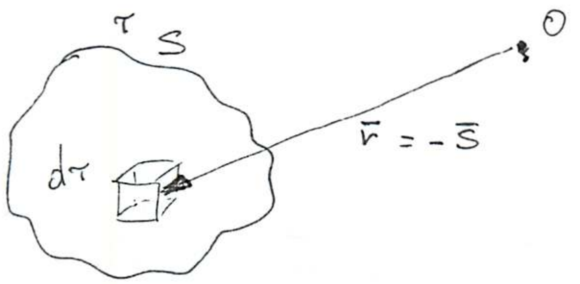
ELETTROSTATICA
NEI
DIELETTRICI

Elettrostatica nei Dielettrici

$$\begin{cases} \underline{\nabla} \cdot \underline{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \underline{\nabla} \times \underline{E} = 0 \end{cases} \qquad \rho = \rho_{lib} + \rho_{pol}$$

le cariche libere (ρ_{lib}) polarizzano il mezzo creando ρ_{pol}

Sia $\overline{P}$ il momento di dipolo elettrico indotto per unità di volume (polarizzazione)



$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(\overline{P}\, d\tau) \cdot \overline{S}}{S^3} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(\overline{P}\, d\tau) \cdot \overline{r}}{r^3}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \overline{P} \cdot \underline{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) d\tau =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\underline{\nabla} \cdot \frac{\overline{P}}{r}\right) d\tau - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} \left(\underline{\nabla} \cdot \overline{P}\right) d\tau$$

avendo usato $\underline{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{r}{r^3}$

$$\underline{\nabla} \cdot (\alpha \underline{A}) = (\underline{\nabla} \alpha) \cdot \underline{A} + \alpha (\underline{\nabla} \cdot \underline{A})$$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\tau \underline{\nabla}\cdot\left(\frac{\overline{P}}{r}\right) d\tau - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\tau \frac{\underline{\nabla}\cdot\overline{P}}{r}\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\overline{P}\cdot\overline{n}}{r}\, ds + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\tau \frac{-\underline{\nabla}\cdot\underline{P}}{r}\, d\tau$$

$$\begin{cases} \sigma_{pol} = \overline{P}\cdot\overline{n} \\ \rho_{pol} = -\underline{\nabla}\cdot\underline{P} \end{cases}$$

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{E} = \frac{\rho_{lib}}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon_0}\underline{\nabla}\cdot\underline{P} \Rightarrow \underline{\nabla}\cdot\left(\underline{E} + \frac{1}{\varepsilon_0}\underline{P}\right) = \frac{\rho_{lib}}{\varepsilon_0}$$

- mezzi isotropi $\qquad \underline{P} \propto \underline{E} \qquad \underline{P} = \chi\varepsilon_0\underline{E}$

$$\underline{\nabla}\cdot\left[(1+\chi)\underline{E}\right] = \frac{\rho_{lib}}{\varepsilon_0} \qquad 1+\chi \equiv \varepsilon_r$$

$$\underline{\nabla}\cdot(\varepsilon_r\underline{E}) = \frac{\rho_{lib}}{\varepsilon_0}$$

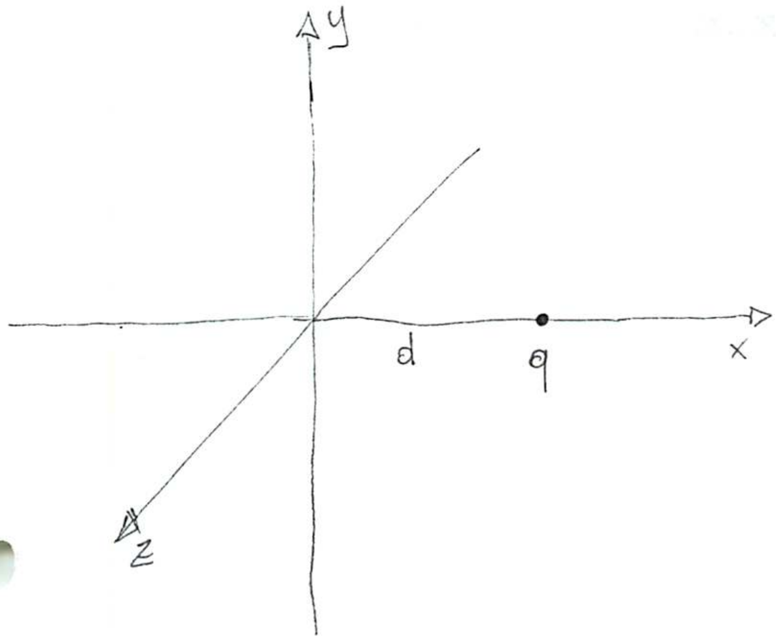
- mezzi isotropi + omogenei $\qquad \underline{\nabla}\varepsilon_r = 0$

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{E} = \frac{\rho_{lib}}{\varepsilon} \qquad \varepsilon \equiv \varepsilon_0\varepsilon_r$$

- $\underline{D} \equiv \varepsilon_0\underline{E} + \underline{P} \qquad \underline{\nabla}\cdot\underline{D} = \rho_{lib.}$

- $E_{1t} = E_{2t} \qquad D_{1n} = D_{2n}$

Point charge in a semiinfinite dielectric



$$\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon_1 & x > 0 \\ \varepsilon_2 & x < 0 \end{cases}$$

We must solve the equations

$\varepsilon_1 \underline{\nabla} \cdot \underline{E} = \rho$ for $x>0$

$\varepsilon_2 \underline{\nabla} \cdot \underline{E} = 0$ for $x<0$

$\underline{\nabla} \times \underline{E} = 0$

subject to the boundary conditions:

$$\lim_{x \to 0^+} E_{y,z} = \lim_{x \to 0^-} E_{y,z} \qquad \lim_{x \to 0^+} \varepsilon_1 E_x = \lim_{x \to 0^-} \varepsilon_2 E_x$$

Since $\underline{\nabla} \times \underline{E} = 0$ everywhere $\underline{E} = -\underline{\nabla} V$

To find V when $x>0$. locate an image charge q' at $(-d, 0, 0)$

$$V(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_1}\left\{ \frac{q}{\sqrt{r^2+(x-d)^2}} + \frac{q'}{\sqrt{r^2+(x+d)^2}} \right\} \qquad x>$$

$$r^2 \equiv y^2+z^2$$

To find V when $x<0$ locate an image charge q'' in $(d,0,0)$

$$V(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_2}\cdot\frac{q''}{\sqrt{r^2+(x-d)^2}} \qquad x<0$$

The electric field is:

$$E_x(x,y,z) = -\frac{\partial V}{\partial x} = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_1}\left\{ \dfrac{q(x-d)}{\left[r^2+(x-d)^2\right]^{3/2}} + \dfrac{q'(x+d)}{\left[r^2+(x-d)^2\right]^{3/2}} \right\} & x>0 \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_2}\,\dfrac{q''(x-d)}{\left[r^2+(x-d)^2\right]^{3/2}} & x<0 \end{cases}$$

$$E_y(x,y,z) = -\frac{\partial V}{\partial y} = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_1}\left\{ \dfrac{qy}{\left[r^2+(x-d)^2\right]^{3/2}} + \dfrac{q'y}{\left[r^2+(x-d)^2\right]^{3/2}} \right\} & x>0 \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_2}\,\dfrac{q''y}{\left[r^2+(x-d)^2\right]^{3/2}} & x<0 \end{cases}$$

$$E_z = E_{y\to z}$$

Boundary conditions

$$\varepsilon_1 \frac{1}{4\pi\varepsilon_1}\left\{\frac{-qd}{(r^2+d^2)^{3/2}}+\frac{q'd}{(r^2+d^2)^{3/2}}\right\}=\varepsilon_2\frac{1}{4\pi\varepsilon_2}\frac{-q''d}{(r^2+d^2)^{3/2}}$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_1}\left\{\frac{qy}{(r^2+d^2)^{3/2}}+\frac{q'y}{(r^2+d^2)^{3/2}}\right\}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_2}\frac{q''y}{(r^2+d^2)^{3/2}}$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_1}\left\{\frac{qz}{(r^2+d^2)^{3/2}}+\frac{q'z}{(r^2+d^2)^{3/2}}\right\}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_2}\frac{q''z}{(r^2+d^2)^{3/2}}$$

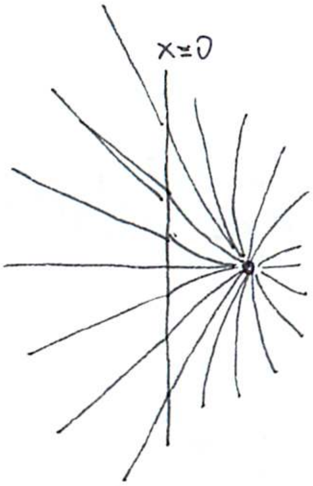
from which

$$\begin{cases} q-q'=q'' \\ \frac{1}{\varepsilon_1}(q+q')=\frac{1}{\varepsilon_2}q'' \end{cases}$$

