CORRENTI ELETTRICHE STAZIONARIE

Correnti Elettriche Stazionarie

$$I = \frac{dQ}{dt} = \int_S \underline{J} \cdot d\underline{S} \qquad \underline{J} = n q \underline{v}$$

$$\underline{v} \propto \underline{E} \quad \Rightarrow \quad \underline{J} = \sigma \underline{E} \qquad \underline{E} = \rho \underline{J} \qquad \rho = \sigma^{-1} \ (\text{Ohm})$$

$$R = \rho \frac{l}{S} = \frac{l}{\sigma S}$$ resistività / conducibilità elettrica

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}\int_V \rho \, dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \int_S \underline{J} \cdot d\underline{S} = \int_V \underline{\nabla} \cdot \underline{J} \, dV$$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{J} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$ equazione di continuità della corrente (conservazione carica elettrica)

Effetto Joule $W = I \cdot \Delta V = I^2 R = \frac{\Delta V^2}{R}$ = potenza dissipata

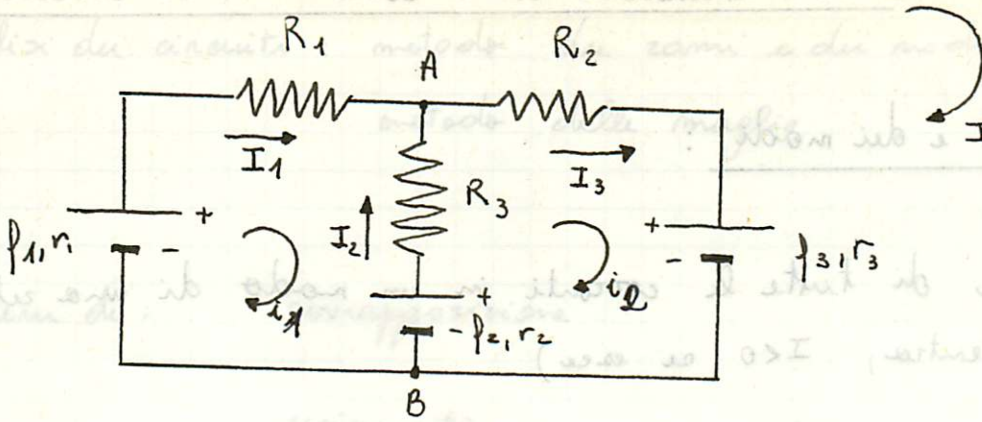
potenza dissipata per unità di volume $w = \frac{dW}{dV} = \underline{E} \cdot \underline{J}$

Resistori in serie $R = R_1 + R_2$

Resistori in parallelo $R^{-1} = R_1^{-1} + R_2^{-1}$

Legge delle correnti di Kirchhoff (conservazione carica)

Legge delle tensioni di Kirchhoff (conservazione energia) esempio:



1°) metodo:

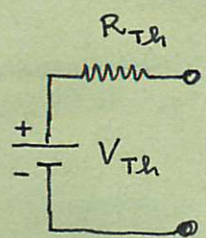
$$\begin{cases} I_1 + I_2 - I_3 = 0 \\ -f_3 + f_2 = I_3(R_2 + r_3) + I_2(R_3 + r_2) \\ -f_2 + f_1 = I_1(R_1 + r_1) - I_2(R_3 + r_2) \end{cases}$$

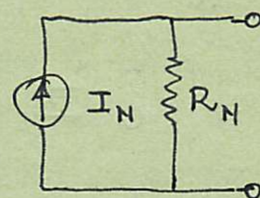
2°) metodo:

$$\begin{cases} f_2 - f_3 = i_2(R_2 + r_3 + r_2 + R_3) - i_1(R_3 + r_2) \\ f_1 - f_2 = i_1(R_1 + R_3 + r_2 + r_1) - i_2(R_3 + r_2) \end{cases}$$

Thevenin's theorem

Any linear network may, with respect to a pair of terminals, be replaced by a voltage generator V_{Th} (equal to the open-circuit voltage) in series with the resistence R_{Th} seen between these terminals.
To find R_{Th} all independent voltage sources are short circuited and all independent current sources are open-circuited.

