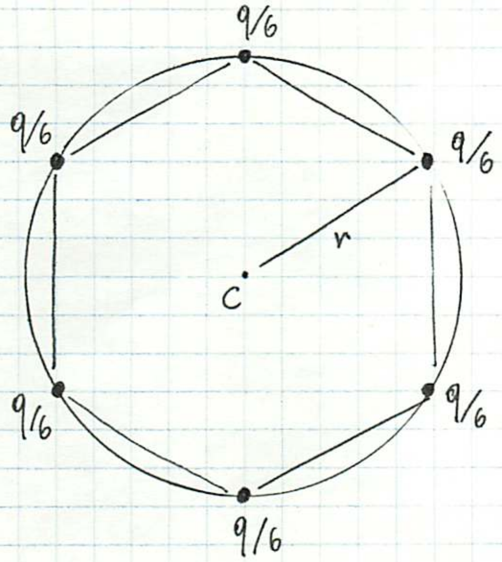
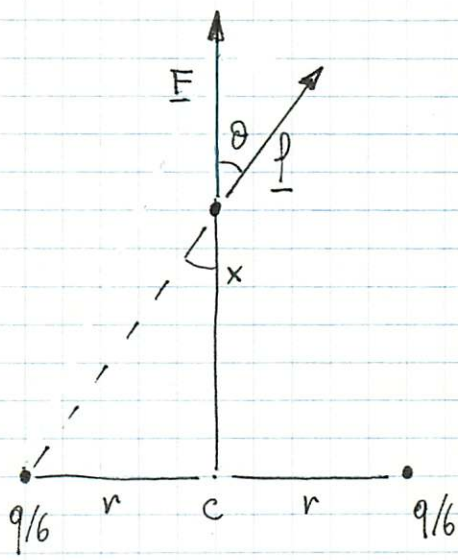
ELETTROSTATICA NEL VUOTO

Sei cariche puntiformi di valore $\frac{q}{6}$ sono collocate nei vertici di un esagono regolare inscritto in una circonferenza di raggio r. Sulla retta normale al piano dell'esagono è posta, a distanza x dal centro, una carica Q. Calcolare la forza su Q nell'ipotesi $x = r = 2$ m $q = Q = 10^{-6}$ C. Discutere il caso $x \gg r$





ogni carica esercita una forza repulsiva di modulo

$$f = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q/6\, Q}{r^2 + x^2}$$

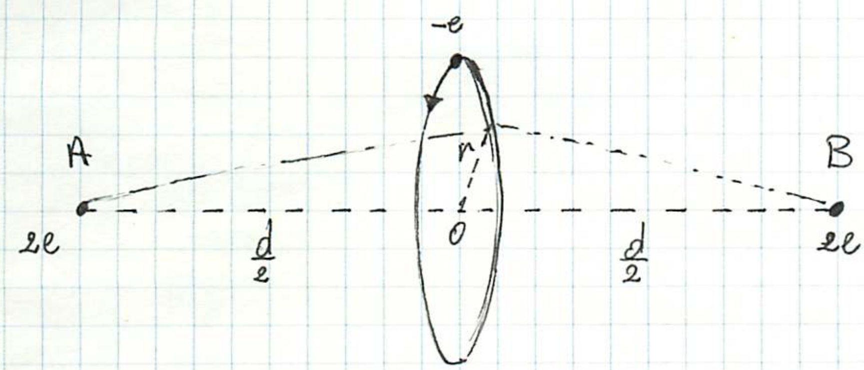
la forza totale $\underline{F}$ è diretta lungo l'asse x e vale in modulo

$$F = 6 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q/6\, Q}{r^2 + x^2} \cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qQ}{r^2 + x^2} \frac{x}{\sqrt{r^2 + x^2}}$$

$$= \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \frac{x}{(r^2 + x^2)^{3/2}} = 7.95 \; 10^{-4} \text{ Newton}$$

per $x \gg r$ $$F \simeq \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{x^2}$$

Nei punti A e B distanti tra loro $d = 3\ 10^{-10}\,m$ sono fissate due cariche elettriche uguali $q = 2e$ $(e = 1.6\ 10^{-19}\,C)$.
Un elettrone descrive nel piano assiale del segmento AB una circonferenza di raggio $r = 2\ 10^{-11}\,m$. Si calcoli il modulo v della velocità dell'elettrone e il periodo del moto.



la componente radiale dell'equazione del moto dell'elettrone è:

$$m a_r = F_{elettrica}$$

$$m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = -2\,\frac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0\left(r^2+\frac{d^2}{4}\right)}\,\frac{r}{\sqrt{r^2+\frac{d^2}{4}}}$$

$$\ddot{r} = 0 \qquad \dot{\theta} = \frac{v}{r}$$

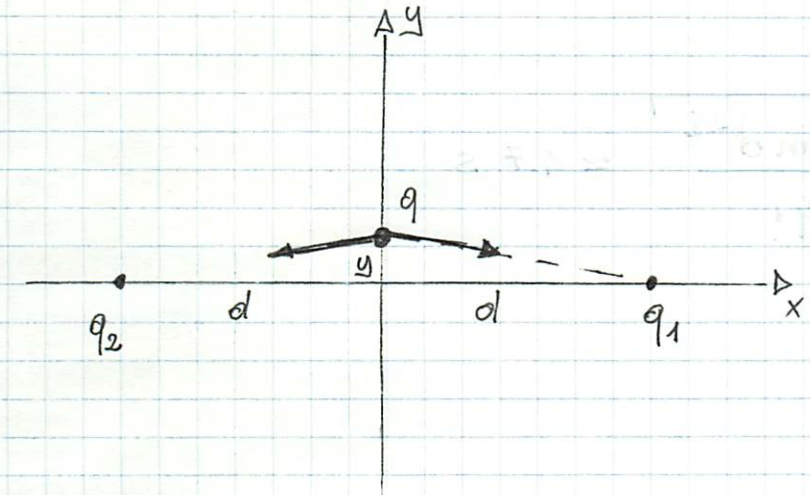
$$m\frac{v^2}{r} = \frac{4e^2}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{r}{\left(r^2+d^2/4\right)^{3/2}}$$

$$v = \sqrt{\frac{4e^2 r^2}{4\pi\varepsilon_0 m\left(r^2+d^2/4\right)^{3/2}}} = 3.4\ 10^5\ ms^{-1}$$

il periodo del moto è

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 3.7 \; 10^{-16} \; s$$

Due cariche uguali $q_1 = q_2 = 1\,\mu C$ sono vincolate nei punti $x_1 = d$ $x_2 = -d$ $d = 1\,cm$ dell'asse x. Una particella di massa $m = 10\,g$ e carica $q = -1\,\mu C$ è vincolata ad oscillare lungo l'asse ~~x~~ y (orizzontale) sotto l'azione delle forze elettriche dovute a q_1 e q_2. Quanto vale il periodo delle piccole oscillazioni?



Detto y la coordinata di q la forza dovuta a q_1 e q_2 è diretta lungo y e vale:

$$F_y = -2\frac{q\,q_1}{4\pi\varepsilon_0 (d^2+y^2)} \cdot \frac{y}{\sqrt{d^2+y^2}}$$

$$= -\frac{2\,q\,q_1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{y}{(d^2+y^2)^{3/2}}$$

L'equ. del moto è:

$$m\,\ddot{y} = -\frac{2\,q\,q_1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{y}{(d^2+y^2)^{3/2}}$$

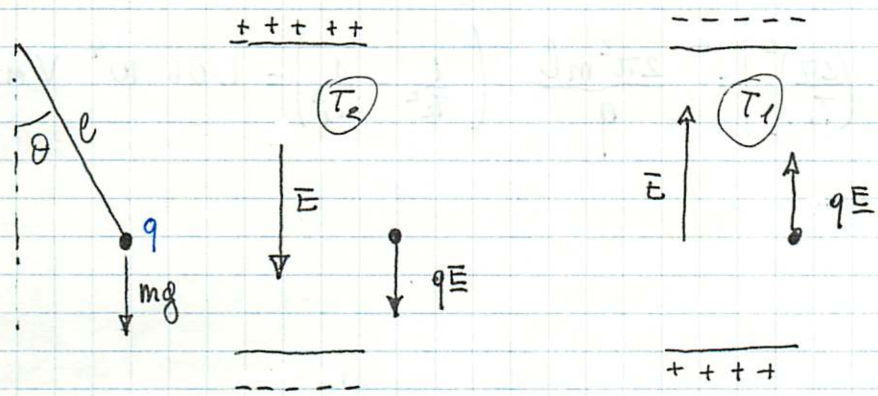
che sviluppato intorno al punto di equilibrio $y=0$ dà

$$m\ddot{y} \simeq -\frac{2qq_1}{4\pi\varepsilon_0 d^3}\, y + \dots$$

$$\ddot{y} + \frac{2qq_1}{4\pi\varepsilon_0 m d^3}\, y = 0$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{4\pi\varepsilon_0 m d^3}{2qq_1}} \simeq 4.7 \text{ s}$$

Un pendolo è costituito da un filo di lunghezza $l = 0.9\,m$ e da una sferetta di massa $m = 5\,10^{-4}\,Kg$ e carica $q = 10^{-7}\,C$.
Il pendolo è posto in un campo elettrico verticale costante E.
Se il campo elettrico è diretto verso l'alto si osserva un periodo di oscillazione $T_1 = \frac{107}{50}\,s$ se diretto verso il basso $T_2 = \frac{86}{50}\,s$
Determinare E e l'accelerazione di gravità g.



se $\underline{E}$ è diretto verso l'alto:

$$m l^2 \ddot{\theta} = -(mg - qE)\, l \sin\theta$$

per piccole oscillazioni:

$$\ddot{\theta} + \frac{g - qE/m}{l}\,\theta = 0$$

il cui periodo è $\quad T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g - qE/m}}$

se $\underline{E}$ è diretto verso il basso:

$$m l^2 \ddot{\theta} = -(mg + qE)\, l \sin\theta \qquad \ddot{\theta} + \frac{g + qE/m}{l}\,\theta = 0$$

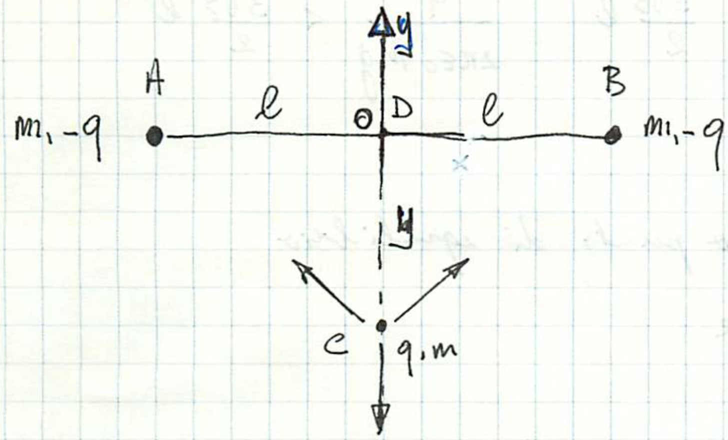
il cui periodo è $\quad T_2 = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g + qE/m}}$

$$\begin{cases} mg - qE = \left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2 m\ell \\ mg + qE = \left(\frac{2\pi}{T_2}\right)^2 m\ell \end{cases}$$

$$g = \frac{\ell}{2}\left[\left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{T_2}\right)^2\right] = 2\pi^2\ell\left(\frac{1}{T_1^2} + \frac{1}{T_2}\right) = 9.88 \quad m\,s^{-2}$$

$$E = \frac{m\ell}{2q}\left[\left(\frac{2\pi}{T_2}\right)^2 - \left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2\right] = \frac{2\pi^2 m\ell}{q}\left(\frac{1}{T_2^2} - \frac{1}{T_1^2}\right) = 1.06\ 10^4 \ V m^{-1}$$

Due particelle cariche A e B di massa m e carica $-q$ si trovano su una retta orizzontale a distanza $2l$. Una terza particella C di massa m e carica $+q$ si trova dalle precedenti sull'asse del segmento AB. Discutere le condizioni di equilibrio per C.



detta h la distanza CD si ha equilibrio quando

$$-mg - 2\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(y^2+l^2)}\frac{y}{\sqrt{y^2+l^2}} = 0$$

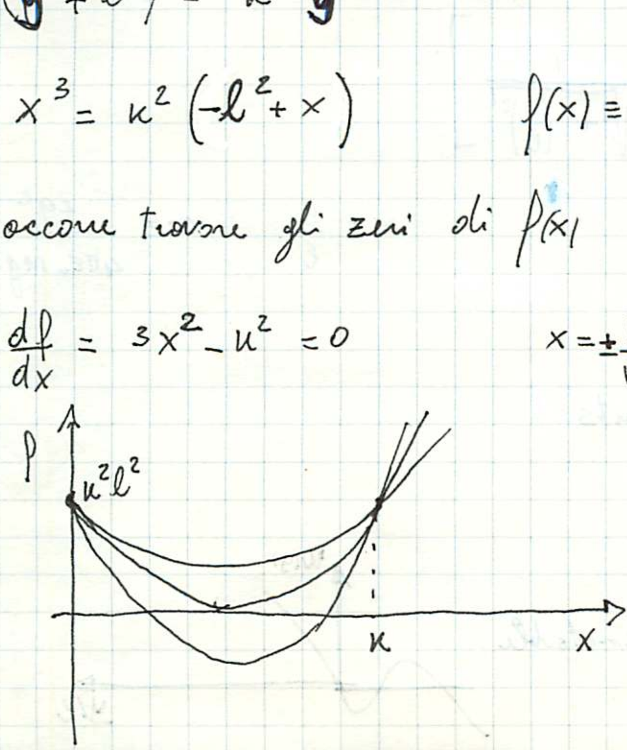
$$(y^2+l^2)^{3/2} = -\frac{2q^2}{4\pi\varepsilon_0 mg}\,y \qquad\qquad k \equiv \frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 mg}$$

$$(y^2+l^2)^3 = k^2 y^2 \qquad\qquad x \equiv y^2+l^2$$

$$x^3 = k^2(-l^2+x) \qquad\qquad f(x) \equiv x^3 - k^2x + k^2l^2$$

occorre trovare gli zeri di $f(x)$

$$\frac{df}{dx} = 3x^2 - k^2 = 0 \qquad\qquad x = \pm\frac{k}{\sqrt{3}}$$



la $f(x)$ ha un minimo in $x = \frac{k}{\sqrt{3}}$; in tale punto il suo valore è:

$$f\left(\frac{k}{\sqrt{3}}\right) = \frac{k^3}{3\sqrt{3}} - \frac{k^3}{\sqrt{3}} + k^2l^2 =$$

$$= k^2l^2 - \frac{2}{3\sqrt{3}}k^3$$

inoltre $\frac{d^2 f}{dx^2} = 6x > 0$ per $x > 0$

e $f(0) = f(k) = k^2 l^2$

Quindi se $f\left(\frac{k}{\sqrt{3}}\right) > 0$ non si hanno punti di equilibrio

$k^2 l^2 > \frac{2}{3\sqrt{3}} k^3 \qquad k < \frac{3\sqrt{3}}{2} l^2 \qquad \frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 mg} < \frac{3\sqrt{3}}{2} l^2$

se $f\left(\frac{k}{\sqrt{3}}\right) = 0$ si ha un solo punto di equilibrio

$$\frac{q^2}{2\pi\varepsilon_0 mg} = \frac{3\sqrt{3}}{2} l^2$$

se $f\left(\frac{k}{\sqrt{3}}\right) < 0$ si hanno 2 punti di equilibrio

i due punti di equilibrio x_1 ed x_2 stanno in:

$0 < x_1 < \frac{k}{\sqrt{3}} \qquad \frac{k}{\sqrt{3}} < x_2 < k$

$$U(y) = mgy \cancel{+} 2\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{l^2+y^2}} =$$

$$= mgl\left[\frac{y}{l} - \frac{2q^2}{4\pi\varepsilon_0 mgl^2}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{y}{l}\right)^2}}\right]$$

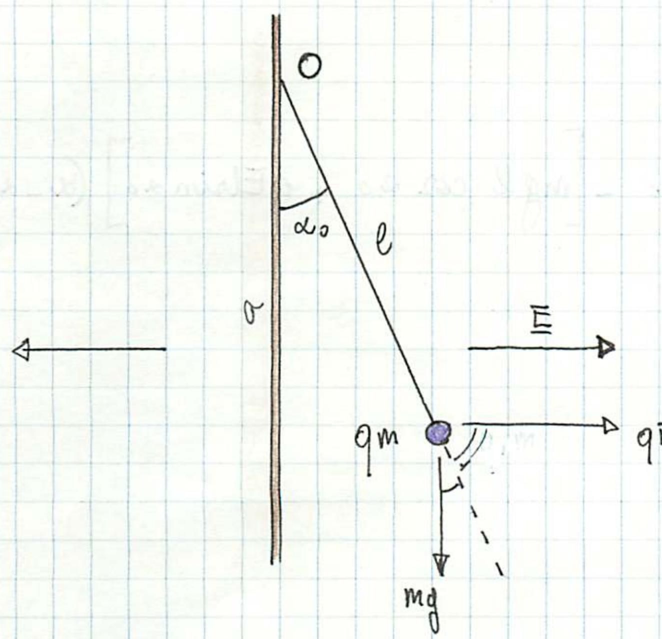
$$= mgl\left(x - \frac{a}{\sqrt{1+x^2}}\right) \qquad x \equiv \frac{y}{l} \qquad a \equiv \frac{2q^2}{4\pi\varepsilon_0 mgl^2}$$

if $a < \frac{3\sqrt{3}}{2}$ no ~~extremal~~ extremal points

if $a = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ 1 stable point

if $a > \frac{3\sqrt{3}}{2}$ 1 stable and 1 unstable

Sopra una superficie piana verticale è distribuita una carica elettrica positiva con densità $\sigma = 10\ \mu C\ m^{-2}$. Una sfera di massa $m = 1g$ e carica q è fissata ad un filo isolante avente l'altra estremità vincolata alla superficie. All'equilibrio il filo forma un angolo $\alpha_0 = \frac{\pi}{6}$ rad con la superficie; Determinare q e il periodo delle piccole oscillazioni intorno a tale posizione di equilibrio se il filo è lungo $l = 50$ cm.