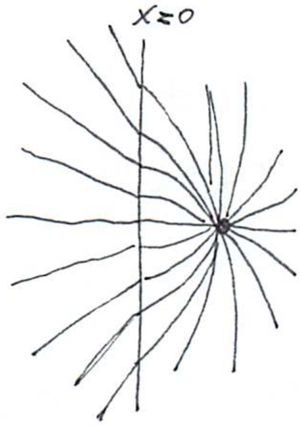
$$\varepsilon_2 q+\varepsilon_2 q'=\varepsilon_1 q-\varepsilon_1 q'$$

$$\begin{cases} q'=\dfrac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}q \\[2ex] q''=\dfrac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}q \end{cases}$$

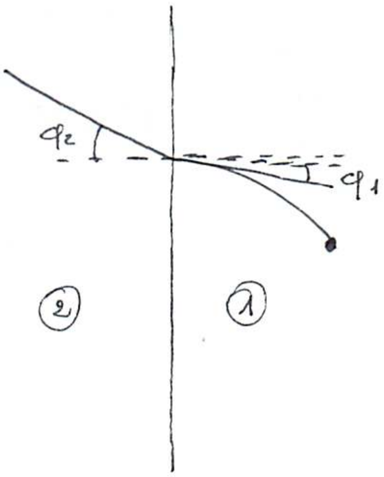
the lines of force are qualitatively



$\varepsilon_2 < \varepsilon_1$



$\varepsilon_2 > \varepsilon_1$



$$\frac{\tan q_1}{\tan q_2} = \frac{E_{1t}/E_{1n}}{E_{2t}/E_{2n}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

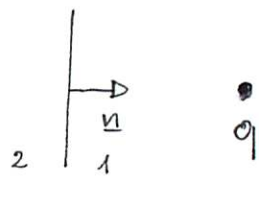
polarization $\quad \underline{P} = \chi \underline{E}\, \varepsilon_0 = (\varepsilon - \varepsilon_0)\underline{E}$

$$\rho_{pol} = -\underline{\nabla} \cdot \underline{P} = \begin{cases} -\dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{\varepsilon_1}\, q\, \delta(\underline{x} - \underline{x}_q) & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \qquad \underline{x}_q \equiv (d, 0, 0)$$

at $x = 0$ we have a polarization surface charge density

$$\sigma_{pol} = -\underline{P}_1 \cdot \underline{n} + \underline{P}_2 \cdot \underline{n} = -(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) E_x(0^+, y, z) + (\varepsilon_2 - \varepsilon_0) E_x(0^-, y, z) =$$

$$= -\varepsilon_0 \left[E_x(0^-, y, z) - E_x(0^+, y, z) \right]$$



$$\sigma_{pol} = \varepsilon_0 \left\{ \frac{1}{4\pi\varepsilon_2} \cdot \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_1}\left[-1 + \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} \right] \right\} \cdot$$

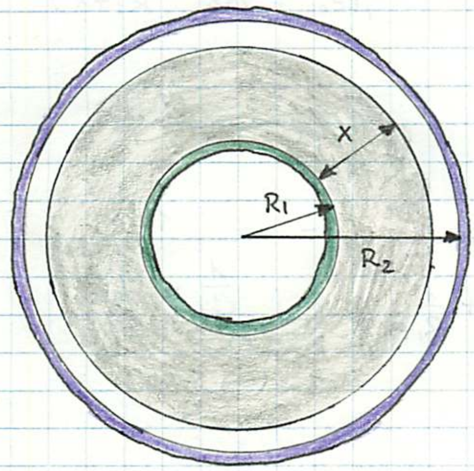
$$\cdot \frac{q\, d}{(r^2+d^2)^{3/2}} =$$

$$= -\frac{\varepsilon_0}{4\pi} \frac{q\, d}{(r^2+d^2)^{3/2}} \frac{2(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{\varepsilon_1(\varepsilon_2+\varepsilon_1)}$$

$$= -\frac{q}{2\pi} \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_2-\varepsilon_1)}{\varepsilon_1(\varepsilon_2+\varepsilon_1)} \frac{d}{(r^2+d^2)^{3/2}}$$

In the limit, $\varepsilon_2 \gg \varepsilon_1$ the dielectric 2 behaves like a conductor.

Un condensatore sferico tra l'armatura interna di raggio R_1 e quella esterna di raggio R_2. L'armatura interna è coperta da uno spessore x $(0 < x < R_2 - R_1)$ di isolante con costante dielettrica ε_r. Determinare la capacità del condensatore.



Detta Q la carica sulle armature del condensatore e ΔV la relativa d. d. p. si ha

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

Dal teorema di Gauss ed usando la simmetria sferica del problema

$$\phi(\underline{D}) = 4\pi r^2 D = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$D(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad R_1 < r < R_2$$

$$E(r) = D(r) \qquad R_1 + x < r < R_2 \qquad\qquad E(r) = \frac{D(r)}{\varepsilon_r} \qquad R_1 < r < R_1 + x$$

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \dfrac{1}{r^2} & R_1 < r < R_1+x \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{1}{r^2} & R_1+x < r < R_2 \end{cases}$$

$$\Delta V = \left| \int_{R_1}^{R_2} E(r)\,dr \right| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{-1}{R_1+x} + \frac{1}{R_1}\right) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1+x}\right)$$

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{1}{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{-1}{R_1+x} + \frac{1}{R_1}\right) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1+x}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

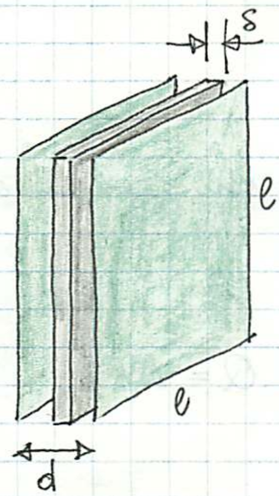
$$C_1 = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r \frac{(R_1+x)R_1}{R_1+x-R_1}$$

capacità del condensatore sferico R_1 R_1+x con dielettrico.

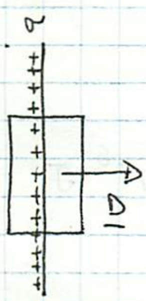
$$C_2 = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_2(R_1+x)}{R_2-(R_1+x)}$$

capacità del condensatore sferico R_1+x R_2 con vuoto.

Un condensatore piano ha le armature quadrate di lato $l = 40$ cm. e distanza $d = 1$ cm. Tra le armature e parallelamente ad esse si trova una lastra di mica ($\varepsilon_r = 6.5$) di spessore $\delta = 4$ mm. Si calcoli la capacità C del condensatore ignorando gli effetti di bordo. Se il condensatore viene caricato con una d. d. p. $\Delta V = 300$ V e poi isolato quale lavoro si deve compiere per estrarre completamente la lastra di mica?



Se σ e $-\sigma$ sono le densità di carica sulle due armature del condensatore dal teorema di Gauss per $\underline{D}$ si ha



$$\Phi(\underline{D}) = D \cdot A = \sigma A \Rightarrow D = \sigma$$

$D = \sigma$ nel vuoto e perpendicolare alle lastre

poiché D_n si conserva $\quad D = \sigma$ ovunque

$$E = \frac{D}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad \text{nel vuoto}$$

$$E = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \quad \text{nella mica}$$

$$\Delta V = \left| \int \underline{E} \cdot d\underline{s} \right| = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}(d-\delta) + \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}\delta$$

$$C_i = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\sigma l^2}{\frac{\sigma}{\varepsilon_0}(d-\delta) + \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\delta} = \frac{1}{\frac{d-\delta}{\varepsilon_0 l^2} + \frac{\delta}{\varepsilon_0\varepsilon_r l^2}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}}$$

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 l^2}{d-\delta} \qquad C_2 = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r l^2}{\delta} \qquad C_i = 0.21 \text{ nF}$$

Quando il condensatore con la mica dentro è caricato con d.d.p ΔV la sua energia è

$$U_i = \frac{1}{2} Q \Delta V = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_i} \qquad Q = \Delta V C_i$$

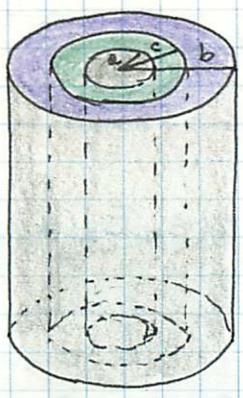
togliendo la mica a Q costante l'energia diventa

$$U_p = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_p} > U_i \quad \text{dove} \quad C_p = \frac{\varepsilon_0 l^2}{d}$$

il lavoro fatto per togliere la mica è:

$$L = U_p - U_i = \frac{1}{2}Q^2\left(\frac{1}{C_p} - \frac{1}{C_i}\right) = \frac{1}{2}\Delta V^2\left(\frac{C_i^2}{C_p} - C_i\right) = 5\cdot 10^{-6} \text{ J}$$

Le armature di un condensatore cilindrico hanno raggi a e $b>a$.
Tra le armature ci sono 2 dielettrici: il primo di costante dielettrica relativa ε_{r1} e rigidità dielettrica E_{R1} = occupa la regione $a<r<c$. il secondo (ε_{r2}, E_{R2}) la regione $c<r<b$. Per quale valore di c e per quale d. d. p. applicata al condensatore i due dielettrici cedono contemporaneamente?



