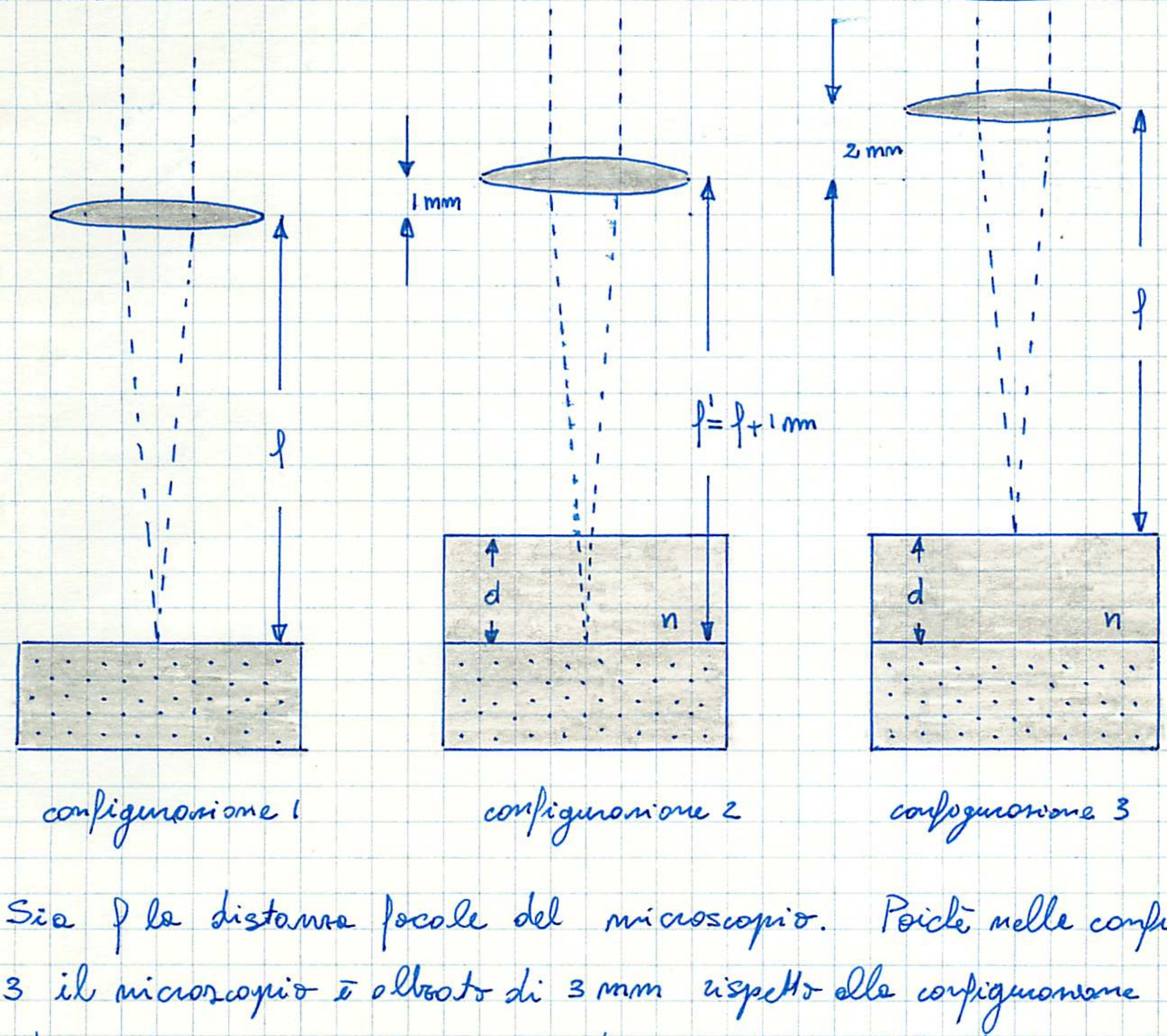
se l'obbiettivo è in A' $\quad p = \infty \quad q = f\dfrac{1}{\alpha}$

se l'obbiettivo è in B' $\quad p = 1\,m \quad \dfrac{1}{q} = \dfrac{\alpha}{f} - \dfrac{n}{p} = \dfrac{\alpha p - fn}{fp} \quad q = \dfrac{fp}{\alpha p - fn}$

quindi $\quad d' = \dfrac{fp}{\alpha p - fn} - \dfrac{f}{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha} f \left(\dfrac{\alpha p}{\alpha p - fn} - 1 \right) = \dfrac{1}{\alpha} f \, \dfrac{fn}{\alpha p - fn}$

$$= \frac{3}{2} \cdot 20 \; \frac{20\,\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}\,100 - 20\,\frac{4}{3}} = \frac{60}{2} \; \frac{80}{200 - 80} = \frac{60}{2} \; \frac{8}{12} = 20 \text{ cm}$$