Detto $\underline{T}$ la tensione del filo all'equilibrio deve essere

$$\underline{T} + m\underline{g} + q\underline{E} = 0$$

il campo elettrico $\underline{E}$ è uniforme nell'approssimazione di piano indefinito e vale :

$$\phi(E) = 2E\,A = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} \qquad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

proiettando lungo il filo e ortogonalmente ad esso si ha

$$T = mg\cos\alpha_0 + qE\sin\alpha_0$$
$$0 = mg\sin\alpha_0 - qE\cos\alpha_0$$

$$q = \frac{mg}{E} \tan\alpha_0 = \frac{2\varepsilon_0 mg}{\sigma} \tan\alpha_0 = 10^{-8}\ C$$

per $\alpha \neq \alpha_0$ l'equazione dei momenti calcolata rispetto all'asse ortogonale al piano di oscillazione e passante per O da:

$$m l^2 \ddot{\alpha} = - mg\, l \sin\alpha + qEl\cos\alpha$$

sviluppando intorno ad $\alpha = \alpha_0$

$$m l^2 \ddot{\alpha} = - mg\, l \sin\alpha_0 + qEl\cos\alpha_0 - \left[mg\, l \cos\alpha_0 + qEl\sin\alpha_0\right](\alpha - \alpha_0) + \cdots$$

posto $\theta \equiv \alpha - \alpha_0$

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{l}\cos\alpha_0 + \frac{qE}{ml}\sin\alpha_0\right)\theta = 0$$

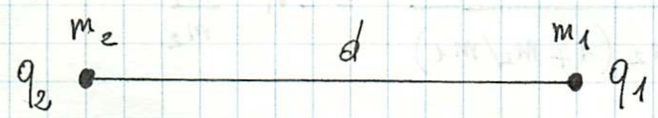
$$\omega^2 = \frac{g}{l}\cos\alpha_0 + \frac{qE}{ml}\sin\alpha_0 = \frac{g}{l}\cos\alpha_0 + \frac{g}{l}\frac{\sin^2\alpha_0}{\cos\alpha_0} =$$

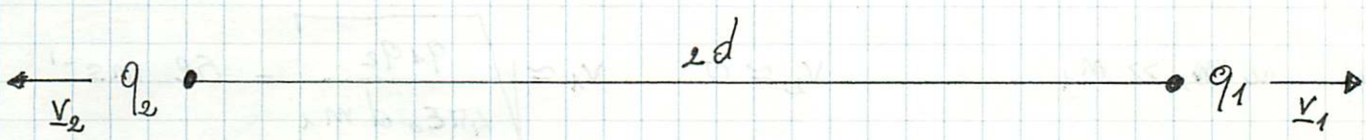
$$= \frac{g}{l}\cos\alpha_0 + \frac{g}{l}\frac{1}{\cos\alpha_0} - \frac{g}{l}\cos\alpha_0 = \frac{g}{l\cos\alpha_0} \quad \left(> \frac{g}{l}\ !\right)$$

il periodo delle piccole oscillazioni è:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\cos\alpha_0} = 1.3\ s$$

Due particelle con cariche $q_1 = 3\,\mu C$ e $q_2 = 0.5\,\mu C$ e masse $m_1 = 0.5\,g$ e m_2 interagiscono tra di loro e ad un certo istante si trovano in quiete nel vuoto a distanza $d = 1\,cm$.
Si calcolino le velocità delle due particelle quando la distanza relativa è diventata $2d$ nei casi a) $m_2 \gg m_1$ b) $m_2 = m_1$ c) $m_2 = 2m_1$.





Il sistema delle due particelle è isolato e la quantità di moto si conserva; proiettando lungo l'asse congiungente:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0$$

dove v_1 e v_2 sono le velocità quando le particelle sono a distanza $2d$

La conservazione dell'energia (cinetica + potenziale elettrostatica) dà:

$$0 + \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 d} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 2d}$$

risolvendo:

$$v_2 = -\frac{m_1}{m_2} v_1$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \frac{m_1^2}{m_2^2} v_1^2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 2d}$$

$$\frac{1}{2} m_1 \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) v_1^2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 2d}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 d\, m_1 (1 + m_1/m_2)}}$$

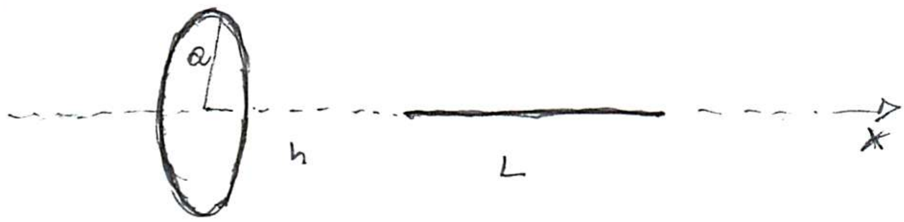
$$v_2 = -\sqrt{\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 d\, m_2 (1 + m_2/m_1)}} = -v_1 \frac{m_1}{m_2}$$

a) se $m_2 \gg m_1$ $\quad v_2 \simeq 0 \quad v_1 \simeq \sqrt{\dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 d\, m_1}} = 52 \ ms^{-1}$

b) se $m_2 = m_1$ $\quad -v_2 = v_1 = \sqrt{\dfrac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 d\, 2m_1}} = 37 \ ms^{-1}$

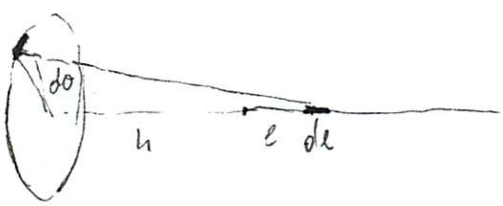
c) se $m_2 = 2m_1$ $\quad v_1 = 42 \ ms^{-1} \quad v_2 = -21 \ ms^{-1}$

Forza tra un anello ed un ago carichi uniformemente



Sia λ_1 la densità di carica sull'anello $\left(\lambda_1 = \frac{q_1}{2\pi a}\right)$

" λ_2 " " " " sull'ago $\left(\lambda_2 = \frac{q_2}{L}\right)$



La forza totale è diretta lungo l'asse x

$$d^2F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda_1 a\,d\theta \cdot \lambda_2\,dl}{\left[a^2 + (h+l)^2\right]} \cdot \frac{h+l}{\sqrt{a^2+(h+l)^2}}$$

$$= \frac{\lambda_1\lambda_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{a(h+l)}{\left[a^2+(h+l)^2\right]^{3/2}}\, d\theta\, dl$$

$$F = \iint d^2F = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^L dl \frac{\lambda_1\lambda_2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{a(h+l)}{\left[a^2+(h+l)^2\right]^{3/2}} =$$

$$= \frac{\lambda_1\lambda_2 a}{2\varepsilon_0} \int_h^{L+h} dt \frac{t}{(a^2+t^2)^{3/2}} = \frac{\lambda_1\lambda_2 a}{2\varepsilon_0} \left[\frac{-1}{\sqrt{a^2+t^2}}\right]_h^{L+h}$$

$$F = \frac{\lambda_1 \lambda_2 a}{2\varepsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2+h^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2+(L+h)^2}} \right)$$

nel limite $h >> L$ $h >> a$

$$F = \frac{\lambda_1 \lambda_2 a}{2\varepsilon_0} \left[h^{-1}\left(1+\frac{a^2}{h^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - h^{-1}\left(\left(1+\frac{L}{h}\right)^2+\frac{a^2}{h^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \right] =$$

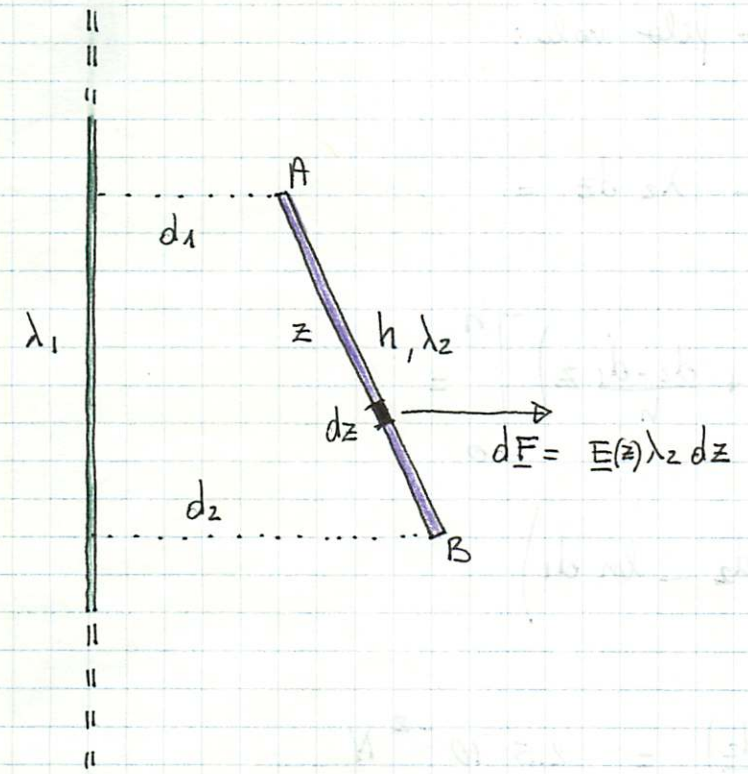
$$= \frac{\lambda_1 \lambda_2 a}{2\varepsilon_0 h} \left[1 - \frac{1}{2}\frac{a^2}{h^2} + \dots - \left(1 - \frac{1}{2}\left(2\frac{L}{h} + \frac{L^2}{h^2} + \frac{a^2}{h^2}\right) + \dots \right] $$

$$= \frac{\lambda_1 \lambda_2 a}{2\varepsilon_0 h} \left[\frac{L}{h} + O\left(\frac{1}{h^2}\right) \right] =$$

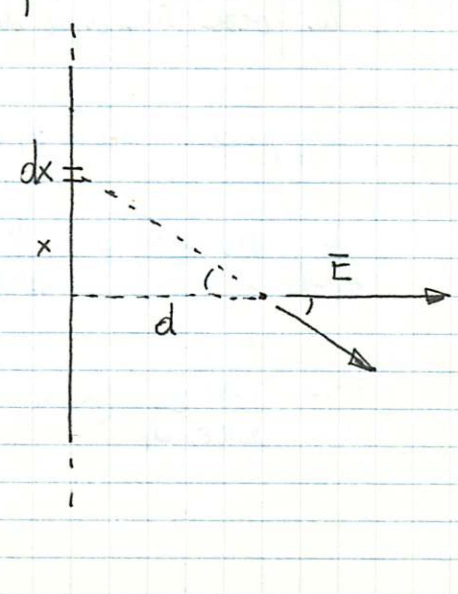
$$= \frac{\lambda_1 \lambda_2 a L}{2\varepsilon_0 h^2} + O\left(\frac{1}{h^3}\right)$$

$$= \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 h^2} + O\left(\frac{1}{h^3}\right)$$

In prossimità di un filo rettilineo di lunghezza infinita carico con densità di carica lineare λ_1 costante è situato un secondo filo di lunghezza h e densità di carica lineare λ_2 costante.
I due fili sono complanari e gli estremi del secondo filo sono a distanza d_1 e d_2 dal primo filo.
Trovare la forza tra i due fili e valutarla numericamente per $\lambda_1 = \lambda_2 = 10^{-6}\ C m^{-1}$, $d_1 = 1\ m$, $d_2 = 2\ m$, $h = 2\ m$.



Il campo elettrico generato da un filo indefinito con densità λ a distanza d vale:



$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0 (d^2 + x^2)} \frac{d}{(d^2+x^2)^{1/2}} =$$

$$= \frac{\lambda d}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(d^2+x^2)^{3/2}} =$$

ponendo $x = d \tan\theta \qquad dx = \frac{d}{\cos^2\theta}\, d\theta$

$$= \frac{\lambda d}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{d^3(\tan^2\theta+1)^{3/2}} \frac{d}{\cos^2\theta}\, d\theta =$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 d} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d}$$

teorema di Gauss:

$$\phi(E) = E\, 2\pi d h = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 d}$$

La forza esercitata sul secondo filo vale:

$$F = \int_0^h \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 \left(d_1 + \frac{d_2-d_1}{h} z\right)} \lambda_2\, dz =$$

$$= \frac{\lambda_1\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0} \left[\frac{h}{d_2-d_1} \ln\left(d_1 + \frac{d_2-d_1}{h} z\right) \right]_0^h =$$

$$= \frac{\lambda_1\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0} \frac{h}{d_2-d_1} \left(\ln d_2 - \ln d_1 \right)$$

$$= \frac{\lambda_1\lambda_2}{2\pi\varepsilon_0} \frac{h}{d_2-d_1} \ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right) = 2.5\ 10^{-2}\ N$$

la forza è perpendicolare al filo indefinito.

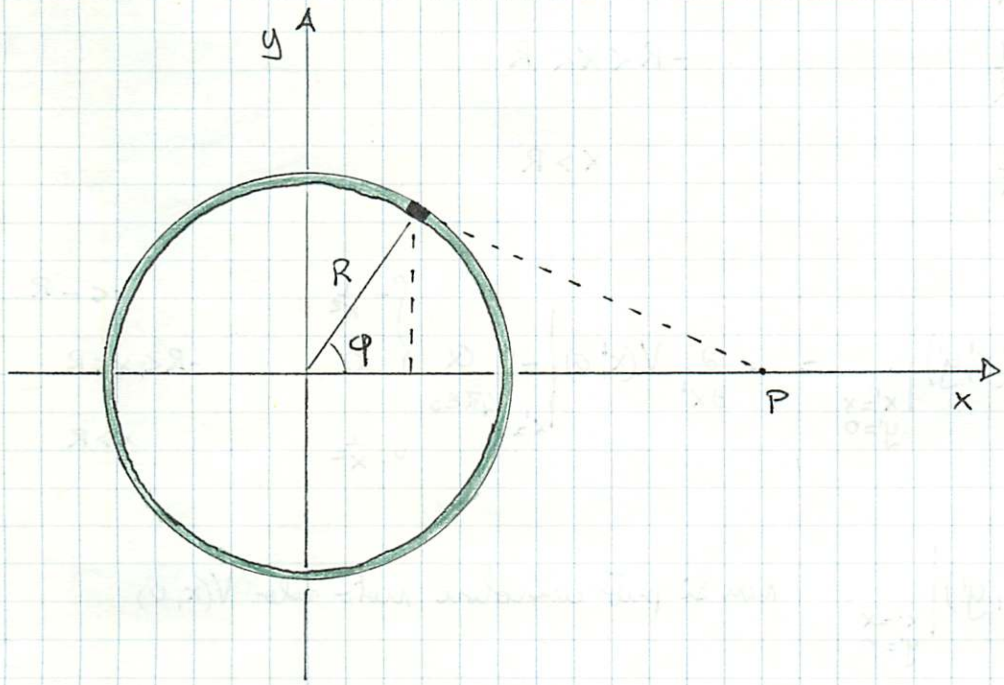
suppose $d_2 = d_1 + h \sin\phi$; for $h \ll d_1$

$$\frac{h}{d_2-d_1} \ln\left(\frac{d_2}{d_1}\right) = \frac{h}{h\sin\phi} \ln\left(1 + \frac{h}{d_1}\sin\phi\right) \simeq \frac{1}{\sin\phi} \frac{h}{d_1} \sin\phi = \frac{h}{d_1}$$

$$F \simeq \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 d_1} (\lambda_2 h)$$

wich is the interaction of a long ~~wire~~ with a point charge.