Detta Q la carica sull'armatura interna del condensatore ed h la sua altezza, per il teorema di Gauss applicato ad una superficie cilindrica di raggio r si ha:

$$\phi(\underline{D}) = D\, 2\pi r h = Q$$

essendo per motivi di simmetria $\underline{D}$ radiale

$$D = \frac{\lambda}{2\pi r} \qquad \lambda \equiv \frac{Q}{h}$$

$$D(r) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{2\pi r} & a<r<b \\ 0 & r<a\ ,\ r>b \end{cases}$$

Nel passaggio dal mezzo 1 al mezzo 2 si ha:

$$\begin{cases} 0 & r<a\ ,\ r>b \\ \lambda & a<r<c \end{cases}$$

$$\begin{cases} D_{1n} = D_{2n} \\ E_{1t} = E_{2t} \end{cases} \qquad \begin{cases} \varepsilon_0 E_{1n} = \varepsilon_0 \varepsilon_r E_{2n} \\ E_{1t} = E_{2t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_1 \sin\alpha_1 = E_2 \sin\alpha_2 \\ E_1 \cos\alpha_1 = \varepsilon_r E_2 \cos\alpha_2 \end{cases}$$

$$E_2 = \sqrt{E_2^2 \sin^2\alpha_2 + E_2^2 \cos^2\alpha_2} = \sqrt{E_1^2 \sin^2\alpha_1 + \frac{E_1^2}{\varepsilon_r^2} \cos^2\alpha_1} =$$

$$= E_1 \sqrt{\sin^2\alpha_1 + \frac{1}{\varepsilon_r^2} \cos^2\alpha_1}$$

$\tan\alpha_2 = \varepsilon_r \tan\alpha_1 \qquad \alpha_2 \simeq 1.37 \text{ rad} \approx 78° 41'$

$\underline{E}_1 = \underline{E} \qquad \underline{D}_1 = \varepsilon_0 \underline{E} \qquad \underline{P}_1 = 0$

$\underline{E}_2 = \ldots \qquad \underline{D}_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_r \underline{E}_2 \qquad \underline{P}_2 = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 \underline{E}_2$

$$\frac{E_2}{E_1} = \sqrt{\sin^2\alpha_1 + \frac{1}{\varepsilon_r^2} \cos^2\alpha_1} = 0.72$$

$$\frac{D_2}{D_1} = \varepsilon_r \frac{E_2}{E_1} = 3.6$$

sulla prima superficie del dielettrico si ha:

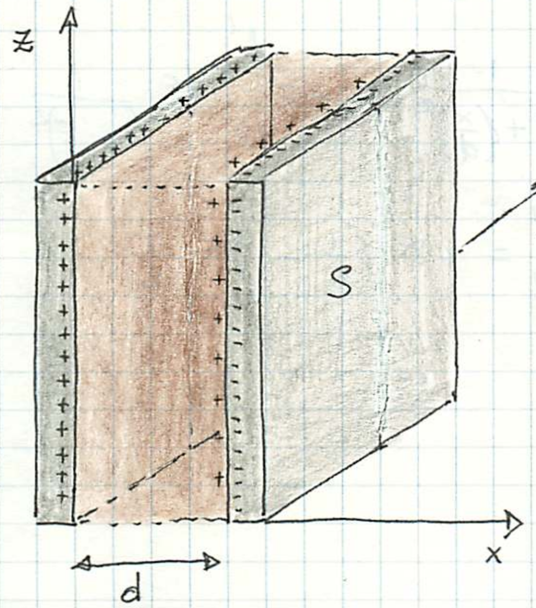
$$\sigma_p = \underline{P}_2 \cdot \hat{n}_2 = -P_{2n} = -(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 E_{2n} = -(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 \frac{E_{1n}}{\varepsilon_r}$$

$$= -(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 \frac{1}{\varepsilon_r} E_1 \cos\alpha_1 = -\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)\varepsilon_0 E \cos\alpha_1$$

sull'altra superficie $\sigma_p = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)\varepsilon_0 E \cos\alpha_1$

$\rho_p = -\underline{\nabla} \cdot \underline{P}_2 = 0$

Un condensatore piano $S = 500\ cm^2$ $d = 0.8 cm$ è carico con $Q = 10 \mu C$. Il condensatore è riempito con un dielettrico isotropo la cui permettività relativa varia dall'armatura positiva a quella negativa con legge $\varepsilon_r(x) = 1 + \frac{x}{d}$. Si determino $\underline{D}$, $\underline{E}$ e $\underline{P}$ σ_p e ρ_p.



Detto $\sigma = \frac{Q}{S}$ la densità di carica sull'armatura positiva

per simmetria si ha $D_y = D_z = 0$ e per il teorema di Gauss

$$D_x = \sigma \qquad 0 < x < d$$

$$E_x(x) = \frac{D_x}{\varepsilon_0 \varepsilon_r(x)} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \frac{1}{1 + x/d} \qquad E_y = E_z = 0$$

$$P_x(x) = \left(\varepsilon_r(x) - 1\right) \varepsilon_0 E_x(x) = \sigma \frac{x/d}{1 + x/d} \qquad P_y = P_z = 0$$

$$\sigma_p(0) = \underline{P}(0) \cdot (-\hat{x}) = -P_x(0) = 0$$

$$\sigma_p(d) = \underline{P}(d) \cdot \hat{x} = P_x(d) = \frac{\sigma}{2}$$

$$\rho_p(x) = -\underline{\nabla}\cdot\underline{P}(x) = -\frac{\partial}{\partial x} P_x(x) =$$

$$= -\sigma\,\frac{(1+x/d)/d - x/d^2}{(1+x/d)^2} = -\frac{\sigma}{d}\,\frac{1}{\left(1+\frac{x}{d}\right)^2}$$

check: $\displaystyle\int_0^d \rho_p(x)\,dx = -\sigma\int_0^d \frac{dx}{d}\,\frac{1}{\left(1+\frac{x}{d}\right)^2} = -\sigma\int_0^1 d\xi\,\frac{1}{(1+\xi)^2}$

$$= +\sigma\,\frac{1}{1+\xi}\Big|_0^1 = +\sigma\left(\frac{1}{2}-1\right) = -\frac{\sigma}{2}$$

$Q_p = 0$

campo elettrico; nella (5.47) compare κ e rispetto al caso in cui il dielettrico è il vuoto l'energia è diminuita proprio del fattore κ. La quantità

Densità di energia elettrostatica

$$u_e = \frac{U_e}{\Sigma h} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}\frac{D^2}{\varepsilon} \tag{5.48}$$

rappresenta *la densità di energia elettrostatica*.

Pure adesso la formula (5.48) è di validità generale: in una regione in cui esiste campo elettrico l'energia elettrostatica è distribuita con densità (5.48) e vale

Energia elettrostatica

$$U_e = \int_\tau u_e\, d\tau = \int_\tau \frac{1}{2}\varepsilon E^2\, d\tau \ . \tag{5.49}$$

Nei dielettrici anisotropi la (5.48) diventa

$$u_e = \frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} \tag{5.50}$$

e il prodotto scalare mette in evidenza che in questi dielettrici i campi **E** e **D** non sono paralleli.

Poiché per riempire di campo elettrico un dato volume occorre spendere per unità di volume il lavoro $1/2\ \varepsilon_0 E^2$ e in presenza di dielettrico tale lavoro risulta, a parità di campo elettrico, $1/2\ \varepsilon_0\, \kappa E^2$, la differenza $1/2\ \varepsilon_0 (\kappa - 1) E^2$ rappresenta evidentemente il lavoro necessario per polarizzare l'unità di volume del dielettrico (lavoro che nel vuoto è nullo). In effetti, per separare di dx la carica q dalla carica $-q$ occorre spendere il lavoro $dW = E\, q\, dx = E\, dp$, dove dp è il momento di dipolo elettrico creato con la separazione dx; nell'unità di volume

$$dW = E\, dP = E\varepsilon_0 (\kappa - 1)\, dE$$

e integrando si ottiene appunto $1/2\ \varepsilon_0 (\kappa - 1) E^2$.

Esempio 5.6

In un condensatore piano, le cui armature sono quadrate di lato d e distanti h, è parzialmente inserita una lastra di dielettrico di spessore h. Assumendo che la carica libera sulle armature sia costante, calcolare in funzione della posizione della lastra le densità di carica, la d.d.p., la capacità e l'energia elettrostatica.