Un microscopio viene messo a fuoco sulla superfice superiore di un vetrino. Un secondo vetrino viene poi appoggiato sopra al primo. Per ottenere la messa a fuoco sulla superfice inferiore del secondo vetrino il microscopio deve essere alzato di 1.0mm. Per ottenere la messa a fuoco sulla superfice superiore del secondo vetrino deve essere alzato di ulteriori 2.0 mm. Trovare lo spessore d del secondo vetrino e il suo indice di rifrazione n.



configurazione 1 configurazione 2 configurazione 3

Sia f la distanza focale del microscopio. Poiché nella configurazione 3 il microscopio è alzato di 3 mm rispetto alla configurazione 1, ed essendo in entrambi casi la distanza focale data da f, si ha

$d = 3.0\,mm$

Nella configurazione 2 la distanza focale vale $f' = f + 1\,mm$.
L'immagine formata dalla lente a distanza f diventa l'oggetto nell'attraversamento di un diottro piano : tale oggetto si trova a distanza

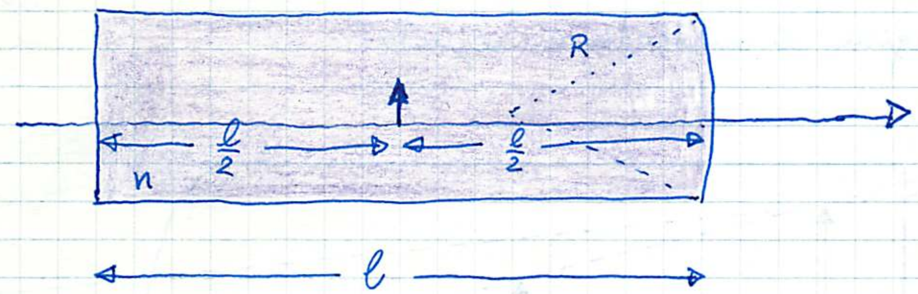
$-[d-(p'-p)]$ cioè al di sotto della superfice superiore del secondo vetrino

affinchè l'immagine si formi a distanza d da tale superfice (cioè sulla superfice inferiore del secondo vetrino) deve essere:

$$\frac{1}{-[d-(p'-p)]} + \frac{n}{d} = 0$$ da cui

$$n = \frac{d}{d-(p'-p)} = \frac{3 \text{ mm}}{(3-1) \text{ mm}} = 1.5$$

Una barra trasparente di lunghezza $l = 40.0$ cm è terminata in modo netto da una estremità e arrotondata con un raggio di curvatura $R = 12.0$ cm dall'altra. Un piccolo oggetto posto al centro della barra se guardato dalla parte della terminazione netta ha una profondità apparente $h = 12.5$ cm. Si determini l'indice di rifrazione n della barra, la profondità apparente h' e l'ingrandimento M' dello stesso oggetto quando guardato dall'altra estremità.



Quando guardato da sinistra, l'oggetto si trova a distanza $\frac{l}{2}$ da un diottro piano. L'immagine si forma a distanza h dallo stesso diottro all'interno della barra in accordo con la legge:

$$\frac{n}{-l/2} + \frac{1}{+h} = 0$$

da cui $n = \frac{l/2}{h} = \frac{20.0}{12.0} = 1.66$ $\qquad M = -\frac{n}{1}\,\frac{-h}{l/2} = 1$

Quando guardato da destra, l'oggetto si trova a distanza $\frac{l}{2}$ da un diottro concavo. Detta q la distanza dell'immagine da tale diottro si ha:

$$\frac{n}{l/2} + \frac{1}{q} = \frac{1-n}{-R}$$

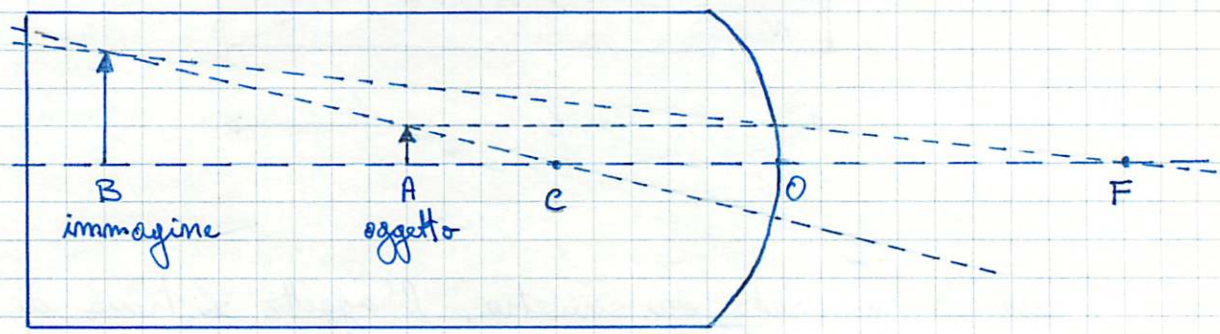
da cui $\quad \dfrac{1}{q} = \dfrac{n-1}{R} - \dfrac{n}{l/2} = \dfrac{\frac{5}{3}-1}{12} - \dfrac{\frac{5}{3}}{20}$