Una carica positiva è distribuita lungo una circonferenza di raggio $R = 15$ cm con una densità lineare non uniforme data $\lambda = \lambda_0 |\sin\varphi|$ dove φ è l'angolo individuato dal punto considerato rispetto ad un raggio di riferimento x e $\lambda_0 = 10^{-7}\ C\,m^{-1}$. Si determini la carica Q; il potenziale ed il campo elettrico in un generico punto dell'asse x.



$$Q = 2\int_0^{\pi} \lambda_0 \sin\varphi \; R\,d\varphi = 2\lambda_0 R \; \cos\varphi \Big|_{\pi}^{0} =$$

$$= 4\lambda_0 R = 6 \cdot 10^{-8}\ C$$

$$V(P) = V(x,0) = 2\int_0^{\pi} \frac{\lambda_0 \sin\varphi\, R\, d\varphi}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2\sin^2\varphi + (x - R\cos\varphi)^2}}$$

$$= \frac{2\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^{\pi} \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2} - 2\frac{x}{R}\cos\varphi}} =$$

$$= \frac{2\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0} \frac{R}{x} \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2} - 2\frac{x}{R}\cos\varphi}\,\Bigg|_0^{\pi} =$$

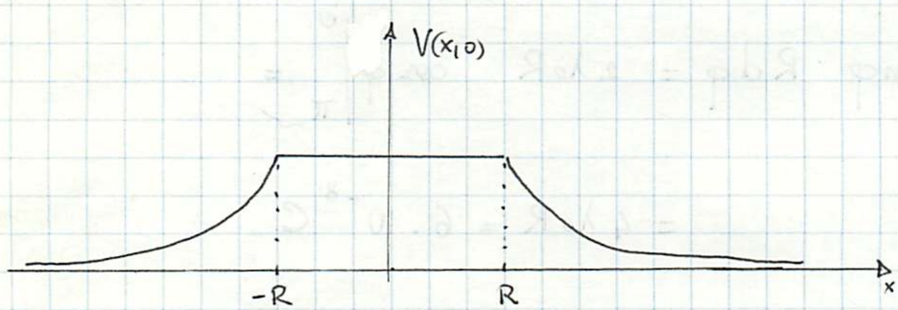
$$= \frac{2\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0} \frac{R}{x} \left(\left|1 + \frac{x}{R}\right| - \left|1 - \frac{x}{R}\right| \right) = \frac{2\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0} \frac{R}{x} \begin{cases} -2 & x < -R \\ 2\frac{x}{R} & 0 < x < R \\ 2 & x > R \end{cases}$$

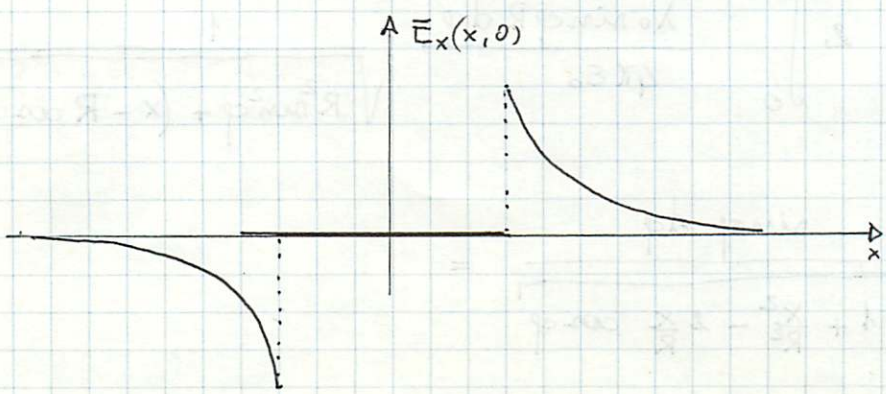
$$V(x,0) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \begin{cases} -\frac{1}{x} & x < -R \\ \frac{1}{R} & -R < x < R \\ \frac{1}{x} & x > R \end{cases}$$

$$E_x(x,0) = -\frac{\partial}{\partial x'} V(x',y')\Big|_{\substack{x'=x \\ y'=0}} = -\frac{\partial}{\partial x'} V(x',0)\Big|_{x'=x} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \begin{cases} -\frac{1}{x^2} & x < -R \\ 0 & -R < x < R \\ \frac{1}{x^2} & x > R \end{cases}$$

$$E_y(x,0) = -\frac{\partial}{\partial y'} V(x',y')\Big|_{\substack{x'=x \\ y'=0}}$$ non si può calcolare noto solo $V(x,0)$

per motivi di simmetria si può però dire che $E_y(x,0) = 0$





calcolo diretto del campo elettrico

$$E_x(x,0) = 2\int_0^{\pi} \frac{\lambda_0 \sin\varphi R\, d\varphi}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R^2\sin^2\varphi + (x-R\cos\varphi)^2} \frac{x-R\cos\varphi}{\sqrt{R^2\sin^2\varphi+(x-R\cos\varphi)^2}} =$$

$$= \frac{2\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^{\pi} \frac{\frac{x}{R}-\cos\varphi}{\left(1+\frac{x^2}{R^2}-2\frac{x}{R}\cos\varphi\right)^{3/2}} \sin\varphi\, d\varphi =$$

$$= \frac{2\lambda_0}{4\pi\varepsilon_0 R} \quad \frac{R}{2x}\int_0^{\pi} \frac{\frac{x^2}{R^2}-2\frac{x}{R}\cos\varphi+1-1+\frac{x^2}{R^2}}{\left(1+\frac{x^2}{R^2}-2\frac{x}{R}\cos\varphi\right)^{3/2}} \sin\varphi\, d\varphi =$$

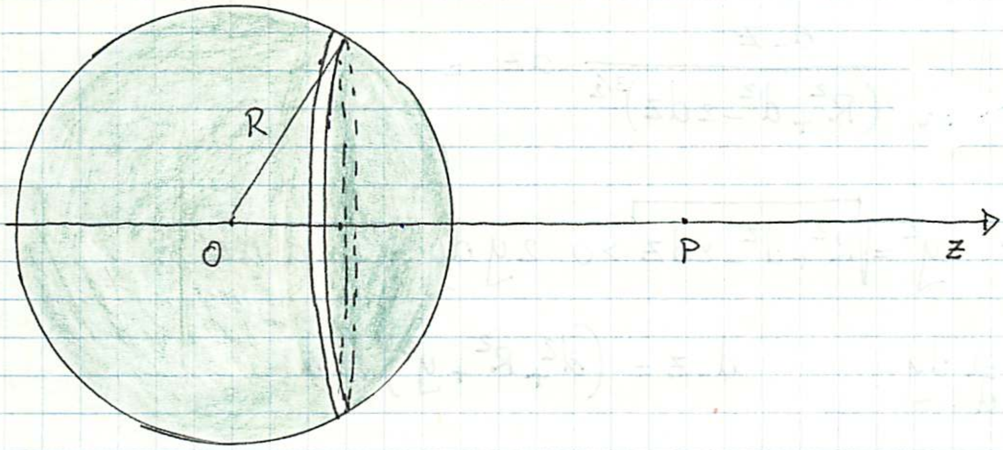
$$= \frac{Q/4}{4\pi\varepsilon_0 xR}\left\{\int_0^{\pi}\frac{\sin\varphi}{\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2}-\frac{2x}{R}\cos\varphi}}d\varphi + \left(\frac{x^2}{R^2}-1\right)\int_0^{\pi}\frac{\sin\varphi}{\left(1+\frac{x^2}{R^2}-\frac{2x}{R}\cos\varphi\right)^{3/2}}d\varphi\right\}$$

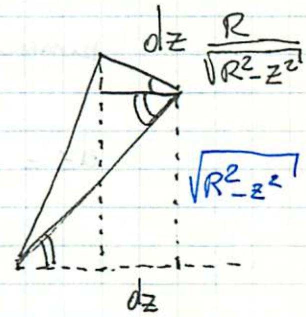
$$= \frac{Q/4}{4\pi\varepsilon_0 xR}\left\{\frac{R}{x}\left(\left|1+\frac{x}{R}\right|-\left|1-\frac{x}{R}\right|\right)+\left(\frac{x^2}{R^2}-1\right)\left(-\frac{R}{x}\right)\left(\frac{1}{\left|1+\frac{x}{R}\right|}-\frac{1}{\left|1-\frac{x}{R}\right|}\right)\right\} =$$

$$= \frac{Q/4}{4\pi\varepsilon_0 xR}\frac{R}{x}\begin{cases} -\frac{x}{R}-1-1+\frac{x}{R}+\left(1-\frac{x^2}{R^2}\right)\left(\frac{1}{-1-\frac{x}{R}}-\frac{1}{1-\frac{x}{R}}\right) & x<-R \\ 1+\frac{x}{R}-1+\frac{x}{R}+\left(1-\frac{x^2}{R^2}\right)\left(\frac{1}{1+\frac{x}{R}}-\frac{1}{1-\frac{x}{R}}\right) & -R<x<R \\ 1+\frac{x}{R}+1-\frac{x}{R}+\left(1-\frac{x^2}{R^2}\right)\left(\frac{1}{1+\frac{x}{R}}+\frac{1}{1-\frac{x}{R}}\right) & x>R \end{cases}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\begin{cases} -\frac{1}{x^2} & x<-R \\ 0 & -R<x<R \\ \frac{1}{x^2} & x>R \end{cases}$$

Una carica q è distribuita uniformemente sulla superficie di una sfera di raggio R. Calcolare il campo elettrico a distanza d dal centro della sfera.



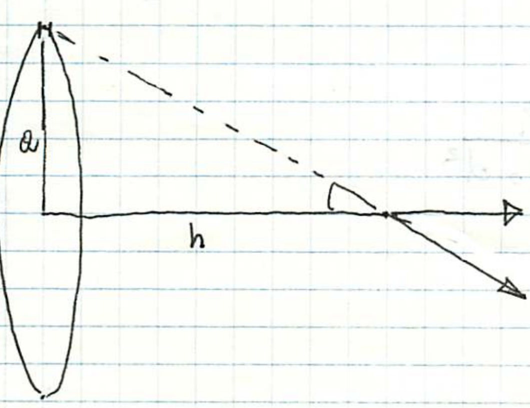


In un punto P a distanza $d > R$ dal centro della sfera il campo elettrico $d\underline{E}$ generato dalla carica infinitesima

$$dq = \frac{q}{4\pi R^2} \, 2\pi \sqrt{R^2-z^2} \, \frac{dz\, R}{\sqrt{R^2-z^2}} = \frac{q}{2R} \, dz$$

distribuita sulla buccia sferica compresa tra z e $z+dz$

è pari a quello generato da un anello di raggio $a = \sqrt{R^2-z^2}$ su cui è distribuita la carica dq a distanza $h = d-z$ dal suo centro e lungo l'asse



$$dE = \int_0^{2\pi} \frac{dq\, a\, d\theta}{4\pi\varepsilon_0 \, 2\pi a \, (a^2+h^2)} \, \frac{h}{(a^2+h^2)^{1/2}} =$$

$$= \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0} \, \frac{h}{(a^2+h^2)^{3/2}}$$

Il campo elettrico totale generato dalla sfera in P vale =

$$E = \int_{-R}^{R} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q\, dz}{2R} \frac{d-z}{\left[R^2 - z^2 + (d-z)^2\right]^{3/2}} =$$

$$= \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R} \int_{-R}^{R} \frac{d-z}{\left(R^2 + d^2 - 2dz\right)^{3/2}}\, dz =$$

ponendo $y = \sqrt{R^2 + d^2 - 2dz}$ $\quad 2y\, dy = -2d\, dz$

$$dz = -\frac{y}{d}\, dy \qquad d - z = \left(d^2 - R^2 + y^2\right)/2d$$

$$= \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R} \int_{d+R}^{d-R'} \frac{d^2 - R^2 + y^2}{2d} \frac{1}{y^3} \left(-\frac{y}{d}\right) dy =$$

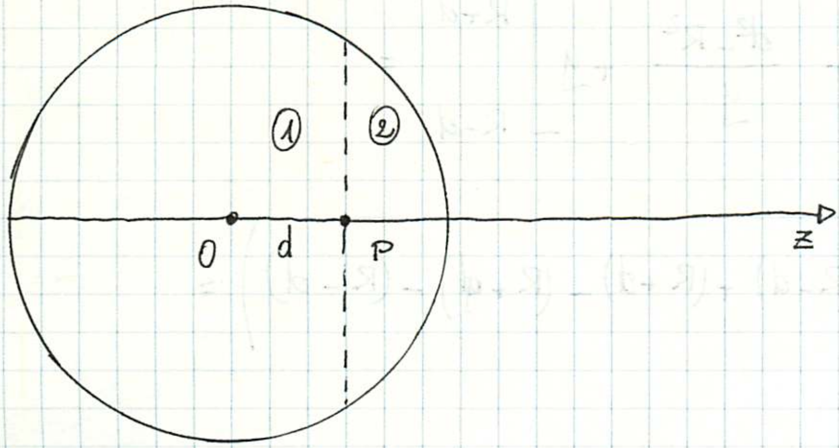
N.B.: $y^2(z) > 0$ $z \in]-R, R[$ since $y^2(z) > (R-d)^2$ therefore the root $y(z)$ must be chosen with the same sign at $z = \pm R$ (at $z=R$ the root vanishes for $d=R$)

$$= \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R} \frac{1}{2d^2} \int_{d-R}^{d+R} \left(\frac{d^2 - R^2}{y^2} + 1\right) dy =$$

$$= \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R} \frac{1}{2d^2} \left[-\frac{d^2 - R^2}{y} + y\right]_{d-R}^{d+R} =$$

$$= \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R} \frac{1}{2d^2} \left[-(d-R) + (d+R) + (d+R) - (d-R)\right] =$$

$$= \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R} \frac{1}{2d^2} 4R = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d^2}$$



In un punto P a distanza $d<R$ da O il campo elettrico generato dalla parte 2 della sfera si oppone a quello generato da parte 1. Sommando:

$$E = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R}\left[\int_{-R}^{d}\frac{d-z}{(R^2+d^2-2dz)^{3/2}}\,dz - \int_{d}^{R}\frac{z-d}{(R^2+d^2-2dz)^{3/2}}\,dz\right] =$$

$$= \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R}\int_{-R}^{R}\frac{d-z}{(R^2+d^2-2dz)^{3/2}}\,dz =$$

ponendo $y=\sqrt{R^2+d^2-2dz}$ $\qquad 2y\,dy = -2d\,dz$

$dz = -\left(\frac{y}{d}\right)dy$ $\qquad d-z = (d^2-R^2+y^2)/(2d)$

N.B.: $y^2(z)>0$

$$= \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R}\int_{R+d}^{R-d}\frac{d^2-R^2+y^2}{2d}\,\frac{1}{y^3}\left(-\frac{y}{d}\right)dy =$$

$$= \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R}\,\frac{1}{2d^2}\int_{R-d}^{R+d}\left(\frac{d^2-R^2}{y^2}+1\right)dy =$$

$$= \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R} \; \frac{1}{2d^2} \left[-\frac{d^2 - R^2}{y} + y \right]_{R-d}^{R+d} =$$

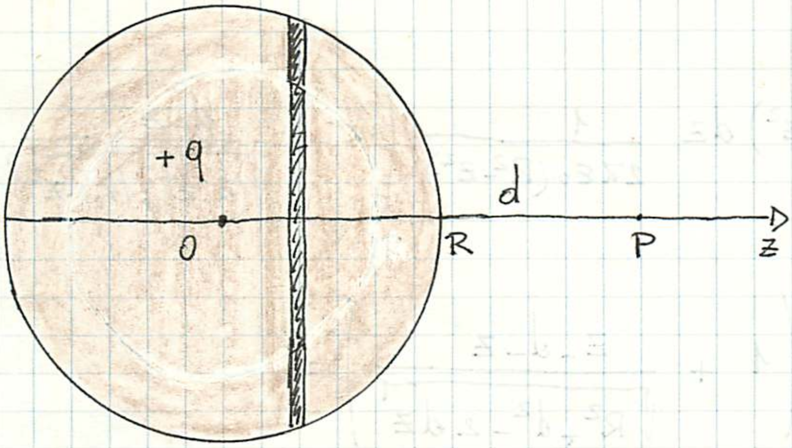
$$= \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R} \; \frac{1}{2d^2} \Big((R-d) + (R+d) - (R+d) - (R-d) \Big) =$$

$$= \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R} \; \frac{1}{2d^2} \; 0 = 0$$

teorema di Gauss: $\underline{E}$ deve avere simmetria sferica perché le sorgenti hanno tale simmetria.

$$\underset{\text{sup. sferica di raggio } d}{\phi(\underline{E})} = E \, 4\pi d^2 = \begin{cases} \dfrac{q}{\varepsilon_0} & d > R \\ 0 & d < R \end{cases}$$

Una carica positiva q è distribuita uniformemente sul volume di una sfera di raggio R. Determinare il campo elettrico generato all'esterno e all'interno della sfera.