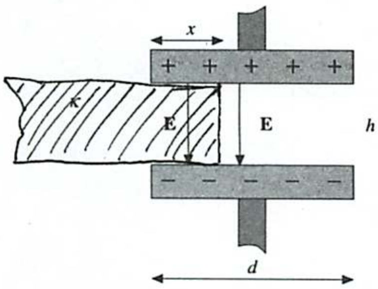


Figura 5.34

Soluzione

Le armature sono equipotenziali e quindi il campo elettrico è lo stesso sia nella regione vuota larga $d - x$ che nella regione riempita di dielettrico larga x. Dette σ_1 e σ_2 le densità di carica libera sulle armature in corrispondenza delle due zone, si ha

$$E = E_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} = E_2 = \frac{\sigma_2}{\kappa\varepsilon_0} \Rightarrow \sigma_2 = \kappa\sigma_1 \ .$$

La maggior densità di carica libera sulle armature in corrispondenza del dielettrico compensa la carica di polarizzazione

$$\sigma_p = \sigma_2 - \sigma_1 = (\kappa - 1)\,\sigma_1 = \frac{\kappa - 1}{\kappa}\sigma_2 \ .$$

Il vettore induzione dielettrica è maggiore nel dielettrico che nel vuoto:

$$D_1 = \varepsilon_0 E \quad , \quad D_2 = \varepsilon_0 E + P = \varepsilon_0 E + \varepsilon_0 (\kappa - 1) E = \varepsilon_0 \kappa E = \kappa D_1 \quad .$$

La carica totale del condensatore è

$$q = q_1 + q_2 = \sigma_1 (d - x)\, d + \sigma_2 x d$$

e quindi, essendo $\sigma_2 = \kappa \sigma_1$, si ha

$$\sigma_1 (x) = \frac{q}{d\,[d + (\kappa - 1)\, x]} \quad , \quad \sigma_2 (x) = \frac{\kappa q}{d\,[d + (\kappa - 1)\, x]} \quad ,$$

$$E(x) = \frac{\sigma_1 (x)}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_2 (x)}{\kappa \varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0 d\,[d + (\kappa - 1)\, x]} \quad ,$$

$$\sigma_p (x) = \sigma_2 (x) - \sigma_1 (x) = \frac{(\kappa - 1)\, q}{d\,[d + (\kappa - 1)\, x]} \quad .$$

La d.d.p. ai capi del condensatore è

$$V(x) = E\,h = \frac{\sigma_1 (x)}{\varepsilon_0}\, h = \frac{\sigma_2 (x)}{\kappa \varepsilon_0}\, h = \frac{q\,h}{\varepsilon_0 d\,[d + (\kappa - 1)\, x]}$$

e la capacità del condensatore vale

$$C(x) = \frac{q}{V(x)} = \frac{\varepsilon_0 d\,[d + (\kappa - 1)\, x]}{h} = \frac{\varepsilon_0 d\,(d - x)}{h} + \frac{\varepsilon_0 \kappa\, d x}{h} \quad ,$$

equivalente, come c'era da aspettarsi, alla *capacità di due condensatori in parallelo*.
L'energia elettrostatica del sistema si scrive

$$U_e (x) = \frac{q^2}{2C} = \frac{q^2 h}{2\varepsilon_0 d\,[d + (\kappa - 1)\, x]} \qquad (5.51)$$

$= \frac{1}{2} E D_1 \, x d h + \frac{1}{2} E D_2 \, d(d-x) h$

e si verifica subito che questa espressione corrisponde a

$$U_e (x) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 d\,(d - x)\, h + \frac{1}{2} \varepsilon_0 \kappa E^2 d\, x\, h \quad .$$

Esempio 5.7

Lo spazio compreso tra le armature di un condensatore sferico, di raggio interno R_1 e raggio esterno R_2, è riempito parzialmente da un dielettrico lineare e omogeneo di costante dielettrica relativa κ che occupa la corona sferica compresa tra R_1 e R_0, con $R_0 < R_2$. Calcolare l'energia elettrostatica del sistema e la densità di carica di polarizzazione.

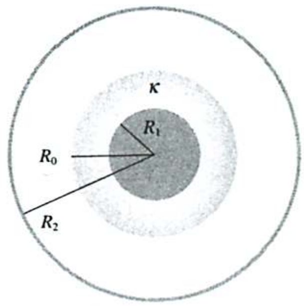


Figura 5.35

Soluzione
Per ragioni di simmetria **E**, **P**, **D** sono radiali e dipendono solo da r. L'induzione dielettrica si ricava come nell'esempio 5.1 in quanto il suo flusso dipende solo dalla carica libera sulle armature q. Vale quindi in tutta l'intercapedine la (5.29):

$$\mathbf{D} = \frac{q}{4\pi r^2}\, \mathbf{u}_r \quad .$$

Da questa e da (5.48) si calcola l'energia elettrostatica del sistema, tenendo presente che

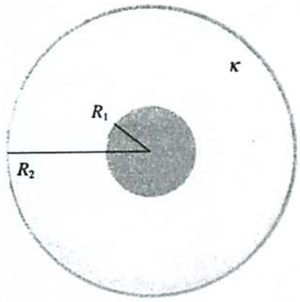


Figura 5.36

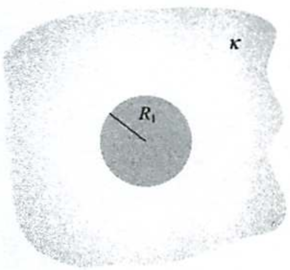


Figura 5.37

c'è una variazione di dielettrico per $r = R_0$:

$$U_e = \int_{R_1}^{R_0} \frac{D^2}{2\kappa\,\varepsilon_0} 4\pi r^2\, dr + \int_{R_1}^{R_0} \frac{D^2}{2\varepsilon_0} 4\pi r^2\, d\,r$$

$$= \frac{q^2}{8\pi\kappa\,\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_0}\right) + \frac{q^2}{8\pi\,\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{q^2}{2}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) = \frac{q^2}{2C} \quad .$$

La *capacità C* è quella della *serie di due condensatori* C_1 e C_2 sferici, il primo con dielettrico e il secondo vuoto.
La densità di carica di polarizzazione sulle due facce della corona sferica dielettrica è

$$\sigma_p\,(R_1) = \mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{u}_1 = -\,\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{u}_r = -\,\frac{\kappa - 1}{\kappa}\,\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{u}_r = -\,\frac{\kappa - 1}{\kappa}\,\frac{q}{4\,\pi R_1^2} \quad ,$$

$$\sigma_p\,(R_2) = \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{u}_2 = \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{u}_r = \frac{\kappa - 1}{\kappa}\,\mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{u}_r = \frac{\kappa - 1}{\kappa}\,\frac{q}{4\,\pi R_2^2} \quad ,$$

avendo utilizzato (5.27). È evidente che

$$q_p\,(R_1) = \sigma_p\,(R_1)\, 4\,\pi R_1^2 = -\,\frac{\kappa - 1}{\kappa}\,q = -\,q_p\,(R_2) = -\,\sigma_p\,(R_2)\, 4\,\pi R_2^2 \quad .$$

All'interno del dielettrico non ci sono cariche libere per cui $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ e di conseguenza $\rho_p = -\,\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$, essendo κ costante. La verifica diretta è immediata, come nell'esempio 5.1.
Se R_0 coincide con R_2 il condensatore è totalmente riempito dal dielettrico e l'energia vale

$$U_e = \frac{q^2}{2}\left[\frac{1}{4\pi\,\kappa\,\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\right] = \frac{q^2}{2C} \quad ,$$

con $C = 4\pi\,\kappa\,\varepsilon_0\,\dfrac{R_1\,R_2}{R_2 - R_1}$, κ volte maggiore che nel vuoto.

Infine se R_2 tende all'infinito

$$U_e = \frac{q^2}{8\pi\,\kappa\,\varepsilon_0\,R_1} = \frac{q^2}{2C} \quad , \quad C = 4\pi\,\kappa\,\varepsilon_0\,R_1 \quad .$$

Abbiamo così l'energia elettrostatica e la capacità di una sfera conduttrice immersa in un dielettrico indefinito (esempio 5.1).

Esempio 5.8

Calcolare la forza con cui la lastra di dielettrico dell'esempio 5.6 è attirata dentro il condensatore. Esaminare anche il caso in cui la d.d.p. ai capi del condensatore resti costante.

Soluzione
L'energia elettrostatica è data da (5.51); lo spostamento della lastra comporta una variazione di energia e alla fine, quando il condensatore è completamente riempito dalla lastra, l'energia è minima. Essendo il sistema a carica costante, cioè isolato, la diminuzione di energia corrisponde al lavoro fornito dalla forza elettrica che vale

$$F\,(x) = -\,\frac{dU_e}{dx} = \frac{q^2\,h}{2\varepsilon_0\,d}\,\frac{\kappa - 1}{[d + (\kappa - 1)\,x]^2}$$

ovvero, ricorrendo all'espressione del campo elettrico calcolata nell'esempio 5.6,

$$F(x) = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0\,(\kappa - 1)\,E^2(x)\Sigma \quad ; \qquad (5.52)$$

$\Sigma = hd$ è la sezione della lastra, cioè la superficie su cui agisce la forza **F**. Si noti che questa dipende da x.