$$= \frac{1}{18} - \frac{1}{12} = -\frac{1}{36} \text{ cm}^{-1}$$

l'immagine si forma dentro la barra (virtuale) alla profondità $h' = 36.0$ cm rispetto al terminale curvo

L'ingrandimento vale $\quad M' = -\dfrac{n}{1}\dfrac{q}{l/2} = \dfrac{5}{3}\,\dfrac{36}{20} = 3.0$

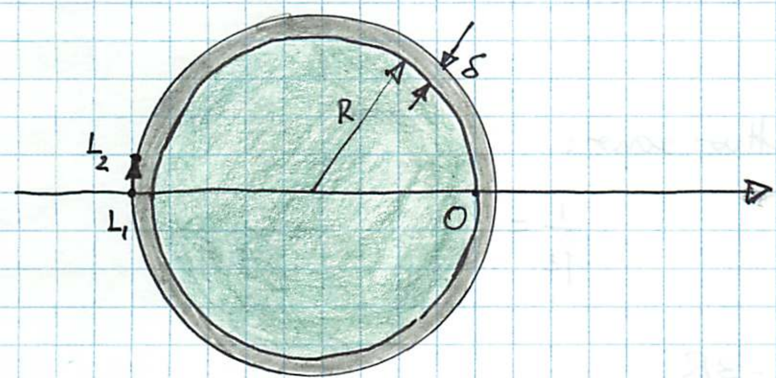
l'immagine è dritta poiché $M > 0$. La costruzione grafica dell'immagine è mostrata di seguito:



$\dfrac{n}{\infty} + \dfrac{1}{OF} = \dfrac{1-n}{-R} \qquad OF = \dfrac{R}{n-1} = 18.0$ cm

$AO = \dfrac{l}{2} = 20.0$ cm $\qquad BO = h' = 36.0$ cm. $\qquad CO = R = 12.0$ cm

Un tubo cilindrico di vetro di raggio interno R e spessore $\delta \ll R$ è riempito da un liquido di indice di rifrazione n. Sulla superficie esterna del tubo e parallelamente al suo asse vengono segnate due linee L_1 e L_2 parallele a distanza $h \ll R$. Guardando le due linee dalla parte opposta del tubo esse appaiono nello stesso ordine ma ad una distanza apparente h'. Si determini l'espressione dell'indice di rifrazione n e se ne calcoli il suo valore per $h = 1.0$ mm e $h' = 2.0$ mm.



La distanza h tra le due linee L_1 e L_2 è approssimativamente, poiché $h \ll R$, l'altezza di un oggetto perpendicolare all'asse ottico disegnato in figura.
Poiché $\delta \ll R$ possiamo trascurare la rifrazione attraverso le pareti del tubo. La rifrazione attraverso il diottro sferico liquido-aria con origine in O fornisce:

$$\frac{n}{2R} + \frac{1}{q} = \frac{1-n}{-R}$$

essendo q la distanza dell'immagine da O

$$q = 2R \frac{1}{n-2}$$

L'ingrandimento lineare dell'oggetto vale $M = -\frac{n}{1}\frac{q}{2R} = \frac{n}{2-n}$

da cui $n = \frac{2M}{M+1}$

D'altro canto $M = +\frac{h'}{h}$ (linee nello stesso ordine)

e quindi $n = \frac{2h'}{h'+h}$

Per $h = 1.0$ mm e $h' = 2.0$ mm $\quad n = \frac{4.0}{3.0} = 1.33$

La profondità apparente delle due linee è $q = 2R \frac{1}{\frac{4}{3}-2} = -3R$

Costruzione geometrica:

Le distanze focali del diottro sono:

$$\frac{n}{f_1} = \frac{n-1}{R} \qquad f_1 = R\frac{n}{n-1} \qquad \frac{1}{f_2} = \frac{n-1}{R}. \qquad f_2 = \frac{R}{n-1}$$

per $n = \frac{4}{3}$ $\quad f_1 = 4R \quad f_2 = 3R$