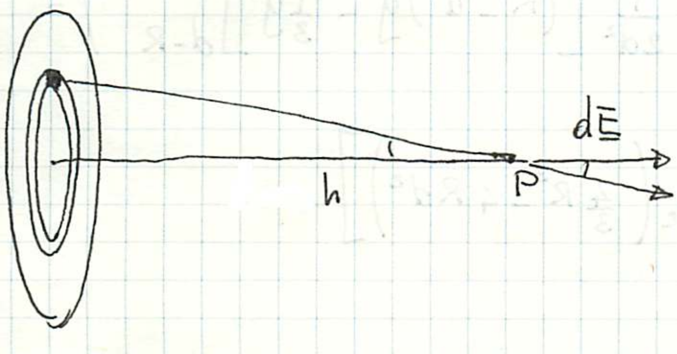


In un punto P a distanza d dal centro della sfera ($d = OP > R$) il campo elettrico $d\underline{E}$ generato dalla carica infinitesima

$$dq = \frac{q}{\frac{4\pi R^3}{3}} \pi (R^2 - z^2)\, dz$$

contenuta tra z e $z + dz$

è quello generato da un disco uniformemente carico di raggio



$a = \sqrt{R^2 - z^2}$ a distanza

$h = d - z$ su cui è

depositata una carica dq

$$dE = \int_0^a \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq}{\pi a^2} 2\pi \rho\, d\rho \frac{1}{h^2 + \rho^2} \frac{h}{\sqrt{h^2 + \rho^2}}$$

$$= \frac{dq\, h}{2\pi\varepsilon_0 a^2} \int_0^a (h^2 + \rho^2)^{-3/2} \rho\, d\rho = \frac{dq\, h}{2\pi\varepsilon_0 a^2} \left. \frac{1}{\sqrt{h^2 + \rho^2}} \right|_a^0 =$$

$$= \frac{dq}{2\pi\varepsilon_0 a^2}\left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2+a^2}}\right)$$

Il campo elettrico in P vale:

$$E = \int_{-R}^{R} \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\pi\left(R^2 - z^2\right)dz\ \frac{1}{2\pi\varepsilon_0 (R^2 - z^2)}\left(1 - \frac{d-z}{\sqrt{(d-z)^2 + (R^2 - z^2)}}\right) =$$

$$= \frac{3q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}\int_{-R}^{R} dz \left(1 - \frac{d-z}{\sqrt{R^2+d^2-2dz}}\right) =$$

ponendo $y = \sqrt{R^2+d^2-2dz}$ $\qquad 2y\,dy = -2d\,dz$

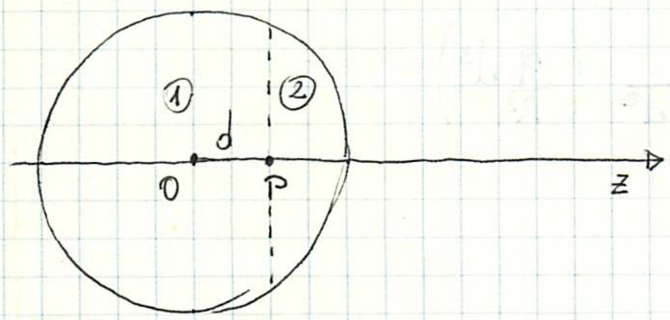
$dz = -\frac{y}{d}dy \qquad z - d = \left(R^2 - y^2 - d^2\right)/(2d)$

$$= \frac{3q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}\left[2R + \int_{d+R}^{d-R} \frac{R^2-y^2-d^2}{2d}\ \frac{1}{y}\left(-\frac{y}{d}\right)dy\right] =$$

$$= \frac{3q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}\left(2R + \frac{1}{2d^2}\left[\left(R^2-d^2\right)y - \frac{1}{3}y^3\right]_{d-R}^{d+R}\right) =$$

$$= \frac{3q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}\left[2R + \frac{1}{2d^2}\left(\frac{4}{3}R^3 - 4Rd^2\right)\right] =$$

$$= \frac{3q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}\ \frac{2}{3}\frac{R^3}{d^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d^2}$$



per $d < R$ la parte 1 della sfera produce in P un campo elettrico diretto nella direzione positiva di z mentre la parte 2 nella direzione negativa; sommando:

$$E = \frac{3q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}\left[\int_{-R}^{d} dz \left(1 - \frac{d-z}{\sqrt{R^2+d^2-2dz}}\right) - \int_{d}^{R} dz \left(1 - \frac{z-d}{\sqrt{R^2+d^2-2dz}}\right)\right] =$$

$$= \frac{3q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}\left[2d + \int_{-R}^{R} dz \frac{z-d}{\sqrt{R^2+d^2-2dz}}\right] =$$

ponendo $y = \sqrt{R^2+d^2-2dz}$ $\quad 2y\,dy = -2d\,dz$

$dz = -\frac{y}{d}dy \qquad z-d = (R^2-y^2-d^2)/(2d)$

$$= \frac{3q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}\left[2d + \int_{R+d}^{R-d} \frac{R^2-y^2-d^2}{2d}\,\frac{1}{y}\left(-\frac{y}{d}\right)dy\right] =$$

$$= \frac{3q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}\left[2d + \frac{1}{2d^2}\left[(R^2-d^2)y - \frac{1}{3}y^3\right]_{R+d}^{R-d}\right] =$$

$$= \frac{3q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}\left[2d + \frac{1}{2d^2}\left(-\frac{8}{3}d^3\right)\right] =$$

$$= \frac{3q}{8\pi\varepsilon_0 R^3} \frac{2}{3} d = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\left(\frac{q}{R^3} d^3\right)$$

$$= \frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 d^2}$$

dove $q' = q\left(\frac{d}{R}\right)^3$ è la carica contenuta all'interno della sfera di raggio d

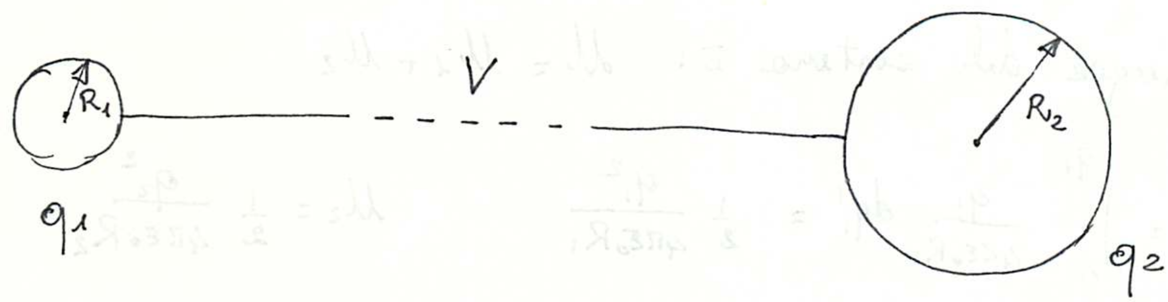
teorema di Gauss: $\underline{E}$ deve avere simmetria sferica perchè le sorgenti hanno tale simmetria.

$$\phi(\underline{E})_{\text{sup. sferica di raggio } d} = E\, 4\pi d^2 = \begin{cases} \dfrac{q}{\varepsilon_0} & d > R \\[2ex] \dfrac{q}{\varepsilon_0}\dfrac{d^3}{R^3} & d < R \end{cases}$$

Densità di carica sulla superficie dei conduttori: punte

la carica data ad un conduttore si distribuisce con densità proporzionale alla curvatura

es.:



una carica Q viene data al sistema: esso si porta a potenziale V e la carica si distribuisce tra le due sfere (filo trascurabile) $q_1 + q_2 = Q$

Se il filo è molto lungo le distribuzioni di carica sulle sfere sono le stesse che si avrebbero se fossero isolate e a potenziale V:

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{R_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{R_2} \Rightarrow \frac{q_1}{R_1} = \frac{q_2}{R_2}$$

$$\sigma_1 = \frac{q_1}{4\pi R_1^2} \qquad \sigma_2 = \frac{q_2}{4\pi R_2^2}$$

$$\boxed{\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1}}$$

vedi BM 1.19

$$\begin{cases} q_1 + q_2 = Q \\ \dfrac{q_1}{R_1} = \dfrac{q_2}{R_2} \end{cases} \Rightarrow \quad q_1 = Q \, \frac{R_1}{R_1 + R_2} \qquad q_2 = Q \, \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

alternativamente

l'energia del sistema è: $U = U_1 + U_2$

$$U_1 = \int_0^{q_1} \frac{q_1'}{4\pi\varepsilon_0 R_1} \, dq_1' = \frac{1}{2} \frac{q_1^2}{4\pi\varepsilon_0 R_1} \qquad U_2 = \frac{1}{2} \frac{q_2^2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

$$q_1 + q_2 = Q$$

$$U(q_1) = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \left[\frac{q_1^2}{R_1} + \frac{(Q - q_1)^2}{R_2} \right]$$

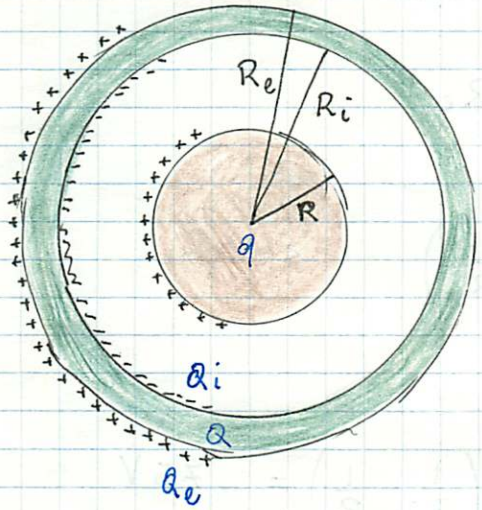
imponendo che U sia minima:

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{q_1}{R_1} - \frac{(Q - q_1)}{R_2} \right] = 0$$

$$q_1 = Q \, \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

$$q_2 = Q \, \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

Una sfera metallica di raggio $R = 4$ cm con una carica $q = 10^{-9}$ C si trova all'interno di una sfera metallica concentrica cava ed isolata con raggio interno $R_i = 6$ cm e raggio esterno $R_e = 8$ cm. ed avente una carica totale positiva $Q = 10^{-9}$ C.
Si calcolino le cariche Q_i e Q_e sulle due superfici della sfera cava e la d.d.p. tra la sfera cava e quella interna.



Il campo elettrico ha simmetria radiale; dal teorema di Gauss ed essendo le sfere conduttrici si ha:

$$E(r) = \begin{cases} 0 & 0 < r < R \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & R < r < R_i \\ 0 = \dfrac{q + Q_i}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & R_i < r < R_e \\ \dfrac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \dfrac{q + Q_i + Q_e}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r > R_e \end{cases}$$

da cui $\quad Q_i = -q = -10^{-9}$ C

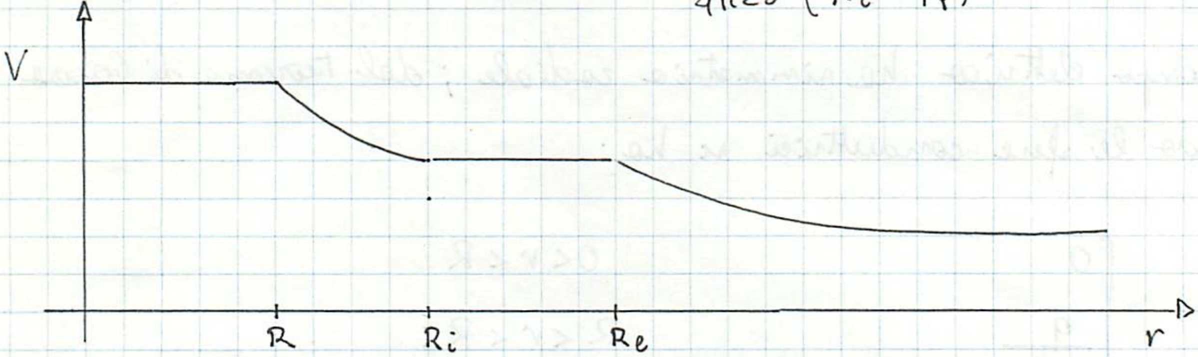
$$Q_e = Q - Q_i = Q + q = 2\,10^{-9}\ \text{C}$$

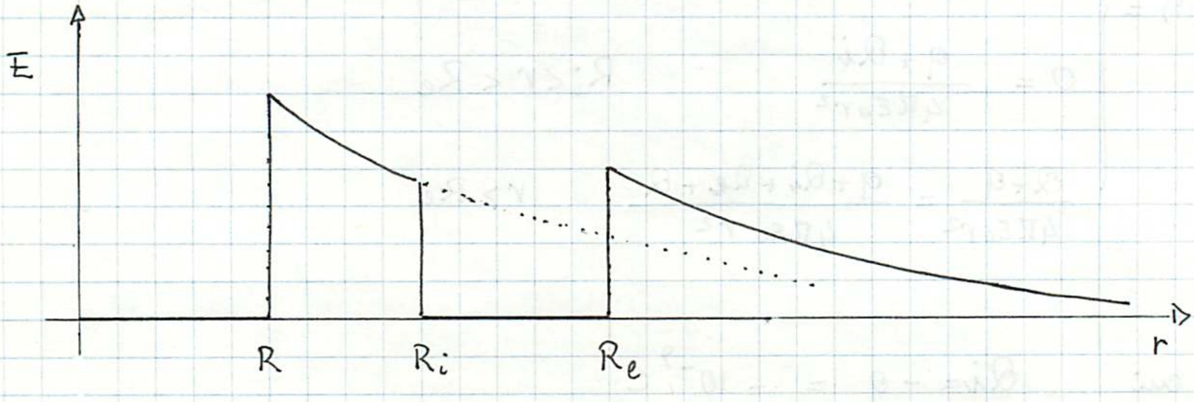
$$E(r) = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

$$V(r) = V_0 - \int_0^r E(r')\,dr'$$

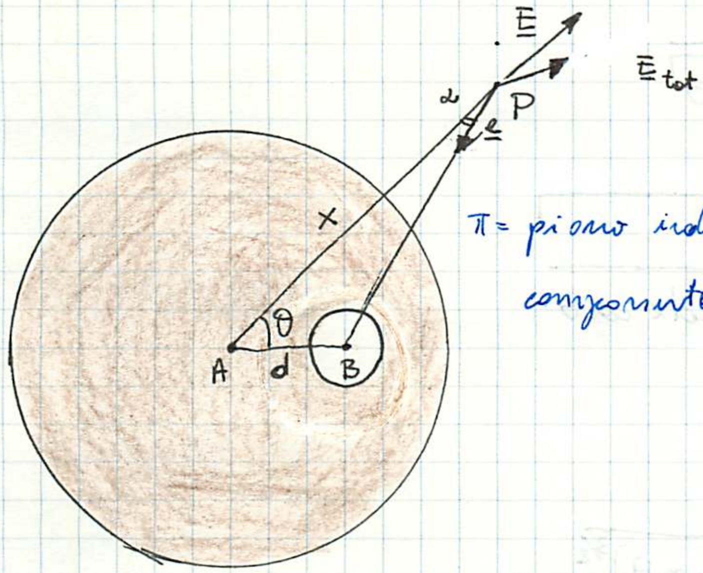
$$V(r) = \begin{cases} V_0 & 0 < r < R \\ V_0 + \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{R}\right) & R < r < R_i \\ V_0 + \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{R_i} - \dfrac{1}{R}\right) & R_i < r < R_e \\ V_0 + \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{R_i} - \dfrac{1}{R}\right) + \dfrac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{R_e}\right) & r > R_e \end{cases}$$

la d.d.p. cercata è $V(R_i) - V(R) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{R_i} - \dfrac{1}{R}\right) = -75\,V$





Una sfera di raggio R è uniformemente carica con densità di volume ρ ad eccezione di una cavità sferica di raggio $r < R$.
La distanza tra i centri della sfera e della cavità è d $(d + r < R)$
Calcolare la carica totale Q_{tot} e il campo elettrico al di fuori della sfera.



π = piano individuato da P, A e B ; $\underline{E}$ non ha componenti ortogonali a π

per l'additività della carica si ha:

$$Q_{tot} = \rho \, \frac{4}{3}\pi R^3 - \rho \, \frac{4}{3}\pi r^3 = Q - q$$

ottenuta pensando che la cavità abbia carica $-q$

Per l'additività del campo elettrico, il campo elettrico in P è la somma di quello generato dalla sfera piena e dalla cavità

$\underline{E}_{tot} = \underline{E} + \underline{e}$ le cui componenti radiale e trasversale

usando coordinate polari $x \, \theta$ $\left(x = PA \quad \theta = P\hat{A}B \right)$ sono:

$$E_t = 0 \qquad E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \, \frac{Q}{x^2}$$

$$e_t = - e \sin\alpha \qquad e_r = -e \cos\alpha \qquad e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \, \frac{q}{x^2 + d^2 - 2dx\cos\theta}$$

usando il teorema dei seni

$$\frac{d}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{d^2+x^2-2dx\cos\theta}}{\sin\theta}$$

$$\sin\alpha = \sin\theta \frac{d}{\sqrt{d^2+x^2-2dx\cos\theta}}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\theta \frac{d^2}{d^2+x^2-2dx\cos\theta}}$$

$$E_t^{tot} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sin\theta\, d}{\left(d^2+x^2-2dx\cos\theta\right)^{3/2}}$$

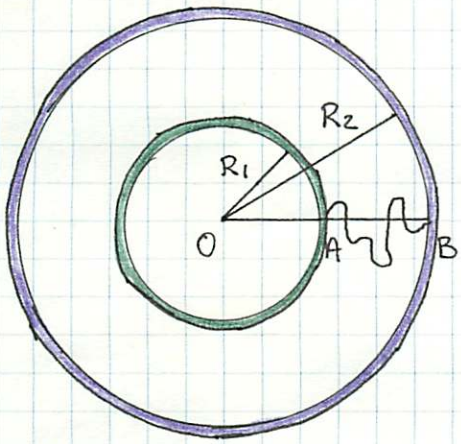
$$E_r^{tot} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sqrt{1-\sin^2\theta\, d^2/(d^2+x^2-2dx\cos\theta)}}{d^2+x^2-2dx\cos\theta}$$

si noti che $E_t^{tot}=0$ per $\theta = 0, \pi$ oppure per $d=0$

Due superfici sferiche concentriche di raggi R_1 ed $R_2 > R_1$ sono cariche in modo tale che il potenziale elettrico tra esse è

$$V(r,\theta,\varphi) = \frac{Q}{r^4}\left(5\cos^3\theta - 3\cos\theta\right).$$

Calcolare il campo elettrico per $R_1 < r < R_2$ ed il lavoro compiuto da un elettrone per spostarsi tra i punti A e B intersezione di un raggio vettore con le due superfici.