Il processo considerato avviene a *carica costante*. Se invece si mantiene *costante la d.d.p.* tra le armature, tramite il collegamento con un generatore, il campo elettrico è sempre costante, indipendentemente dalla posizione della lastra, e vale $E = V/h$. L'energia elettrostatica si scrive più convenientemente nella forma

$$U_e = \frac{1}{2}\,C(x)\,V^2 = \frac{V^2}{2}\,\varepsilon_0\,\frac{d}{h}\,[d + (\kappa - 1)\,x] \quad ,$$

dove abbiamo utilizzato l'espressione della capacità ricavata nell' esempio 5.6. L'energia aumenta, per un avanzamento dx, della quantità

$$dU_e = \frac{V^2}{2}\,dC\,(x) = \frac{V^2\,\varepsilon_0 d}{2h}\,(\kappa - 1)\,dx \quad .$$

Seguiamo in questo caso lo stesso ragionamento sviluppato nel paragrafo 4.9. Per mantenere costante la d.d.p. V in presenza di un aumento di capacità $dC(x)$ il generatore deve spostare la carica $dq = V\,dC$ dall'armatura negativa a quella positiva compiendo il lavoro $dW_{gen} = V\,dq = V^2\,dC$ a spese della propria energia U_{gen} che varia di $dU_{gen} = -dW_{gen} = -V^2\,dC$. Osserviamo che ritroviamo la metà di questo lavoro nell'aumento di energia elettrostatica dU_e e quindi la restante metà è spesa come lavoro per fare avanzare la lastra,

$$dW = \frac{V^2}{2}\,dC = dU_e \quad ;$$

la forza corrispondente, indipendente da x, risulta

$$F = \frac{dU_e}{dx} = \frac{V^2\,\varepsilon_0\,d\,(\kappa - 1)}{2h} \quad .$$

Poiché

$$dU_{tot} = d\,(U_{gen} + U_e) = -V^2\,dC + \frac{V^2}{2}\,dC = -\frac{V^2}{2}\,dC = -dU_e$$

la forza appena calcolata è $-dU_{tot}/dx$.
Sostituendo Eh al posto di V

$$F = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0\,(\kappa - 1)\,E^2\,hd = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0\,(\kappa - 1)\,E^2\Sigma \quad ,$$

formalmente eguale a (5.52).
Riassumendo: nel processo a *carica costante* in cui $dU_{tot} = dU_e$

$$F = -\left(\frac{dU_e}{dx}\right)_{q\,=\,\text{cost}} \quad ,$$

mentre nel processo a potenziale costante in cui $dU_{tot} = -dU_e$

$$F = \left(\frac{dU_e}{dx}\right)_{V\,=\,\text{cost}} \quad ,$$

Abbiamo ritrovato in questo caso, che è fisicamente diverso, le relazioni (4.38, 4.39). In effetti esse rivestono carattere generale: *la forza agente si può sempre calcolare come l'opposto del gradiente dell'energia elettrostatica se il processo è a carica costante e come gradiente della stessa energia se il processo è a potenziale costante.*

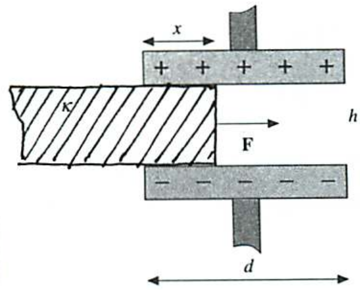


Figura 5.38

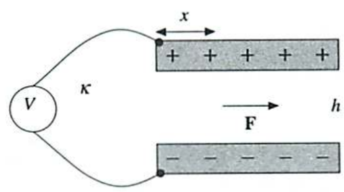
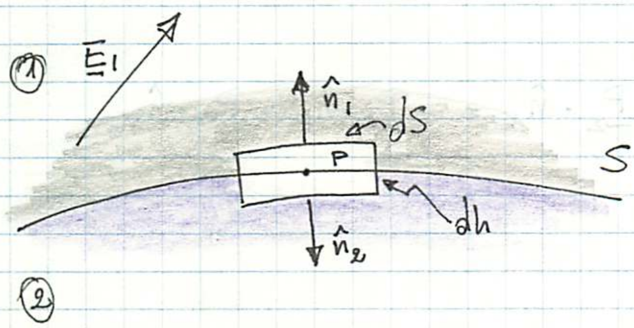


Figura 5.39

Due dielettrici di costanti dielettriche relative ε_{r1} ed ε_{r2} sono in contatto attraverso una superficie S. Trovare la densità di cariche di polarizzazione σ_p su tale superficie in presenza di un campo elettrico $\underline{E}_1$ nel primo dielettrico.



Si consideri il cilindro infinitesimo in figura intorno ad ogni punto P di S. Detto σ_p la densità di cariche di polarizzazione in P si ha:

$$\oint(\underline{E}) = \underline{E}_1 \cdot \hat{n}_1 \, dS + \underline{E}_2 \cdot \hat{n}_2 \, dS + O(dS\,dh) = \sigma_p \, dS \, \frac{1}{\varepsilon_0}$$

cioè

$$\sigma_p = \varepsilon_0 \left(\underline{E}_1 \cdot \hat{n}_1 + \underline{E}_2 \cdot \hat{n}_2 \right)$$

$$\oint(\underline{D}) = \varepsilon_{r1} \underline{E}_1 \cdot \hat{n}_1 + \varepsilon_{r2} \underline{E}_2 \cdot \hat{n}_2 + O(dS\,dh) = 0$$

cioè $\underline{E}_2 \cdot \hat{n}_2 = - \dfrac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} \underline{E}_1 \cdot \hat{n}_1$

poiché non ci sono cariche libere sulla superficie S

$$\sigma_p = \varepsilon_0\, \underline{E}_1 \cdot \hat{n}_1 \left(1 - \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} \right)$$

$$= \varepsilon_0\, \underline{E}_2 \cdot \hat{n}_2 \left(1 - \frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}} \right)$$

alternativamente $\quad \sigma_p = \underline{P}_1 \cdot \hat{n}_2 + \underline{P}_2 \cdot \hat{n}_1 = - \underline{P}_1 \cdot \hat{n}_1 - \underline{P}_2 \cdot \hat{n}_2$

$$\underline{P}_1 = \chi_1 \varepsilon_0\, \underline{E}_1 = (\varepsilon_{r1} - 1)\, \varepsilon_0\, \underline{E}_1$$

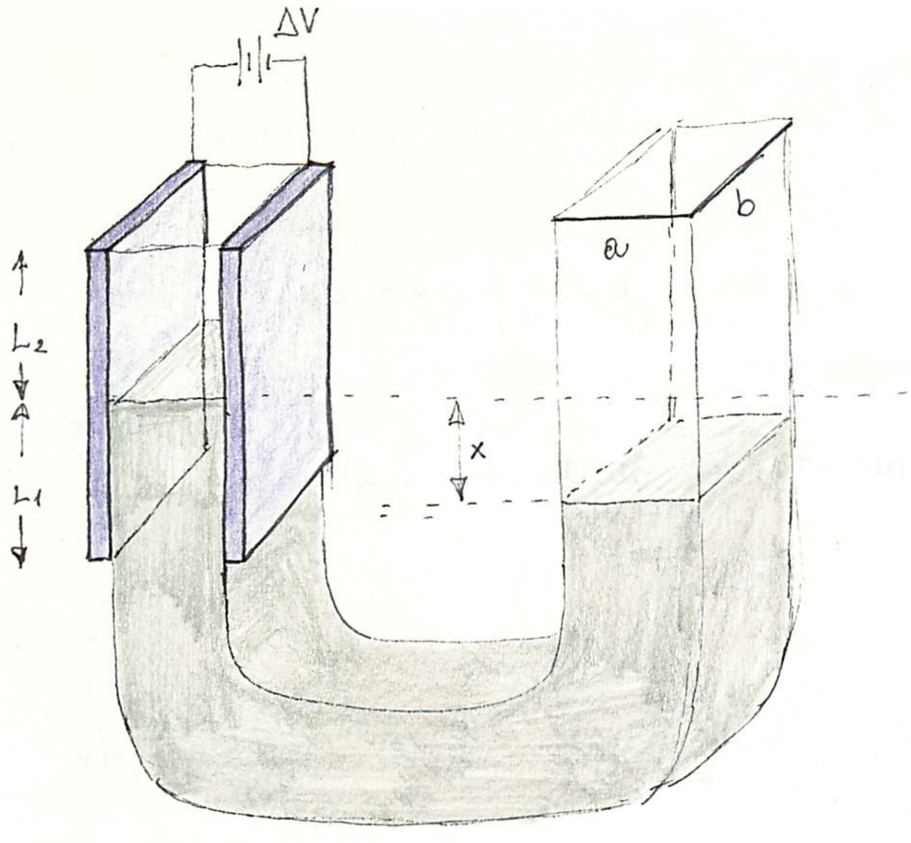
$$\underline{P}_2 = \chi_2\, \varepsilon_0\, \underline{E}_2 = (\varepsilon_{r2} - 1)\, \varepsilon_0\, \underline{E}_2$$

$$\underline{E}_2 \cdot \hat{n}_2 = - \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}}\, \underline{E}_1 \cdot \hat{n}_1$$

$$\sigma_p = - (\varepsilon_{r1} - 1)\, \varepsilon_0\, \underline{E}_1 \cdot \hat{n}_1 - (\varepsilon_{r2} - 1)\, \varepsilon_0\, \underline{E}_2 \cdot \hat{n}_2 =$$

$$= \varepsilon_0\, \underline{E}_1 \cdot \hat{n}_1 \left[- \varepsilon_{r1} + 1 + (\varepsilon_{r2} - 1) \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} \right] =$$

$$= \varepsilon_0\, \underline{E}_1 \cdot \hat{n}_1 \left(1 - \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} \right)$$



$S = a \cdot b$

$x =$ dislivello

$\Delta V =$ costante

se il dislivello x aumenta di una quantità $dx > 0$

- si ha una variazione di energia elettrostatica (diminuzione)

$$dU_{el} = \frac{1}{2} dC \, \Delta V^2 - \Delta V \, dQ = -\frac{1}{2} dC \, \Delta V^2$$

$$C = C(x) = C_1 + C_2 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r L_1 b}{a} + \frac{\varepsilon_0 L_2 b}{a}$$

$$dC = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{b}{a} \frac{dx}{2} + \varepsilon_0 \frac{b}{a}\left(-\frac{dx}{2}\right) = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \frac{b}{a} \frac{dx}{2}$$

$$Q = (C_1 + C_2) \Delta V \qquad dQ = dC \, \Delta V$$

$$\boxed{dU_{el} = -\varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \frac{S E_0^2}{4} dx}$$

$$E_0 \equiv \frac{\Delta V}{a}$$

• e una variazione di energia potenziale gravitazionale (aumento)

$$\boxed{dU_g = m\,g\,dx - m_a\,g\,dx = (\rho - \rho_a)\,S x g\,dx}$$

essendo ρ e ρ_a le densità del dielettrico e dell'aria.

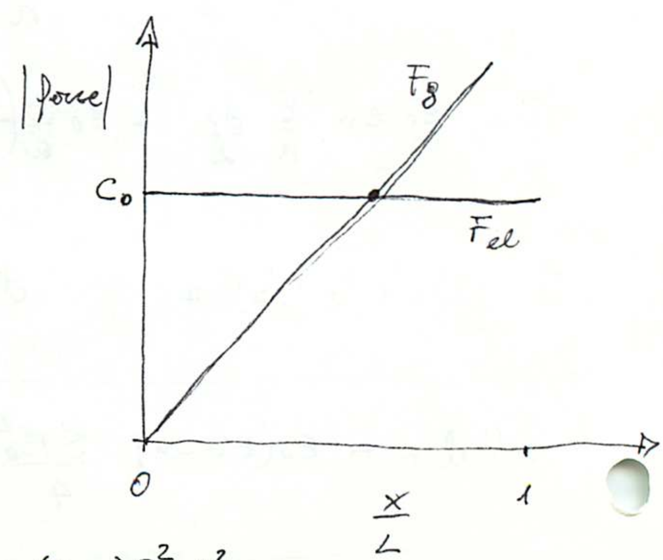
$$dU_{tot} = dU_{el} + dU_g = \left[(\rho-\rho_a)\,S g x - \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\,\frac{S E_0^2}{4}\right] dx$$

$$F = -\frac{dU_{tot}}{dx} = -(\rho - \rho_a)\,S g x + \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\,\frac{S E_0^2}{4}$$

all'equilibrio $F = 0$

$$\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\,\frac{E_0^2}{4} = (\rho - \rho_a)\,g\,x$$

$$\boxed{X = \varepsilon_r - 1 = \frac{4(\rho - \rho_a)\,g\,x}{\varepsilon_0 E_0^2}}$$



$$C_0 = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\frac{S}{4}\,\frac{\Delta V^2}{a^2} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\frac{S}{4}\,\frac{Q^2}{a^2}\Big/ C(0)^2 = \frac{(\varepsilon_r - 1)\,Q^2\,a^2}{4\varepsilon_0 S a^2}$$

Q costante sul condensatore (sorgente disconnessa)

$$dU_{el} = d\left(\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}\right) = -\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C^2}\,dC =$$

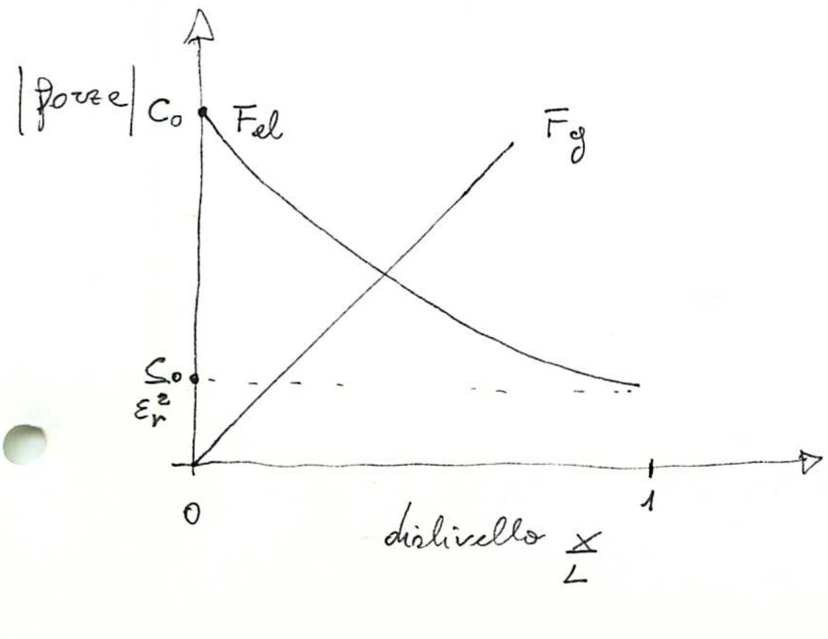
$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{Q^2\ \varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\,\frac{b}{a}\,\frac{dx}{2}}{\left(\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r b L_1(x)}{a}+\frac{\varepsilon_0 L_2(x)\, b}{a}\right)^2} =$$

$$= -\frac{a^2 Q^2(\varepsilon_r-1)}{4\varepsilon_0 S\left[\varepsilon_r L_1(x)+L_2(x)\right]^2}\,dx$$

$$dU_g = (\rho-\rho_a)\,S g x\,dx$$

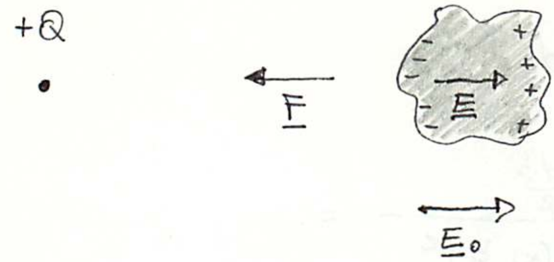
$$\underline{F} = -\underline{\nabla} U \rightarrow \quad F = -\frac{dU}{dx} = \frac{a^2Q^2(\varepsilon_r-1)}{4\varepsilon_0 S\left[\varepsilon_r L_1(x)+L_2(x)\right]^2} - S g x$$

se $L_1(x) = x \Rightarrow L_2(x) = L - x$



$$C_0 \equiv \frac{a^2Q^2(\varepsilon_r-1)}{4\varepsilon_0 S L^2}$$

dielettrico di volume V (piccolo)



energia potenziale elettrostatica $= \int \frac{1}{2} E D \, dV = \int \frac{1}{2} \varepsilon E^2 dV$

$$\mathcal{U} = \int \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 dV - \int_V \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 dV + \int_V \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r E^2 dV = \qquad \left(E = \frac{E_0}{\varepsilon_r} \right)$$

$$= \text{costante} - \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r} \right) \int_V \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 dV =$$

$$= \text{costante} - \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \int_V \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2 dV \simeq$$