Usando coordinate polari:

$$\underline{E} = -\underline{\nabla} V = -\left(\frac{\partial V}{\partial r},\ \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta},\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)$$

$$E_r = \frac{4Q}{r^5}\left(5\cos^3\theta - 3\cos\theta\right)$$

$$E_\theta = \frac{Q}{r^5}\left(15\cos^2\theta\sin\theta - 3\sin\theta\right)$$

$$E_\varphi = 0$$

$$L_{A\to B} = \int_A^B \underline{F}\cdot d\underline{r} = -e\int_{R_1}^{R_2} E_r\, dr = -e\,4Q\left(5\cos^3\theta - 3\cos\theta\right)\left.\frac{1}{4r^4}\right|_{R_2}^{R_1}$$

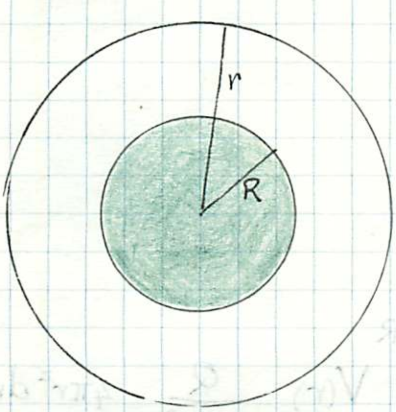
$$= -eQ\left(\frac{1}{R_1^4} - \frac{1}{R_2^4}\right)\left(5\cos^3\theta - 3\cos\theta\right)$$

Tale lavoro non dipende dal percorso scelto tra A e B è può essere ottenuto come differenza dell'energia potenziale elettrostatica

$$U(r,\theta,\varphi) = -e \quad V(r,\theta,\varphi) = -e \quad \frac{Q}{r^4}\left(5\cos^3\theta - 3\cos\theta\right)$$

$$L_{A\to B} = U_A - U_B = -eQ\left(\frac{1}{R_1^4} - \frac{1}{R_2^4}\right)\left(5\cos^3\theta - 3\cos\theta\right)$$

Si consideri una sfera di raggio R su cui è depositata una carica Q. Determinare nei due casi a) sfera carica uniformemente e b) carica distribuita sulla superficie il potenziale elettrostatico a distanza r dal centro e l'energia elettrostatica immagazzinata. Se $Q = e$ quanto vale il raggio R dell'elettrone ammettendo che l'energia elettrostatica valga mc^2?



a) sfera carica uniformemente

Il campo elettrico ha simmetria sferica e può essere calcolato con il teorema di Gauss

$$\phi(\underline{E}) = 4\pi r^2 E = \begin{cases} \dfrac{Q}{\varepsilon_0} & r > R \\ \dfrac{Q}{\varepsilon_0}\dfrac{r^3}{R^3} & 0 < r < R \end{cases}$$

$$\underline{E} = -\underline{\nabla} V \qquad E(r) = -\frac{\partial V}{\partial r} \qquad V(r) = -\int_0^r E(r')\,dr' + \text{cost}$$

scegliamo la costante in modo che $\lim_{r \to \infty} V(r) = 0$

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r < R \\ \dfrac{Q\, r}{4\pi\varepsilon_0 R^3} & 0 < r < R \end{cases}$$

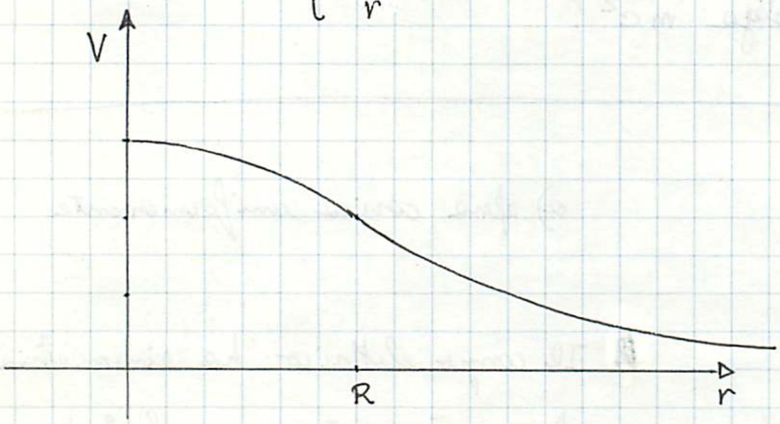
per $r < R$ $\quad V(r) = \text{cost} - \displaystyle\int_0^r \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r'\,dr' = \text{cost} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r^2}{2R^3}$

per $r > R$ $\quad V(r) = \text{cost} - \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{R^2}{2R^3} - \displaystyle\int_R^r \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r'^2}\,dr'$

$$= \text{cost} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2R} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)$$

$$0 = \lim_{r\to\infty} V(r) = \text{cost} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3}{2R} \qquad \text{cost} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3}{2R}$$

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\begin{cases} \dfrac{3}{2R} - \dfrac{r^2}{2R^3} & 0<r<R \\ \dfrac{1}{r} & r>R \end{cases}$$



L'energia potenziale elettrostatica vale: $\mathcal{U} = \frac{1}{2}\int_0^R V(r)\cdot\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\, 4\pi r^2 dr$ oppure:

$$\mathcal{U} = \int_0^Q V(q)\, dq = \int_0^R \frac{Q R'^2}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\cdot\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\, 4\pi R'^2 dR' =$$

$$= \frac{3Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R^6}\int_0^R R'^4\, dR' =$$

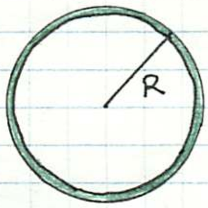
$$= \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}\,\frac{3}{5}$$

si noti che vale anche: $\mathcal{U} = \int_0^\infty \frac{1}{2}\varepsilon_0 E(r)^2 \cdot 4\pi r^2 dr$

per $Q = e$ $\qquad \frac{3}{5}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 R} = mc^2$

$$R = \frac{3}{5}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2} = 1.7\ 10^{-15}\ \text{m} = 1.7\ \text{F} = \text{raggio classico dell'elettrone}$$

b) sfera carica alla superficie



$$\phi(\vec{E}) = 4\pi r^2 E = \begin{cases} \dfrac{Q}{\varepsilon_0} & r > R \\ 0 & r < R \end{cases}$$

$$E(r) = \begin{cases} 0 & 0 < r < R \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r > R \end{cases}$$

$V(r) =$

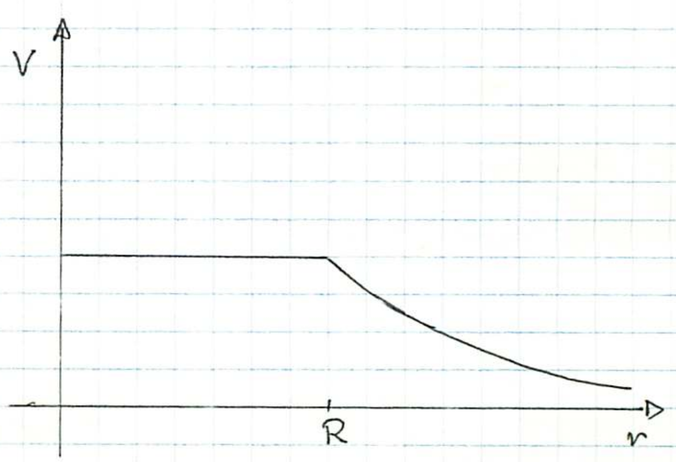
per $r < R$ $\quad V(r) = \text{cost}$

per $r > R$ $\quad V(r) = \text{cost} - \displaystyle\int_R^r \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r'^2}\, dr' =$

$$= \text{cost} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)$$

$$0 = \lim_{r\to\infty} V(r) = \text{cost} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \qquad \text{cost} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\begin{cases} \dfrac{1}{R} & 0 < r < R \\ \dfrac{1}{r} & r > R \end{cases}$$



$$\mathcal{U} = \int_0^Q V(q)\, dq = \int_0^Q \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}\, dq = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}\,\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R} = mc^2 \qquad R = \frac{1}{2}\,\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m c^2} = 1.4\ F$$

$$\mathcal{U} = \int_0^\infty \frac{1}{2}\varepsilon_0 E(r)^2\, 4\pi r^2 dr = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 4\pi \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2}\int_0^\infty V(r)\,\frac{Q}{4\pi R^2}\,\delta(r-R)\, 4\pi r^2 dr = \frac{1}{2} V(R)\, Q = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}\cdot\frac{1}{2}$$

ricalcolare tutto per una densità

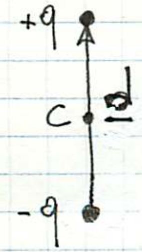
$$\rho(r) = Q\,\frac{\alpha^3}{8\pi}\, e^{-\alpha r}$$

$$q(r) = \int_0^r \rho(r')\, 4\pi r'^2 dr' = Q\left[1 - e^{-\alpha r}\left(1 + \alpha r + \frac{1}{2}\alpha^2 r^2\right)\right]$$

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left[1 - e^{-\alpha r}\left(1 + \alpha r + \frac{1}{2}\alpha^2 r^2\right)\right]$$

forza su dipolo in campo esterno

$$\underline{p} = q\,\underline{d}$$



$$\underline{F} = q\left(\underline{E} + \frac{1}{2}(\underline{d}\cdot\underline{\nabla})\underline{E} + \dots\right) -$$

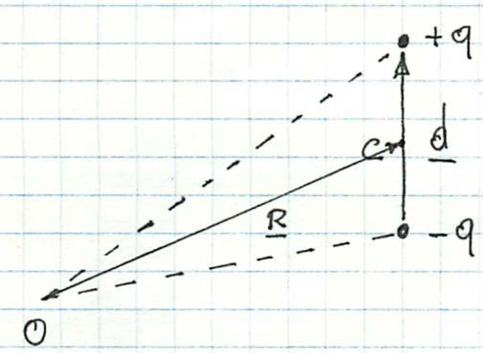
$$- q\left(\underline{E} - \frac{1}{2}(\underline{d}\cdot\underline{\nabla})\underline{E} + \dots\right)$$

$$= q(\underline{d}\cdot\underline{\nabla})E + \dots$$

$$= (\underline{p}\cdot\underline{\nabla})\,\underline{E}$$

$$F_i = p_j\,\partial_j E_i$$

momento su dipolo in campo esterno



$$\underline{M}_O = \left(\underline{R} + \frac{\underline{d}}{2}\right) \times q\left(\underline{E} + \frac{1}{2}(\underline{d}\cdot\underline{\nabla})\underline{E} + \dots\right) -$$

$$- \left(\underline{R} - \frac{\underline{d}}{2}\right) \times q\left(\underline{E} - \frac{1}{2}(\underline{d}\cdot\underline{\nabla})\underline{E} + \dots\right) =$$

$$= q\,\underline{d}\times\underline{E} + q\,\underline{R}\times(\underline{d}\cdot\underline{\nabla})\underline{E} + \dots$$

$$= \underline{p}\times\underline{E} + \underline{R}\times(\underline{p}\cdot\underline{\nabla})\underline{E} + \dots$$

$$\underline{M}_O = \underline{M}_C + \underline{OC}\times\underline{F} = \underline{M}_C + \underline{R}\times(\underline{p}\cdot\underline{\nabla})\underline{E}$$

$$\underline{M}_C = \underline{p}\times\underline{E}$$

energia di un dipolo in campo esterno

usando $\underline{\nabla}(\underline{a}\cdot\underline{b}) = (\underline{a}\cdot\underline{\nabla})\underline{b} + (\underline{b}\cdot\underline{\nabla})\underline{a} + \underline{a}\times(\underline{\nabla}\times\underline{b}) + \underline{b}\times(\underline{\nabla}\times\underline{a})$

e $\underline{p} = \text{cost}$ $\quad \underline{\nabla}\times\underline{E} = 0$ si ha:

$$\underline{\nabla}(\underline{p}\cdot\underline{E}) = (\underline{p}\cdot\underline{\nabla})\underline{E} = \underline{F}$$

si può introdurre $\mathcal{U} = -\underline{p}\cdot\underline{E}$ tale che

$$\underline{F} = -\underline{\nabla}\,\mathcal{U}$$

$\mathcal{U}$ può anche essere ottenuto direttamente

$$\mathcal{U} = q\left(V + \frac{1}{2}\underline{d}\cdot\underline{\nabla}V + \dots\right) - q\left(V - \frac{1}{2}\underline{d}\cdot\underline{\nabla}V + \dots\right)$$

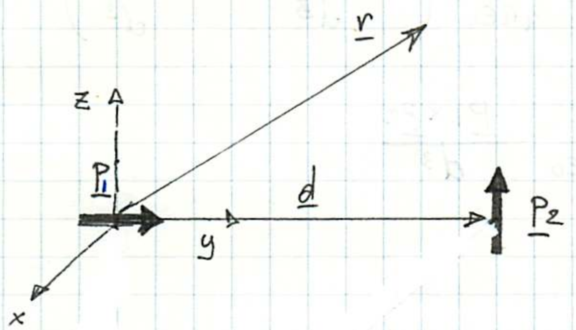
$$= q\,\underline{d}\cdot\underline{\nabla}V = \underline{p}\cdot\underline{\nabla}V = -\underline{p}\cdot\underline{E}$$

la forza lungo un asse l vale $\quad F_l = -\dfrac{\partial\mathcal{U}}{\partial l}$

il momento lungo un asse la cui
variabile angolare associata è ϑ vale $\quad M = -\dfrac{\partial\mathcal{U}}{\partial\vartheta}$

Due dipoli elettrici di momenti $p_1 = 10^{-6}$ Cm e $p_2 = 2\,10^{-6}$ Cm sono complanari disposti perpendicolarmente l'uno all'altro. Il primo dipolo è parallelo al vettore $\underline{d}$ distanza tra i due dipoli con $d = 0.5$ m. Determinare l'energia elettrostatica totale ed i momenti $\underline{M}_1$ ed $\underline{M}_2$ rispetto al primo dipolo delle forze agenti sui due dipoli

---



Si consideri il sistema di riferimento centrato sul primo dipolo

Il campo generato da $\underline{p}_1$ in un punto individuato da $\underline{r}$ vale

$$\underline{E}_1(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3(\overline{p}_1\cdot\underline{r})\overline{r}}{r^5} - \frac{\overline{p}_1}{r^3}\right)$$

l'energia elettrostatica del sistema è

$$U = -\underline{p}_2\cdot\underline{E}_1(\underline{d}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3(\underline{p}_1\cdot\underline{d})(\underline{p}_2\cdot\underline{d})}{d^5} - \frac{\underline{p}_1\cdot\underline{p}_2}{d^3}\right) = 0$$

poiché $\underline{p}_1\cdot\underline{p}_2 = 0$ e $\underline{p}_2\cdot\underline{d} = 0$

se $\overline{p}_2$ parallelo a $\overline{p}_1$ $\quad U = -\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2p_1p_2}{d^3}$

" " antiparallelo a $\overline{p}_1$ $\quad U = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2p_1p_2}{d^3}$

discutere casi ↑↑ e ↑↓

Poichè il sistema dei due dipoli è isolato, il momento totale $\underline{M}_1 + \underline{M}_2$ è nullo e quindi $\underline{M}_1 = -\underline{M}_2$

rispetto al centro del primo dipolo si ha subito:

$$\underline{M}_1 = \underline{p}_1 \times \underline{E}_2(-\underline{d}) = \underline{p}_1 \times \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3(\underline{p}_2 \cdot \underline{d})\underline{d}}{d^5} - \frac{\underline{p}_2}{d^3}\right)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\underline{p}_1 \times \underline{p}_2}{d^3}$$

$$M_1 = M_2 = \frac{p_1 p_2}{4\pi\varepsilon_0 d^3} = 0.144 \text{ Nm}$$

si noti che $\underline{M}_2$ può essere calcolato esplicitamente

$$\underline{M}_2 = \underline{p}_2 \times \underline{E}_1(\underline{d}) + \underline{d} \times (\underline{p}_2 \cdot \underline{\nabla})\, \underline{E}_1(\underline{d})$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3\,\underline{p}_1 \cdot \underline{d}}{d^5}\, \underline{p}_2 \times \underline{d} - \frac{\underline{p}_2 \times \underline{p}_1}{d^3}\right) + \underline{d} \times (\underline{p}_2 \cdot \underline{\nabla})\, \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3(\underline{p}_1 \cdot \underline{d})\underline{d}}{d^5} - \frac{\underline{p}_1}{d^3}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3\,\bar{p}_1 \cdot \underline{d}}{d^5}\, \underline{p}_2 \times \underline{d} - \frac{\underline{p}_2 \times \underline{p}_1}{d^3}\right) + \underline{d} \times \frac{3\,\bar{p}_1 \cdot \underline{d}}{d^5}\, \bar{p}_2\, \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\underline{p}_2 \times \underline{p}_1}{d^3} = -\underline{M}_1$$

$$\left(\underline{p}_2 \cdot \underline{\nabla}\right)\left(\frac{3(\underline{p}_1 \cdot \underline{d})\,\underline{d}}{d^5} - \frac{\underline{p}_1}{d^3}\right) =$$

$$= p_{2i}\,\partial_i \left(3\, p_{1k}\, d_k \frac{d_s}{d^5} - \frac{p_{1s}}{d^3}\right) \hat{e}_s =$$

$$= \hat{e}_s\, p_{2i} \left[3 p_{1k}\left(\delta_{ik}\, d_s\, d^{-5} + d_k\, \delta_{si}\, d^{-5} - 5 d^{-6} \frac{d_i}{d}\, d_k d_s\right) + 3 d^{-4} \frac{d_i}{d}\, p_{1s}\right]$$

$$= \hat{e}_s\, p_{2i}\left(\frac{3}{d^5}\, p_{1i}\, d_s + \hat{e}_s\, p_{2s} \frac{3}{d^5} p_{1k}\, d_k - \hat{e}_s\, p_{2i} \frac{15}{d^7}\, p_{1k}\, d_i d_k d_s\right.$$

$$- \hat{e}_s\, p_{2i} \frac{3}{d^5}\, d_i\, p_{1s}$$

$$= \underset{\underset{0}{\parallel}}{\underline{d}\, \frac{3\,\underline{p}_1 \cdot \underline{p}_2}{d^5}} + \underline{p}_2\, \frac{3\,\underline{p}_1 \cdot \underline{d}}{d^5} - \underset{\underset{0}{\parallel}}{\underline{d}\, \frac{15(\underline{p}_2 \cdot \underline{d})(\underline{p}_1 \cdot \underline{d})}{d^7}} - \underset{\underset{0}{\parallel}}{\underline{p}_1\, \frac{3\,\underline{p}_2 \cdot \underline{d}}{d^5}}$$

$$= \underline{p}_2\, \frac{3\,\underline{p}_1 \cdot \underline{d}}{d^5}$$

$$\underline{F}_2 = \left(\underline{p}_2 \cdot \underline{\nabla}\right) \underline{E}_1(\underline{d}) = \cancel{-}\,\underline{\nabla}\, \mathcal{U} = \underline{\nabla}\left(\underline{p}_2 \cdot \underline{E}_1(\underline{d})\right)$$

$$= \underline{\nabla}\left(\underline{p}_2 \cdot \left(\frac{3(\underline{p}_1 \cdot \underline{d})\,\underline{d}}{d^5} - \frac{\underline{p}_1}{d^3}\right) \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\, \underline{\nabla}\left(\frac{3(\underline{p}_1 \cdot \underline{r})(\underline{p}_2 \cdot \underline{r})}{r^5} - \frac{\underline{p}_1 \cdot \underline{p}_2}{r^3} \right)\Bigg|_{\underline{r}=\underline{d}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\Bigg[\frac{3\left(p_{1x}\hat{x} + p_{1y}\hat{y} + p_{1z}\hat{y}\right)(\underline{p}_2 \cdot \underline{r})}{r^5}$$

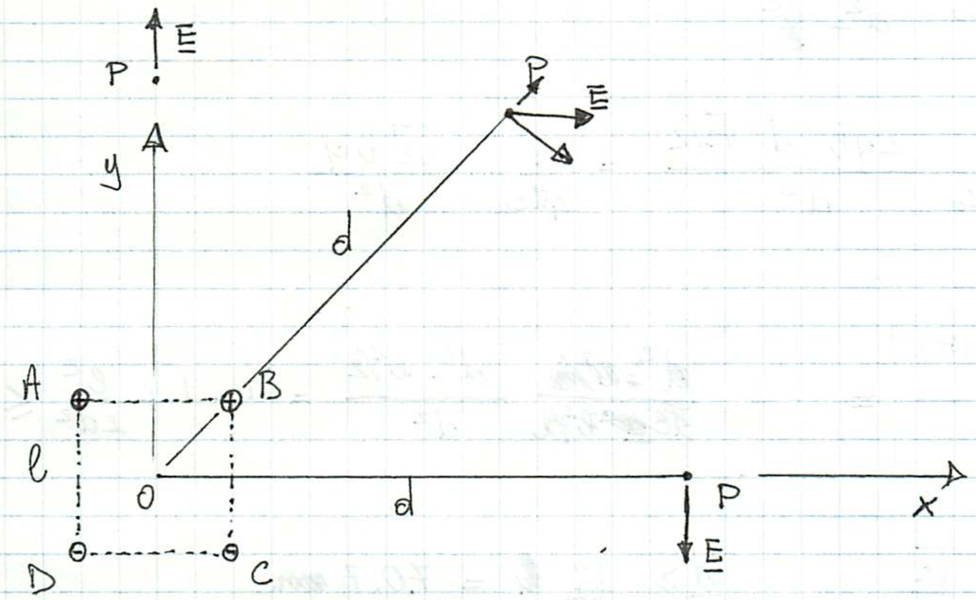
$$+ \frac{3(\underline{p}_1 \cdot \underline{r})\left(p_{2x}\hat{x} + p_{2y}\hat{y} + p_{2z}\hat{z}\right)}{r^5}$$

$$- \frac{5 \cdot 3(\underline{p}_1 \cdot \underline{r})(\underline{p}_2 \cdot \underline{r})\,\hat{\underline{r}}}{r^6} + \frac{3(\underline{p}_1 \cdot \underline{p}_2)\,\hat{\underline{r}}}{r^4}\Bigg]_{\underline{r}=\underline{d}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\cancel{\frac{3\underline{p}_1(\underline{p}_2 \cdot \underline{d})}{d^5}} + \frac{3(\underline{p}_1 \cdot \underline{d})\,\underline{p}_2}{d^5} - \cancel{\frac{15(\underline{p}_1 \cdot \underline{d})(\underline{p}_2 \cdot \underline{d})\,\underline{d}}{d^7}} + \cancel{\frac{3(\underline{p}_1 \cdot \underline{p}_2)\,\underline{d}}{d^5}} \right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\, \frac{3(\underline{p}_1 \cdot \underline{d})\,\underline{p}_2}{d^5}$$

Nei vertici A,B,C,D di un quadrato di lato l sono poste le cariche q, q, −q, −q.
A quale distanza dal centro del quadrato e lungo la mediana o la bisettrice il potenziale elettrico valutato in approssimazione di dipolo differisce da quello esatto per meno dell'1%?



Detta d la distanza di P da O. Lungo x si ha:

$$V_{ex}(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{\sqrt{\left(d+\frac{l}{2}\right)^2+\frac{l^2}{4}}} + \frac{-q}{\sqrt{\left(d+\frac{l}{2}\right)^2+\frac{l^2}{4}}} + \frac{q}{\sqrt{\left(d-\frac{l}{2}\right)^2+\frac{l^2}{4}}} + \frac{-q}{\sqrt{\left(d-\frac{l}{2}\right)^2+\frac{l^2}{4}}}\right) = 0$$

il momento di dipolo del sistema (indipendente dal sistema di riferimento in quanto $\Sigma q = 0$) vale:

$$p_x = q\frac{l}{2} + q\left(-\frac{l}{2}\right) - q\frac{l}{2} - q\left(-\frac{l}{2}\right) = 0$$

$$p_y = q\frac{l}{2} + q\frac{l}{2} - q\left(-\frac{l}{2}\right) - q\left(-\frac{l}{2}\right) = 2ql$$

$$V_{dip}(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overline{p}\cdot\overline{OP}}{|\overline{OP}|^3} = 0$$

Nella direzione x l'approssimazione di dipolo è esatta.

lungo la diagonale si ha:

$$V_{ex}(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{d-\frac{l}{\sqrt{2}}} + \frac{-q}{d+\frac{l}{\sqrt{2}}} + \frac{q}{\sqrt{d^2+\frac{l^2}{2}}} + \frac{-q}{\sqrt{d^2+\frac{l^2}{2}}}\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sqrt{2}\,l\,q}{d^2-\frac{l^2}{2}}$$

$$V_{dip}(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2ql\,d\,\sqrt{2}/2}{d^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sqrt{2}\,l\,q}{d^2}$$

$$\left|\frac{V_{ex}(P)-V_{dip}(P)}{V_{ex}(P)}\right| = 1 - \frac{d^2-l^2/2}{d^2} = 1-1+\frac{l^2}{2d^2} \leq \frac{1}{100}$$

$$\frac{l}{d} \leq \sqrt{\frac{2}{100}} = \frac{\sqrt{2}}{10} \qquad \frac{d}{l} \geq \frac{10}{\sqrt{2}} = 7.07$$

Nella direzione y si ha:

$$V_{ex}(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2q}{\sqrt{\left(d-\frac{l}{2}\right)^2+\frac{l^2}{4}}} + \frac{-2q}{\sqrt{\left(d+\frac{l}{2}\right)^2+\frac{l^2}{4}}}\right)$$

$$= \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 d}\left[\left(1+\frac{l^2}{2d^2}-\frac{l}{d}\right)^{-\frac{1}{2}} - \left(1+\frac{l^2}{2d^2}+\frac{l}{d}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

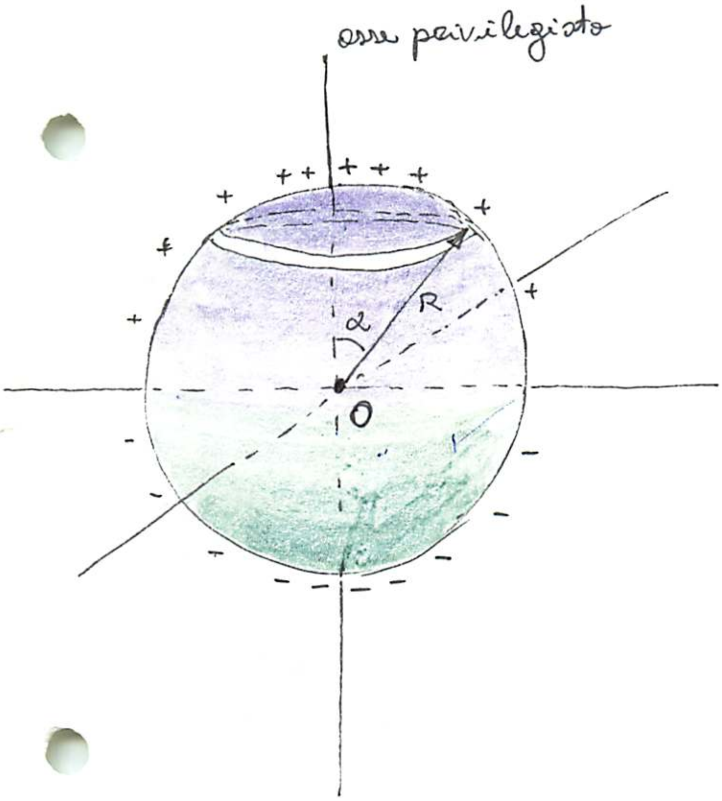
$$\xrightarrow[l \ll d]{} \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 d}\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{l^2}{2d^2}-\frac{l}{d}\right)+\dots -1+\frac{1}{2}\left(\frac{l^2}{2d^2}+\frac{l}{d}\right)+\dots\right] =$$

$$= \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 d}\frac{l}{d}+\dots = V_{dip}(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2ql\cdot d}{d^3}$$

numericamente si trova $\left|\frac{V_{ex}(P)-V_{dip}(P)}{V_{ex}(P)}\right| \leq \frac{1}{100}$ per $\frac{d}{l} \geq 3.68$

Nota che $V_{dip} = V_{ex}$ lungo l'asse x

Una sfera dielettrica cava di raggio R possiede una densità di carica superficiale $\sigma(\alpha) = \frac{q}{\pi R^2} \cos\alpha$ essendo α l'angolo rispetto ad un asse privilegiato. Calcolare il potenziale elettrostatico in ogni punto dello spazio a distanza $d \gg R$ dal centro della sfera.



la carica totale sulla sfera è nulla

$$Q = \int_0^{\pi} \frac{q}{\pi R^2} \cos\alpha \; 2\pi R \sin\alpha \, R \, d\alpha = \qquad (\cos\alpha \equiv z)$$

$$= 2q \int_{-1}^{1} z \, dz = 0$$

il momento di dipolo della sfera $\bar{p}$ è indipendente dal sistema di riferimento usato.

$\bar{p}$ è diretto lungo l'asse privilegiato ed ha modulo

$$p = \int_0^{\pi} \frac{q}{\pi R^2} \cos\alpha \cdot 2\pi R^2 \sin\alpha \, d\alpha \cdot R \cdot \cos\alpha =$$

$$= 2qR \int_{-1}^{1} z^2 dz = \frac{2}{3} q \cdot 2R$$

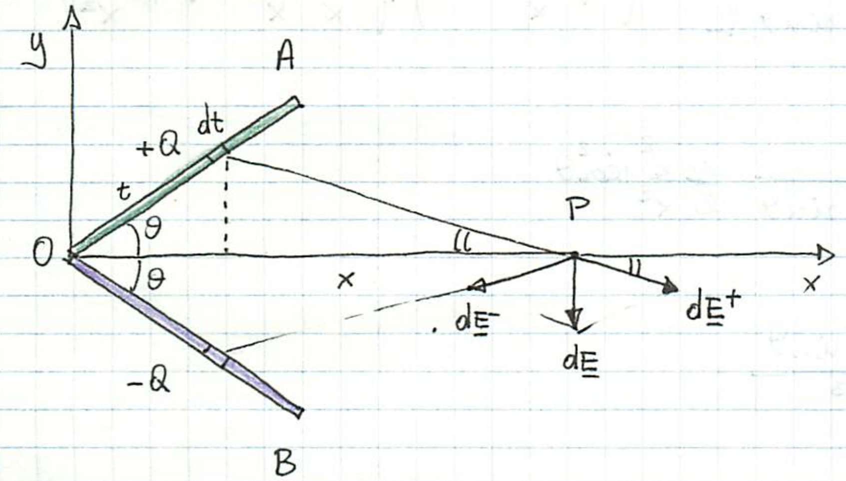
In ogni punto P a distanza $d \gg R$ da O

$$V_0(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\bar{p} \cdot \overline{OP}}{|\overline{OP}|^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\frac{2}{3} q \cdot 2R \; d \cdot \cos\theta}{d^3} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{4}{3} \frac{qR}{d^2} \cos\theta$$

essendo θ l'angolo tra $\overline{OP}$ e l'asse privilegiato.

Una carica positiva Q ed una negativa $-Q$ sono distribuite uniformemente lungo i segmenti OA e OB di lunghezza l e formanti un angolo 2θ. Si determini il campo elettrico in un punto P della bisettrice interna dell'angolo $A\hat{O}B$ a distanza x da O.



Per motivi di simmetria il campo elettrico in P è diretto lungo l'asse y

$$dE_y = -2\,\frac{Q\,dt}{4\pi\varepsilon_0 l\left[t^2\sin^2\theta + (x - t\cos\theta)^2\right]}\cdot\frac{t\sin\theta}{\left[(x-t\cos\theta)^2 + t^2\sin^2\theta\right]^{1/2}}$$

$$E_y = \int dE_y = -\frac{2Q\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 l}\int_0^l \frac{t}{\left(t^2 - 2x\cos\theta\, t + x^2\right)^{3/2}}\,dt =$$

$$= -\frac{2Q\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 l}\left[\frac{x^2 - x\cos\theta\, t}{\sqrt{t^2 - 2x\cos\theta\, t + x^2}}\,\frac{1}{x^2\cos^2\theta - x^2}\right]_0^l$$

$$= +\frac{2Q\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 l\, x^2\sin^2\theta}\left(\frac{x^2 - xl\cos\theta}{\sqrt{l^2 + x^2 - 2xl\cos\theta}} - \frac{x^2}{x}\right) =$$

$$= -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\, x l\sin\theta}\left(1 - \frac{1 - \frac{l}{x}\cos\theta}{\sqrt{1 + \frac{l^2}{x^2} - 2\frac{l}{x}\cos\theta}}\right)$$

quando $x \gg l$ ovvero $\frac{l}{x} \ll 1$

$$E_y = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 x l \sin\theta}\left[1-\left(1-\frac{l}{x}\cos\theta\right)\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{l^2}{x^2}-2\frac{l}{x}\cos\theta\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{3}{8}\left(\frac{l^2}{x^2}-2\frac{l}{x}\cos\theta\right)^2+\dots\right]\right]=$$

$$= -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l x \sin\theta}\left[1-\left(1-\frac{l}{x}\cos\theta\right)\left(1+\frac{l}{x}\cos\theta+\frac{l^2}{x^2}\cos^2\theta-\frac{1}{2}\frac{l^2}{x^2}\sin^2\theta\right.\right.$$
$$\left.\left.+\dots\right)\right]=$$

$$= -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l x \sin\theta}\,\frac{1}{2}\frac{l^2}{x^2}\sin^2\theta$$

$$= -\frac{Q l \sin\theta}{2\pi\varepsilon_0 \, x^3}$$

si noti che $\quad E_y = -\frac{\partial}{\partial y} V(P)\Big|_{x,y=0}$ con $V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\bar{p}\cdot\bar{r}}{r^3}$

$\underline{r} = (x, y) \qquad \bar{p} = (p_x, p_y)$ = momento di dipolo elettrico.

$$p_x = 0 \qquad p_y = 2\int_0^l \frac{Q}{l}\, t\sin\theta\, dt = Q l \sin\theta$$

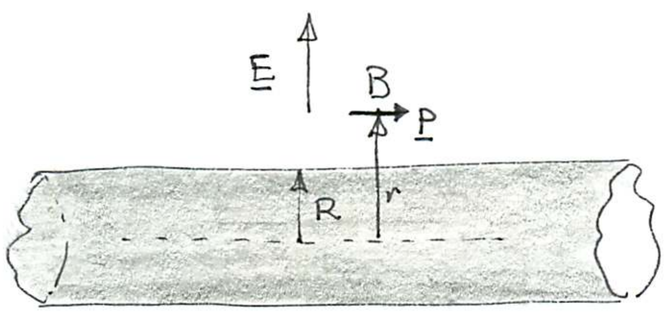
$$V(P) = = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q l \sin\theta\, y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$E_y = -\frac{\partial}{\partial y}V(P)\Big|_{x\, y=0} = -\frac{Q l \sin\theta}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}-\frac{3}{2}y\frac{2y}{(x^2+y^2)^{5/2}}\right]_{x,y=0}$$

$$= -\frac{Q l \sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 x^3} \qquad E_x = -\frac{\partial}{\partial x}V(P)\Big|_{x,y=0} = 0$$

$$\underline{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3\bar{p}\cdot\bar{r}}{r^5}\underline{r} - \frac{\bar{p}}{r^3}\right)$$

Un tubo rettilineo indefinito a parete sottile dielettrico di raggio $R = 3\,cm$ è uniformemente carico con densità di carica superficiale σ. Nel punto B a distanza $r = 5\,cm$ dall'asse del tubo viene posto, parallelo al tubo, un dipolo elettrico di momento $p = 2\,10^{-7}\,C\,m$.
Determinare σ sapendo che il modulo del momento della forza agente sul dipolo è $M = 3.2\,N\,m$.
Determinare la d.d.p. tra B ed il centro del tubo in assenza del dipolo.