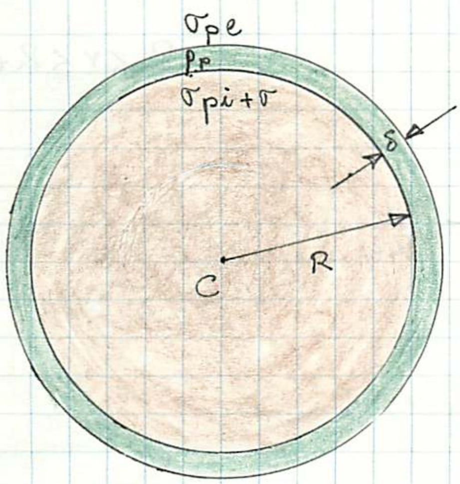
$$\simeq \text{costante} - \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \frac{1}{2} \varepsilon_0 V \langle E_0^2 \rangle$$

$$\langle E_0^2 \rangle \equiv \frac{1}{V} \int_V E_0^2 dV$$

$$\underline{F} = -\underline{\nabla} \mathcal{U} \simeq \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \frac{\varepsilon_0 V}{2} \underline{\nabla} \langle E_0^2 \rangle$$

$\underline{F}$ è diretto nel verso in cui $\langle E_0^2 \rangle$ aumenta

Una sfera metallica di raggio $R = 5$ cm è ricoperta da uno strato $\delta = 2$ cm di isolante e si trova a potenziale $V_S = 400$ V rispetto all'infinito. Calcolare la densità di carica di polarizzazione σ_{pi} e σ_{pe} sulle superfici interna ed esterna dell'isolante, e quella ρ_P nel volume $R < r < R + \delta$ ed infine il potenziale elettrostatico $V(r)$ a distanza r dal centro della sfera nei casi:
a) l'isolante ha costante dielettrica $\varepsilon_r = 6$ b) l'isolante è non omogeneo e $\varepsilon_r = 6r/R$



Sia σ la densità di carica libera alla superficie della sfera e

$$Q = 4\pi R^2 \sigma$$

la carica libera totale.

Usando il teorema di Gauss e la simmetria sferica del problema:

$$\oint(\underline{D}) = 4\pi r^2 D = Q \qquad \text{per } r > R$$

$$D(r) = \begin{cases} 0 & 0 < r < R \\ \dfrac{Q}{4\pi \; r^2} & R < r \end{cases}$$

a)

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{D(r)}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} & R < r < R+\delta \\ \dfrac{D(r)}{\varepsilon_0} & R+\delta < r \end{cases}$$

$$E(r) = \begin{cases} 0 & r < R \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2} & R < r < R+\delta \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \, r^2} & R+\delta < r \end{cases} \qquad V(r) - V(0) = -\int_0^r E(r')\,dr'$$

$$V(r) = \begin{cases} V_s & r < R \\ V_s + \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{R}\right) & R < r < R+\delta \\ V_s + \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\dfrac{1}{R+\delta} - \dfrac{1}{R}\right) + \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{R+\delta}\right) & R+\delta < r \end{cases}$$

poichè $\lim_{r\to\infty} V(r) = 0$ si ha

$$0 = V_s - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{1}{R} + (\varepsilon_r - 1)\frac{1}{R+\delta}\right)$$

$$Q = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r V_s}{\dfrac{1}{R} + \dfrac{\varepsilon_r - 1}{R+\delta}} \qquad \sigma = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r V_s}{R + (\varepsilon_r - 1)\dfrac{R^2}{R+\delta}}$$

Sulla supeficie interna dell'isolante si ha:

$$E(R^+) = \frac{D(R^+)}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

ma per il teorema di Coulomb si ha anche:

$$E(R^+) = \frac{\sigma + \sigma_{pi}}{\varepsilon_0}$$

quindi $\frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{\sigma + \sigma_{pi}}{\varepsilon_0}$ cioè

$$\sigma_{pi} = \sigma\left(\frac{1}{\varepsilon_r} - 1\right) = -\frac{\varepsilon_0 V_s}{\frac{R}{\varepsilon_r - 1} + \frac{R^2}{R+\delta}} = -7.7\ 10^{-8}\ C\,m^{-2} \quad *$$

$$\rho_p = -\underline{\nabla}\cdot\underline{P} = -\underline{\nabla}\cdot\ (\varepsilon_r - 1)\,\varepsilon_0\,\underline{E} = -\underline{\nabla}\cdot\ (\varepsilon_r - 1)\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\,\underline{D}$$

$$= -\frac{(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r}\ \underline{\nabla}\cdot\underline{D} = -\frac{(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r}\ \rho = 0$$

poiché la densità delle cariche libere è nulla per $R < r < R+\delta$

Infine essendo la carica totale di polarizzazione nulla, si ha:

$$\sigma_{pi}\ 4\pi R^2 + \sigma_{pe}\ 4\pi (R+\delta)^2 = 0$$

$$\sigma_{pe} = -\sigma_{pi}\frac{1}{\left(1 + \frac{\delta}{R}\right)^2} = -3.9\ 10^{-8}\ C\,m^{-2} \quad **$$

b)

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{D(r)}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r0}\,\frac{r}{R}} & R < r < R+\delta \\[2ex] \dfrac{D(r)}{\varepsilon_0} & R+\delta < r \end{cases}$$

poiché $\varepsilon_r(r) = \varepsilon_{r0}\,\frac{r}{R}$ $\qquad \varepsilon_{r0} = 6$

$$E(r) = \begin{cases} 0 & r<R \\ \dfrac{Q\,R}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r0}\, r^3} & R<r<R+\delta \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & R+\delta<r \end{cases}$$

$$V(r) = \begin{cases} V_s & r<R \\ V_s + \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r0}} \dfrac{R}{2}\left(\dfrac{1}{r^2} - \dfrac{1}{R^2}\right) & R<r<R+\delta \\ V_s + \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r0}} \dfrac{R}{2}\left(\dfrac{1}{(R+\delta)^2} - \dfrac{1}{R^2}\right) + \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{R+\delta}\right) & r>R+\delta \end{cases}$$

$$\lim_{r\to\infty} V(r) = 0 \qquad 0 = V_s - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r0}}\left(\frac{1}{2R} + \frac{\varepsilon_{r0}}{R+\delta} - \frac{R}{2(R+\delta)^2}\right)$$

$$\sigma = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_{r0} V_s}{\dfrac{R}{2} + \varepsilon_{r0}\dfrac{R^2}{R+\delta} - \dfrac{R^3}{2(R+\delta)^2}}$$

$$\sigma_{pi} = \sigma\left(\frac{1}{\varepsilon_r(R)} - 1\right) = \sigma\left(\frac{1}{\varepsilon_{r0}} - 1\right) = -\frac{\varepsilon_0 V_s}{\dfrac{R}{2(\varepsilon_{r0}-1)} + \dfrac{\varepsilon_{r0}}{\varepsilon_{r0}-1}\dfrac{R^2}{R+\delta} - \dfrac{R^3}{2(\varepsilon_{r0}-1)(R+\delta)^2}}$$

$$= -7.8\ 10^{-8}\ C\,m^{-2}$$

$$\rho_p = -\underline{\nabla}\cdot\underline{P} = -\underline{\nabla}\cdot(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 \underline{E} = -\underline{\nabla}\cdot\left(\varepsilon_r - 1\right)\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_r\varepsilon_0}\underline{D} =$$

$$= -\underline{\nabla}\cdot\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)\underline{D} = -\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)\underline{\nabla}\cdot\underline{D} - \underline{\nabla}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)\cdot\underline{D}$$

$$= +\underline{\nabla}\,\frac{1}{\varepsilon_{r0}\frac{r}{R}}\cdot\underline{D} = \frac{1}{\varepsilon_{r0}}R\,\frac{d}{dr}\,\frac{1}{r}\quad D(r) =$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon_{r0}}R\,\frac{1}{r^2}\quad\sigma\,\frac{R^2}{r^2} =$$

$$= -\frac{\sigma R^3}{\varepsilon_{r0}\, r^4}$$

essendo la carica totale di polarizzazione nulla, si ha:

$$0 = \sigma_{pi}\,4\pi R^2 + \sigma_{pe}\,4\pi(R+\delta)^2 + \int_R^{R+\delta}\rho_p(r)\,4\pi r^2 dr$$

$$= \sigma_{pi}\,4\pi R^2 + \sigma_{pe}\,4\pi(R+\delta)^2 - \frac{\sigma}{\varepsilon_{r0}}\,4\pi R^3\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+\delta}\right)$$

$$\sigma_{pe} = -\frac{\sigma_{pi}}{\left(1+\frac{\delta}{R}\right)^2} + \frac{\sigma\left(1 - \frac{R}{R+\delta}\right)}{\varepsilon_{r0}\left(1+\frac{\delta}{R}\right)^2} =$$

$$= -\frac{\sigma_{pi}}{\left(1+\frac{\delta}{R}\right)^2} + \frac{\sigma}{\varepsilon_{r0}}\,\frac{\frac{\delta}{R}}{\left(1+\frac{\delta}{R}\right)^3} = 4.2\ 10^{-8}\ C\ m^{-2} \qquad ***$$