Per motivi di simmetria $\underline{E}$ è radiale e di modulo a distanza $x \geq R$ dall'asse del cilindro:

$$\phi(E) = 2\pi x \cdot l \cdot E(x) = \frac{2\pi R \sigma}{\varepsilon_0} \qquad E(x) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\frac{R}{x}$$

$$M = \left| \underline{p} \times \underline{E} \right| = p E(r) = p \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \frac{R}{r}$$

$$\sigma = \frac{M \varepsilon_0}{p} \frac{r}{R} =$$

$$= \frac{3.2 \quad 8.85\ 10^{-12}}{2\ 10^{-7}} \frac{5}{3} = 2.36\ 10^{-4} \quad C\, m^{-2}$$

per $0 < x < R$ $\quad E(x) = 0$

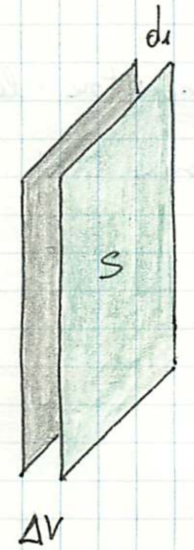
$$\Delta V = V(x=r) - V(x=0) = \int_0^r dV = -\int_0^r E(x) dx =$$

$$= -\int_R^r \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \frac{R}{x} dx = - \frac{\sigma R}{\varepsilon_0} \ln\left(\frac{r}{R}\right) =$$

$$= -4.09\ 10^{5} \quad V$$

Un condensatore è formato da due armature piane, una fissa e l'altra mobile, di area $S = 200\ cm^2$ e distanti $d_1 = 2mm$. Fra le armature c'è l'aria. Il condensatore viene caricato con una d. d. p. $\Delta V = 100\ V$ e poi l'armatura mobile viene allontanata fino ad una distanza $d_2 = 1\ cm$. Calcolare il lavoro meccanico eseguito sull'armatura mobile e la variazione di energia elettrostatica nei casi a) il condensatore è isolato b) è collegato al generatore

---



a) se il condensatore è isolato la carica Q sulle sue armature è costante

$$Q = C(d_1)\,\Delta V \qquad \text{dove} \quad C(d_1) = \frac{\varepsilon_0 S}{d_1}$$

Quando la distanza tra le armature è x la capacità del condensatore è $C(x) = \frac{\varepsilon_0 S}{x}$

l'energia elettrostatica vale:

$$U(x) = \frac{1}{2} Q \ \Delta V(x) = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C(x)} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}\, x$$

la forza che si esercita tra le armature a distanza x è

$$F(x) = -\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S} = -Q \cdot \frac{Q/S}{2\varepsilon_0} \qquad \text{(attrattiva)}$$

il lavoro L per portare x da d_1 a d_2 è:

$$L = \int_{d_1}^{d_2} -F(x)\, dx = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}\left(d_2 - d_1\right) = 1.77\ 10^{-6}\,\mathrm{J} = \frac{\varepsilon_0 S \Delta V^2}{2 d_1^2}\left(d_2 - d_1\right)$$

$$\Delta U = U(d_2) - U(d_1) = L$$

b) se il condensatore è mantenuto collegato al generatore la d.d.p. tra le sue armature è costante; la carica varia

$$Q(x) = C(x)\,\Delta V$$

$$U(x) = \frac{1}{2} Q(x)\,\Delta V = \frac{1}{2} C(x)\,\Delta V^2 = \frac{\Delta V^2 \varepsilon_0 S}{2x}$$

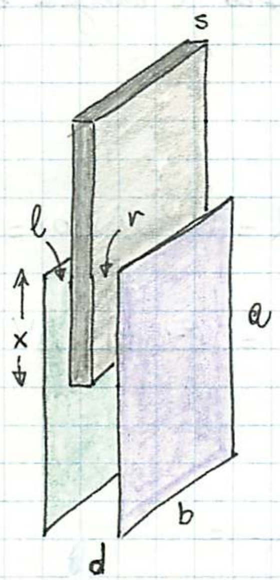
$$F(x) = +\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\Delta V^2 \varepsilon_0 S}{2x^2} \qquad \text{(attrattiva)}$$

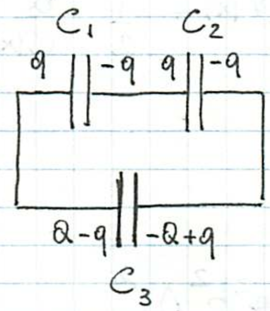
$$L = \int_{d_1}^{d_2} -F(x)\, dx = \frac{\Delta V^2 \varepsilon_0 S}{2} \left. -\frac{1}{x}\right|_{d_1}^{d_2} = \frac{\Delta V^2 \varepsilon_0 S}{2}\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right) =$$

$$= \frac{\varepsilon_0 S \Delta V^2}{2 d_1 d_2}\left(d_2 - d_1\right) = 3.54\ 10^{-7}\,\mathrm{J}$$

$$\Delta U = U(d_2) - U(d_1) = -L$$

Un condensatore è costituito da due armature rettangolari di lati $a = 10$ cm $b = 5$ cm distanti $d = 3$ cm. Una lastra metallica delle stesse dimensioni a b e spessore $s = 2$ cm. viene introdotta fra le armature parallelamente lungo a ad esse con il condensatore isolato e con d.d.p iniziale $\Delta V = 300$ V. Mostrare che sulla lastra viene esercitata una forza indipendente dalla distanza tra lastra e armature ma dipendente dalla porzione di lastra introdotta: Trovare la forza massima.





Sia x (con $0 \leq x \leq a$) la lunghezza di lastra introdotta ad una distanza l dall'armatura di sinistra e r da quella di destra:

$$d = l + s + r$$

Il sistema è equivalente a 3 condensatori C_1, C_2, C_3 collegati come in figura dove:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 \, x b}{l} \qquad C_2 = \frac{\varepsilon_0 \, x b}{r} \qquad C_3 = \frac{\varepsilon_0 \, (a-x) b}{d}$$

Il condensatore equivalente ha capacità

$$C = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^{-1} + C_3 = \left(\frac{\ell}{\varepsilon_0 x b} + \frac{r}{\varepsilon_0 x b}\right)^{-1} + \frac{\varepsilon_0 (a-x) b}{d} =$$

$$= \frac{\varepsilon_0 x b}{d-s} + \frac{\varepsilon_0 (a-x) b}{d} = \varepsilon_0 b \, \frac{ad - as + xs}{d(d-s)}$$

si noti che $C = C(x)$ ma non dipende da ℓ ed r

essendo il sistema di condensatori isolato l'energia elettrostatica vale:

$$U(x) = \frac{1}{2} Q \, \Delta V(x) = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C(x)} \qquad \text{dove } Q = C(0) \Delta V(0) = \frac{\varepsilon_0 a b}{d} \Delta V$$

$$U(x) = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0^2 a^2 b^2 \Delta V^2}{d^2} \frac{d(d-s)}{\varepsilon_0 b (da - as + xs)} =$$

$$= \frac{\varepsilon_0 a^2 b \Delta V^2 (d-s)}{2d(ad - as + xs)}$$

diminuisce al crescere di x cioè la lastra viene succhiata dentro le armature

$$F(x) = -\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\varepsilon_0 a^2 b \, \Delta V^2 (d-s) s}{2d(ad - as + xs)^2}$$

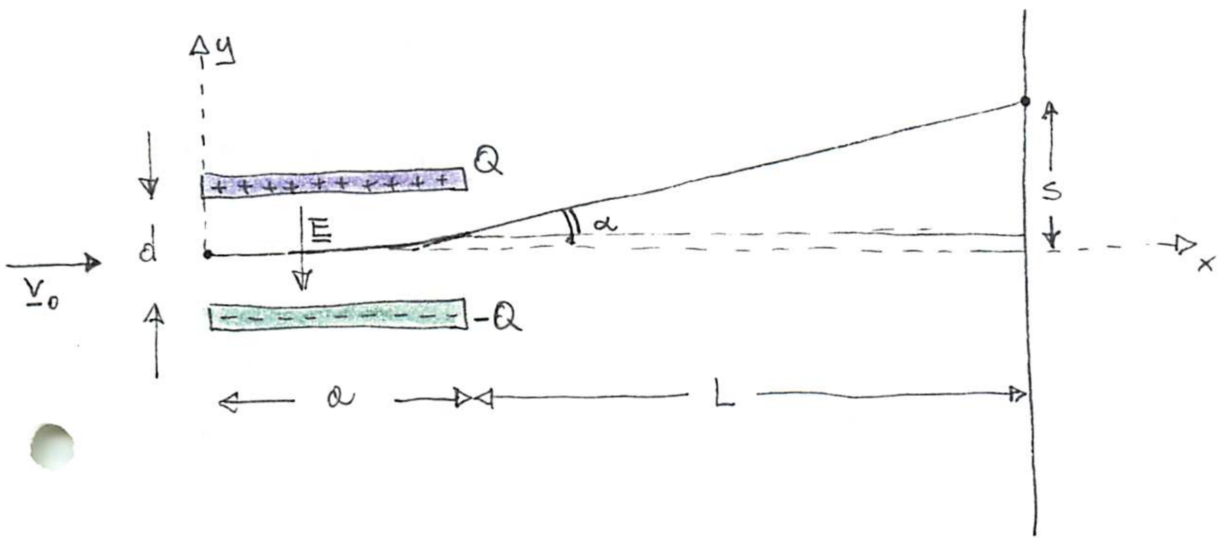
la forza è massima per $x = 0$ e vale

$$F_{max} = F(0) = \frac{\varepsilon_0 b s \Delta V^2}{2d(d-s)} = 1.33 \; 10^{-6} \, N$$

da cosa si origina $F(x)$ lungo x? perché $F(a) \neq 0$ come dovrebbe?
$F(a) \ll F(0)$ per $d-s \ll d$

Un elettrone ($e = 1.6\ 10^{-19}$ C, $m = 9.11\ 10^{-31}$ Kg) penetra alla velocità $v_0 = 2\ 10^{7}$ m s^{-1} tra le armature di un condensatore a facce piane e parallele di superficie $S = a^2$, $a = 4$ cm,

Sapendo che v_0 è parallela alle facce del condensatore sul quale è depositata una carica $Q = 3\ 10^{-10}$ C, determinare il punto di impatto dell'elettrone su uno schermo distante $L = 12$ cm. dal condensatore.



tra le armature del condensatore esiste un campo elettrico uniforme diretto secondo $-y$ di valore

$$E = \frac{\Delta V}{d} = \frac{Q}{C d} \qquad C = \varepsilon_0 \frac{a^2}{d} \qquad E = \frac{Q}{\varepsilon_0 a^2}$$

$$E = \frac{Q/a^2}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 a^2}$$ indipendente da d

trascurando la gravità e l'induzione le equazioni del moto per $0 < x < a$ sono:

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = \frac{eE}{m} \end{cases}$$

con le condizioni iniziali $x(0) = y(0) = 0$ $\dot{x}(0) = v_0$ $\dot{y}(0) = 0$

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} t^2 \end{cases}$$

$$y(x) = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} \frac{x^2}{v_0^2}$$

$$y(a) = \frac{1}{2} \frac{eE}{m} \frac{a^2}{v_0^2} = \frac{1}{2} \frac{e}{m} \frac{Q}{\varepsilon_0 \cancel{a^2}} \frac{\cancel{a^2}}{v_0^2} = \frac{eQ}{2m\varepsilon_0 v_0^2}$$

per $x > a$ il moto è rettilineo ed uniforme lungo la direzione di α

$$\tan\alpha = \left.\frac{dy(x)}{dx}\right|_{x=a} = \frac{eE}{m} \frac{a}{v_0^2} = \frac{eQ}{m\varepsilon_0 a v_0^2}$$

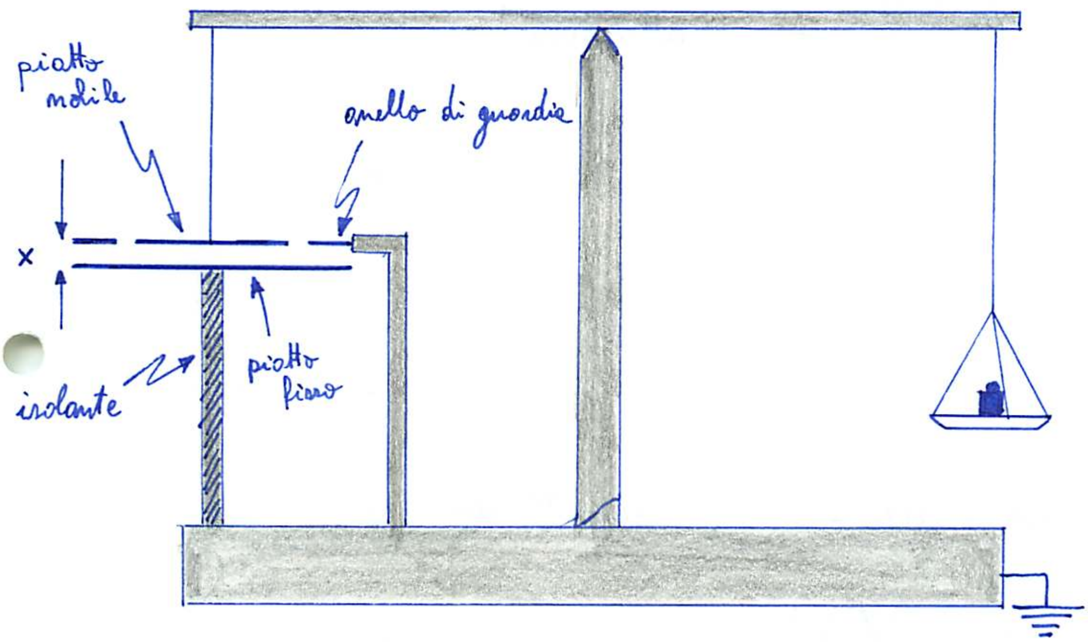
la posizione dell'impatto sullo schermo è:

$$s = y(a) + L \tan\alpha = \frac{eQ}{2m\varepsilon_0 v_0^2} + \frac{eQ}{m\varepsilon_0 v_0^2} \frac{L}{a} =$$

$$= \frac{eQ}{m\varepsilon_0 v_0^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{L}{a} \right) = 5.2 \text{ cm}$$

Elettrometro assoluto (o di Lord Kelvin)

strumento che riconduce la misura della d.d.p. fra due corpi alla misura di una forza peso.



a) funzionamento a carica costante: si porta il piatto fisso a potenziale V incognito cedendogli una carica Q che poi viene mantenuta costante (i.e. isolando il piatto fisso)

il piatto mobile viene attirato in basso e lo si riequilibra aggiungendo una forza peso P. Detta S la superficie del piatto mobile ed x la distanza tra i piatti:

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 \, S\cdot x = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{Q}{\varepsilon_0 S}\right)^2 S x = \frac{x Q^2}{2\varepsilon_0 S}$$

$$F_x = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_Q = -\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S} = -\frac{\varepsilon_0 S V^2}{2x^2}$$ attrattiva!

$$V = x\sqrt{\frac{2P}{\varepsilon_0 S}}$$

b) funzionamento a d.d.p. costante: tra i piatti viene posta una d.d.p. V incognita costante

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 \, Sx = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(-\frac{V}{x}\right)^2 S\,x = \frac{\varepsilon_0 S V^2}{2\,x}$$

$$F_x = +\left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}\right)_V = -\frac{\varepsilon_0 S V^2}{2x^2}$$ attrattiva!

$$V = x\sqrt{\frac{2P}{\varepsilon_0 S}}$$

---

carica costante

$$d\mathcal{U} + dL = 0 \qquad dL = \underline{F}\cdot d\underline{r}$$

$$\underline{F} = -\left(\underline{\nabla}\mathcal{U}\right)_Q$$

potenziale costante

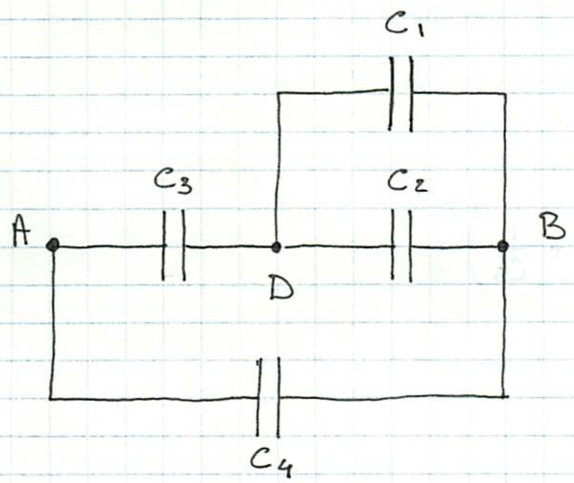
$$d\mathcal{U} + dL = dL_{gen}$$

$$dL_{gen} = \sum_i V_i\, dQ_i = 2\, d\mathcal{U} \qquad \left(\mathcal{U} = \frac{1}{2}\sum_i V_i Q_i\right)$$

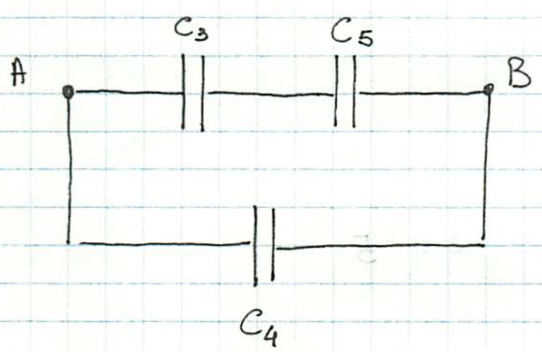
$$-d\mathcal{U} + dL = 0$$

$$\underline{F} = +\left(\underline{\nabla}\mathcal{U}\right)_V$$

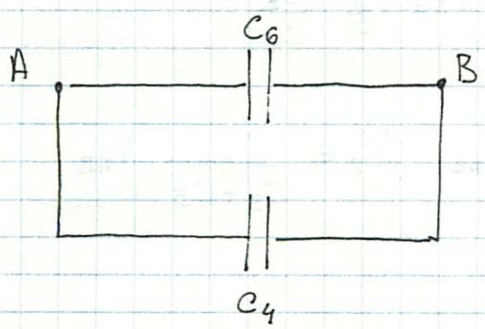
Si calcoli la capacità totale tra i punti A e B del circuito in figura e quella tra A e D. Se la d.d.p. tra A e B vale $V_{AB} = 10\,V$ quanto valgono le d.d.p. ai capi dei vari condensatori?
Si assume $C_1 = 1\,\mu F$ $C_2 = 3\,\mu F$ $C_3 = 4\,\mu F$ $C_4 = 7\,\mu F$.