* si può anche calcolare σ_{pi} come: $\sigma_{pi} = \underline{P}(R^+) \cdot \hat{n} =$

$$= -(\varepsilon_r - 1)\, \varepsilon_0\, E(R^+) = -(\varepsilon_r - 1)\, \varepsilon_0 \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \sigma\left(\frac{1}{\varepsilon_r} - 1\right)$$

** $\sigma_{pe} = \underline{P}(R+\delta^-) \cdot \hat{n} = (\varepsilon_r - 1)\, \varepsilon_0\, E(R+\delta^-) =$

$$= (\varepsilon_r - 1)\, \varepsilon_0 \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \frac{R^2}{(R+\delta)^2} = -\sigma\left(\frac{1}{\varepsilon_r} - 1\right) \frac{1}{\left(1 + \frac{\delta}{R}\right)^2}$$

*** $\sigma_{pe} = \underline{P}(R+\delta^-) \cdot \hat{n} = (\varepsilon_r - 1)\, \varepsilon_0\, E(R+\delta^-) =$

$$= \left(\varepsilon_{r0} \frac{R+\delta}{R} - 1\right) \varepsilon_0 \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r0}} \frac{R^3}{(R+\delta)^3} =$$

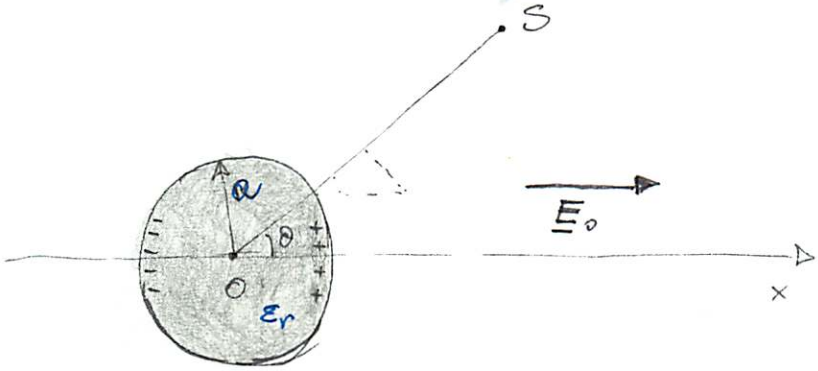
$$= -\sigma\left(\frac{1}{\varepsilon_{r0}} - \frac{R+\delta}{R}\right) \frac{R^3}{(R+\delta)^3} =$$

$$= -\sigma\left(\frac{1}{\varepsilon_{r0}} - \frac{R+\delta}{R}\frac{1}{\varepsilon_{r0}} + \frac{R+\delta}{R}\frac{1}{\varepsilon_{r0}} - \frac{R+\delta}{R}\right) \frac{R^3}{(R+\delta)^3} =$$

$$= -\sigma\left(\frac{1}{\varepsilon_{r0}} - 1\right) \frac{R^2}{(R+\delta)^2} + \frac{\sigma}{\varepsilon_{r0}} \frac{\frac{R+\delta}{R} - 1}{\left(\frac{R+\delta}{R}\right)^3} =$$

$$= -\sigma_{pi} \frac{1}{\left(1 + \frac{\delta}{R}\right)^2} + \frac{\sigma}{\varepsilon_{r0}} \frac{\delta/R}{(1 + \delta/R)^3}$$

Sfera dielettrica omogenea ed isotropa in campo elettrico uniforme $\underline{E}_0$



per simmetria la carica di polarizzazione deve creare un momento di dipolo elettrico $\underline{p} = \frac{4}{3}\pi a^3 \underline{P}$ parallelo ad $\underline{E}_0$

Il potenziale fuori della sfera è allora: (a causa della simmetria tutti i momenti di multipolo ad, eccezione di quello di dipolo, sono nulli)

$$V(S) = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} - E_0 r\cos\theta = \frac{\underline{p}\cdot\underline{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} - \underline{E}_0\cdot\underline{r}$$

indicando con t ed n le direzioni tangente ed ortogonale alla superficie della sfera:

$$E_t(a) = -\left.\frac{\partial V}{\partial (r\theta)}\right|_{r=a} = -\frac{1}{a}\left.\frac{\partial V}{\partial\theta}\right|_{r=a} = \left(\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 a^3} - E_0\right)\sin\theta$$

$$E_n(a) = -\left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r=a} = \left(\frac{2p}{4\pi\varepsilon_0 a^3} + E_0\right)\cos\theta$$

indicando con $E_n'(a)$ ed $E_t'(a)$ le analoghe componenti dentro la sfera si ha:

$$\begin{cases} E_t'(R) = E_t(R) \\ D_n'(R) = D_n(R) \end{cases} \qquad \varepsilon_0 \varepsilon_r E_n'(R) = \varepsilon_0 E_n(R)$$

$$E_t'(R) = \left(\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 R^3} - E_0\right) \sin\theta$$

$$E_n'(R) = \left(\frac{2p}{4\pi\varepsilon_0 R^3} + E_0\right) \frac{1}{\varepsilon_r} \cos\theta$$

poichè $\underline{E}'$ dentro la sfera è parallelo ad $\underline{E}_0$

$E_n'(R) = E'(R) \cos\theta$

$E_t'(R) = -E'(R) \sin\theta$

si deve quindi imporre

$$\left(\frac{2p}{4\pi\varepsilon_0 R^3} + E_0\right) \frac{1}{\varepsilon_r} = E'(R) = -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 R^3} + E_0$$

da cui

$$p = 4\pi\varepsilon_0 R^3 E_0 \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} \qquad P = \frac{p}{\frac{4}{3}\pi R^3} = 3\varepsilon_0 E_0 \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}$$

$$E'(R) = \frac{3E_0}{\varepsilon_r + 2}$$

la densità di carica di polarizzazione superficiale è:

$$\sigma = P_n = P\cos\theta = 3\varepsilon_0 E_0 \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} \cos\theta$$

All'interno della sfera il campo elettrico è costante e vale

$$\underline{E}' = \frac{3}{\varepsilon_r + 2} \underline{E}_0 \qquad \left(\underline{E}' = \underline{E}_0 \text{ per } \varepsilon_r = 1\right)$$

Both inside and outside the sphere, there are no charges.
As a consequence we have to solve the Laplace equation with the proper boundary ~~eq~~ conditions at $r=a$.
Due to the axial symmetry of the problem, we can take the solution to be of the form:

$$V(r,\theta) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta) & r<a \\ \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} \left[B_l r^l + \frac{C_l}{r^{l+1}}\right] P_l(\cos\theta) & r>a \end{cases}$$

where $P_l(\cos\theta)$ are the Legendre polynomials: $P_0(x)=1$, $P_1(x)=x$, $P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$, $P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$, ...
From the boundary condition at infinity $\left(\lim_{r\to\infty} V(r,\theta) = -E_0 z = -E_0 r\cos\theta\right)$ we finds:

$$B_0 = B_2 = B_3 = \dots = 0 \qquad B_1 = -E_0$$

The boundary conditions at $r=a$ give:

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{a}\dfrac{\partial V}{\partial \theta}(a^-,\theta) = -\dfrac{1}{a}\dfrac{\partial V}{\partial \theta}(a^+,\theta) & \Rightarrow \begin{cases} A_1 = -E_0 + \dfrac{C_1}{a^3} \\ A_l = \dfrac{C_l}{a^{2l+1}} & l\neq 1 \end{cases} \\ -\varepsilon_r \dfrac{\partial V}{\partial r}(a^-,\theta) = -\dfrac{\partial V}{\partial r}(a^+,\theta) & \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_r A_1 = -E_0 - 2\dfrac{C_1}{a^3} \\ \varepsilon_r l A_l = -(l+1)\dfrac{C_l}{a^{2l+1}} & l\neq 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$A_l = C_l = 0 \quad l\neq 1 \qquad A_1 = -\left(\frac{3}{2+\varepsilon_r}\right) E_0 \qquad C_1 = \left(\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}\right) a^3 E_0$$

$$V(r,\theta) = \begin{cases} -\dfrac{3}{2+\varepsilon_r} E_0 r\cos\theta & r<a \\ -E_0 r\cos\theta + \dfrac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}\dfrac{E_0 a^3}{r}\cos\theta & r>a \end{cases}$$

by defining the dipole moment $p = 4\pi\varepsilon_0 a^3 E_0 \dfrac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}$

and the polarization $P = \dfrac{p}{\frac{4}{3}\pi a^3}$ we have

$$V(r,\vartheta) = \begin{cases} -\dfrac{P}{(\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0}\, r \cos\vartheta & r < a \\[2ex] -E_0 r\cos\vartheta + \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{r^3} & r > a \end{cases}$$

$$P = (\varepsilon_r - 1)\,\varepsilon_0\, E$$

N.B.: by changing $\varepsilon_r \to \dfrac{1}{\varepsilon_r}$ we get the solution for a spherical cavity of radius a in dielectric medium with dielectric constant ε_r and applied electric field E_0