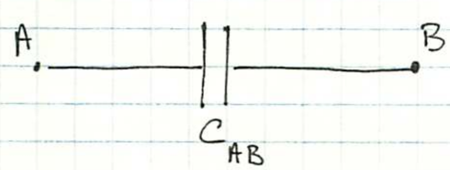
Il circuito equivalente visto da A e B è



$$C_5 = C_1 + C_2$$



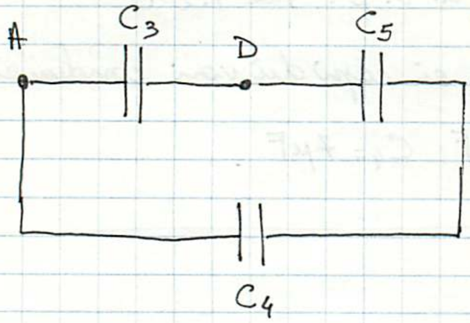
$$C_6 = \left(\frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_5} \right)^{-1}$$



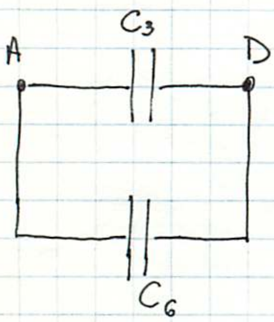
$$C_{AB} = C_4 + C_6 = C_4 + \left(\frac{C_3 + C_5}{C_3\, C_5} \right)^{-1} =$$

$$= C_4 + \frac{C_3(C_1 + C_2)}{C_1 + C_2 + C_3} = 9\,\mu F$$

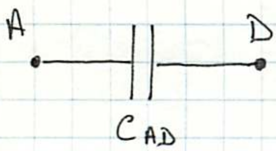
Il circuito visto da A D è:



$$C_5 = C_1 + C_2$$



$$C_6 = \left(\frac{1}{C_4} + \frac{1}{C_5} \right)^{-1}$$



$$C_{AD} = C_3 + C_6 = C_3 + \frac{C_4 C_5}{C_4 + C_5} =$$

$$= C_3 + \frac{(C_1+C_2)C_4}{C_1+C_2+C_4} = 6.5\ \mu F$$

Se $V_{AB} = 10\ V$

$V_4 = V_{AB} = 10\ V$ $\quad V_1 = V_2 = V_5 \quad V_{AB} = V_3 + V_5$

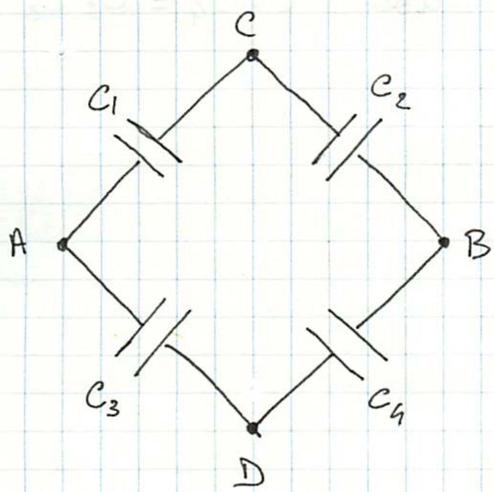
$Q_3 = Q_5 \Rightarrow V_3 C_3 = V_5 C_5$ cioè $V_3 = V_5 \frac{C_5}{C_3}$

$V_{AB} = V_5 \frac{C_5}{C_3} + V_5 \qquad V_5 = \frac{C_3}{C_5 + C_3} V_{AB} \qquad V_3 = \frac{C_5}{C_3 + C_5} V_{AB}$

$$V_3 = \frac{C_1 + C_2}{C_1 + C_2 + C_3} V_{AB} = 5V$$

$$V_1 = V_2 = V_5 = \frac{C_3}{C_1 + C_2 + C_3} V_{AB} = 5\ V$$

Quattro condensatori di capacità C_1 C_2 C_3 e C_4 sono disposti come in figura: tra i punti A e B è applicata una d. d. p. V.
Trovare la d. d. p. tra C e D e la relazione che deve intercorrere tra le 4 capacità affinché $V_{CD} = 0$



lungo il tratto ACB la capacità equivalente è $C = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)^{-1}$

la carica Q sul condensatore equivalente C e quindi su C_1 e C_2 vale

$$Q_1 = Q_2 = Q = C\,V = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} V$$

quindi $V_C - V_A = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{C_2}{C_1 + C_2} V$

lungo il tratto ADB la capacità equivalente è $C = \left(\frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4}\right)^{-1}$

la carica Q su C e quindi su C_3 e C_4 vale:

$$Q_3 = Q_4 = Q = C\,V = \frac{C_3 C_4}{C_3 + C_4} V$$

quindi $V_D - V_A = \frac{C_4}{C_3 + C_4} V$

sottraendo membro a membro

$$V_D - V_A - (V_C - V_A) = V_D - V_C = \left(\frac{C_4}{C_3+C_4} - \frac{C_2}{C_1+C_2} \right) V$$

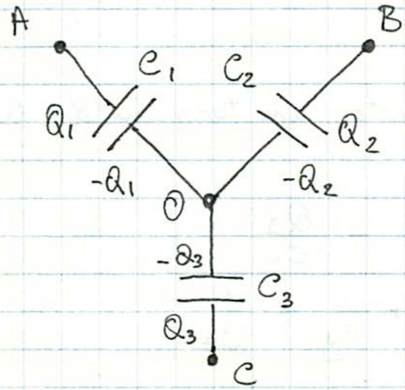
$V_D = V_C$ se $\dfrac{C_4}{C_3+C_4} = \dfrac{C_2}{C_1+C_2}$ cioè $C_1 C_4 = C_2 C_3$

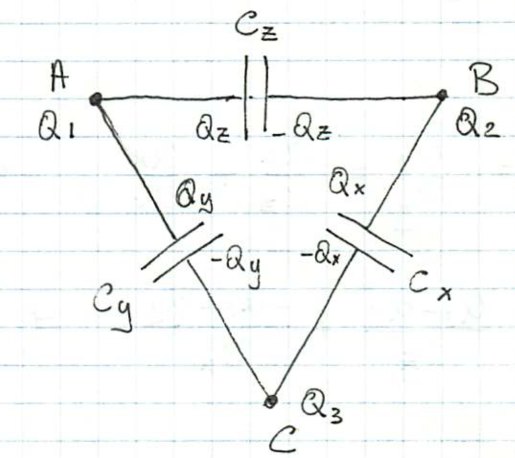
Nella rete a stella sono note le capacità C_1 C_2 C_3 e le cariche Q_1 Q_2

Si calcoli la d.d.p. $V_A - V_B$, $V_A - V_C$ e $V_B - V_C$.

Nella rete a triangolo ABC si suppone di aver caricato i condensatori ponendo le cariche Q_1 Q_2 Q_3 del caso a stella nei punti A B C.

Quali relazioni devono intercorrere tra C_x C_y C_z e $C_1 C_2 C_3$ affinché le d.d.p. $V_A - V_B$ $V_A - V_C$ $V_B - V_C$ siano uguali al caso della stella?





Nella stella si ha:

$$V_A - V_O = \frac{Q_1}{C_1} \qquad V_B - V_O = \frac{Q_2}{C_2} \quad \Rightarrow \quad V_A - V_B = \frac{Q_1}{C_1} - \frac{Q_2}{C_2}$$

poiché $-Q_1 - Q_2 - Q_3 = 0$ cioè $Q_3 = -Q_1 - Q_2$ si ha:

$$V_C - V_O = \frac{Q_3}{C_3} = -\frac{Q_1 + Q_2}{C_3} \quad \Rightarrow \quad V_A - V_C = Q_1\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3}\right) + \frac{Q_2}{C_3}$$

$$V_B - V_C = V_B - V_A - (V_C - V_A) = (V_A - V_C) - (V_A - V_B) = Q_2\left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right) + \frac{Q_1}{C_3}$$

Nel caso del triangolo, dette Q_x Q_y Q_z le cariche sui condensatori, si ha:

$$Q_1 = Q_y + Q_z \qquad Q_2 = Q_x - Q_z \qquad Q_3 = -Q_x - Q_y$$

inoltre $Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$

$$V_A - V_B = \frac{Q_z}{C_z} = \frac{Q_y}{C_y} - \frac{Q_x}{C_x}$$ esprimendo tutto in termini di Q_z

$$\frac{Q_z}{C_z} = \frac{Q_1 - Q_z}{C_y} - \frac{Q_2 + Q_z}{C_x} \Rightarrow Q_z = \frac{\frac{Q_1}{C_y} - \frac{Q_2}{C_x}}{\frac{1}{C_x} + \frac{1}{C_y} + \frac{1}{C_y}}$$

$$V_A - V_C = \frac{Q_y}{C_y} = \frac{Q_z}{C_z} + \frac{Q_x}{C_x}$$ esprimendo tutto in termini di Q_y

$$\frac{Q_y}{C_y} = \frac{Q_1 - Q_y}{C_z} + \frac{-Q_3 - Q_y}{C_x} \Rightarrow Q_y = \frac{\frac{Q_1}{C_z} - \frac{Q_3}{C_x}}{\frac{1}{C_x} + \frac{1}{C_y} + \frac{1}{C_z}}$$

Imponendo che $V_A - V_B$ e $V_A - V_C$ sia uguali al caso a stella ($V_B - V_C$ è dipendente)

$$\frac{\frac{Q_1}{C_y C_z} - \frac{Q_2}{C_x C_z}}{\frac{1}{C_x} + \frac{1}{C_y} + \frac{1}{C_z}} = \frac{Q_1}{C_1} - \frac{Q_2}{C_2}$$

$$\frac{\frac{Q_1}{C_y C_z} - \frac{Q_3}{C_y C_x}}{\frac{1}{C_x} + \frac{1}{C_y} + \frac{1}{C_z}} = Q_1\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3}\right) + \frac{Q_2}{C_3}$$

queste uguaglianze sono soddisfatte per ogni valore di Q_1 Q_2

e $Q_3 = -Q_1 - Q_2$ se

$$\begin{cases} C_1 = C_y C_z \left(\dfrac{1}{C_x} + \dfrac{1}{C_y} + \dfrac{1}{C_z} \right) \\[2ex] C_2 = C_x C_z \left(\dfrac{1}{C_x} + \dfrac{1}{C_y} + \dfrac{1}{C_z} \right) \\[2ex] C_3 = C_y C_x \left(\dfrac{1}{C_x} + \dfrac{1}{C_y} + \dfrac{1}{C_z} \right) \end{cases}$$

ovvero:

$$\begin{cases} C_1 = \left(C_x C_y + C_x C_z + C_y C_z \right) / C_x \\ C_2 = \left(C_x C_y + C_x C_z + C_y C_z \right) / C_y \\ C_3 = \left(C_x C_y + C_x C_z + C_y C_z \right) / C_z \end{cases}$$

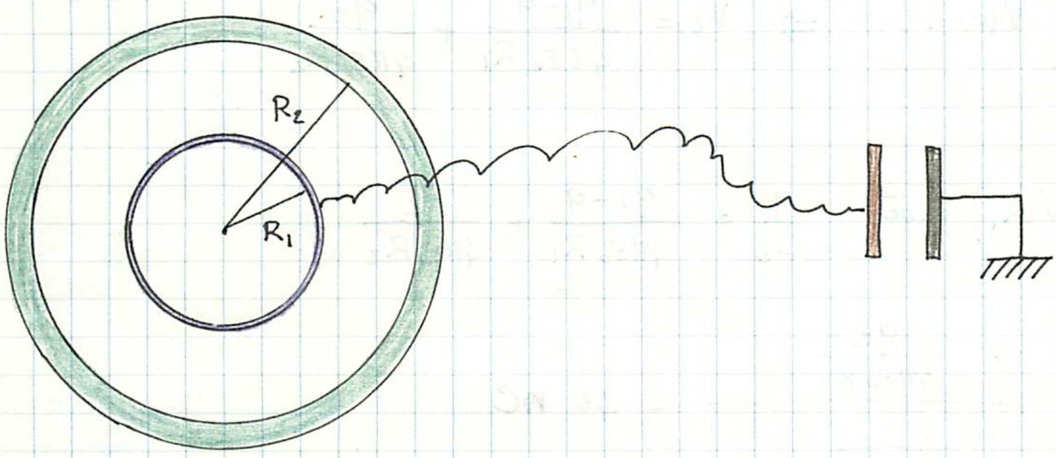
per invertire queste relazioni si osservi che:

$$C_1 + C_2 + C_3 = \frac{\left(C_x C_y + C_x C_z + C_y C_z \right)^2}{C_x C_y C_z} = \frac{C_1 C_2}{C_z} = \frac{C_1 C_3}{C_y} = \frac{C_2 C_3}{C_x}$$

quindi:

$$\begin{cases} C_x = \dfrac{C_2 C_3}{C_1 + C_2 + C_3} \\[2ex] C_y = \dfrac{C_1 C_3}{C_1 + C_2 + C_3} \\[2ex] C_z = \dfrac{C_1 C_2}{C_1 + C_2 + C_3} \end{cases}$$

Due superfici sferiche conduttrici concentriche di raggi $R_1 = 20$ cm e $R_2 = 30$ cm sono isolate l'una dall'altra e da terra ed hanno cariche $q_1 = 15\,\mu C$ $q_2 = -22\,\mu C$. Tramite un filo metallico si connette la sfera interna ad un elettroscopio di capacità $C_e = 3\,pF$. Quale carica q acquista l'elettroscopio? Si ripeta nel caso della sfera esterna.



L'elettroscopio può considerarsi come un condensatore avente una armatura a terra. Se q è la carica acquistata dall'elettroscopio l'altra armatura dell'elettroscopio si porta a potenziale

$$V_e = \frac{q}{C_e}$$

tale potenziale deve essere uguale a quello della sfera interna di raggio R_1. Nell'ipotesi che l'elettroscopio sia lontano dalle due sfere il potenziale si calcola con il teorema di Gauss:

$$E(r) = \begin{cases} 0 & 0 < r < R_1 \\ \dfrac{q_1 - q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & R_1 < r < R_2 \\ \dfrac{q_2 + q_1 - q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & R_2 < r \end{cases}$$

$$V(r) = V_0 - \int_0^r E(r')\, dr'$$

$$V(r) = \begin{cases} V_0 & 0 < r < R_1 \\[2ex] V_0 + \dfrac{q_1 - q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{R_1}\right) & R_1 < r < R_2 \\[2ex] V_0 + \dfrac{q_1 - q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{R_2} - \dfrac{1}{R_1}\right) + \dfrac{q_2 + q_1 - q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{R_2}\right) & r > R_2 \end{cases}$$

imponendo $\lim_{r \to \infty} V(r) = 0 \Rightarrow V_0 = \dfrac{q_1 - q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$

quindi $V_e = V(R_1)$ cioè $\dfrac{q}{C_e} = \dfrac{q_1 - q}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$

$$q = \frac{\dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}}{\dfrac{1}{C_e} + \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}} = 40 \text{ nC}$$

Se all'elettroscopio è collegata la sfera esterna si ha:

$$V(r) = \begin{cases} V_0 & 0 < r < R_1 \\[2ex] V_0 + \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{R_1}\right) & R_1 < r < R_2 \\[2ex] V_0 + \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{R_2} - \dfrac{1}{R_1}\right) + \dfrac{q_2 - q + q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{R_2}\right) & R_2 < r \end{cases}$$

$\lim_{r \to \infty} V(r) = 0 \Rightarrow V_0 = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \dfrac{q_2 - q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$

$V_e = V(R_2)$ cioè $\dfrac{q}{C_e} = \dfrac{q_1 + q_2 - q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$

$$q = \frac{q_1 + q_2}{1 + \dfrac{4\pi\varepsilon_0 R_2}{C_e}} = -0.58\ \mu C$$