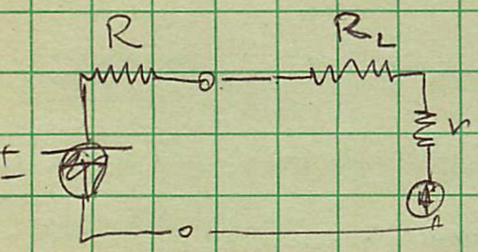




Norton's theorem

Any linear network may, with respect to a pair of terminals, be replaced by a current generator I_N (equal to the short-circuit current) in parallel ~~to~~ with a resistence R_N seen between these terminals.
~~Note that $R_N = R_{Th}$~~ To find R_N all independent voltage sources are short-circuited and all independent current sources are open-circuited.

Note that $R_N = R_{Th} \equiv R$ and $V_{Th} = R\, I_N$
(open circuit voltage — short circuit current theorem)



$$I = \frac{V}{R+R_L+r} = \frac{V}{(R+r)+R_L}$$

$$(R+r+R_i)\, I_i = V$$

$$\underline{R}\, I_i + \underline{r}\, I_i - \underline{V} = R_i I_i \qquad i=1,2,3$$

questo blocco e interamente realizzato con carta riciclata.

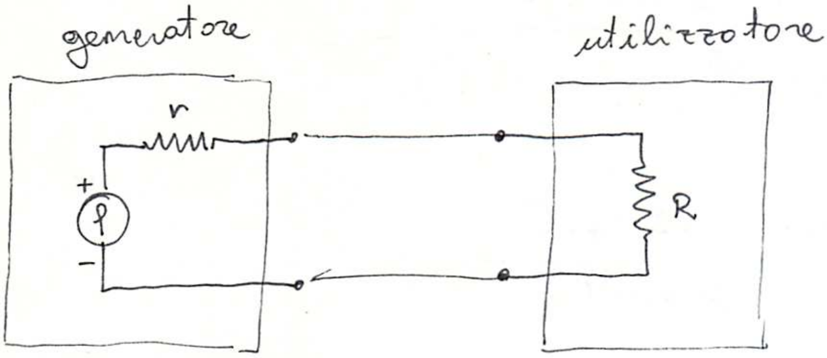
RECUPERARE LA CARTA? SI GRAZIE!

IGIENE AMBIENTALE
GESENU

COMUNI DI: PERUGIA,
CORCIANO, DERUTA, TORGIANO
COMUNITA' MONTANA
"MONTI DEL TRASIMENO"
collaborazione
PROVVEDITORATO AGLI STUDI DI PERUGIA
LEGA AMBIENTE

CASSA
DI RISPARMIO
DI PERUGIA

Teorema del massimo trasferimento di potenza (c.c.)



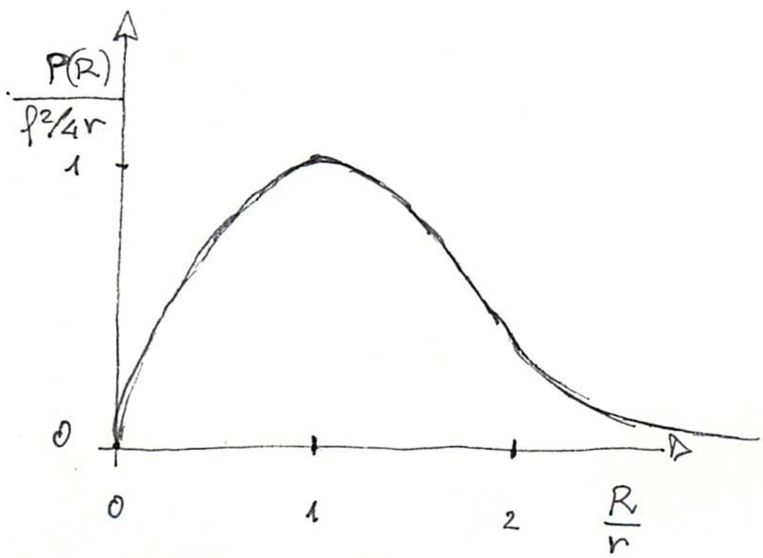
potenza utilizzata (trasferita) $= P = I^2 R$

$$f = I(R+r) \qquad I = \frac{f}{R+r}$$

$$P = f^2 \frac{R}{(R+r)^2}$$

$$\frac{dP}{dR} = f^2 \frac{(R+r)^2 - R\,2(R+r)}{(R+r)^4} = f^2 \frac{r-R}{(R+r)^3}$$

$$\frac{dP}{dR} = 0 \Rightarrow \boxed{R = r}$$



Per avere massima potenza trasferita si deve avere adattamento di impedenze (resistenze in c.c.)

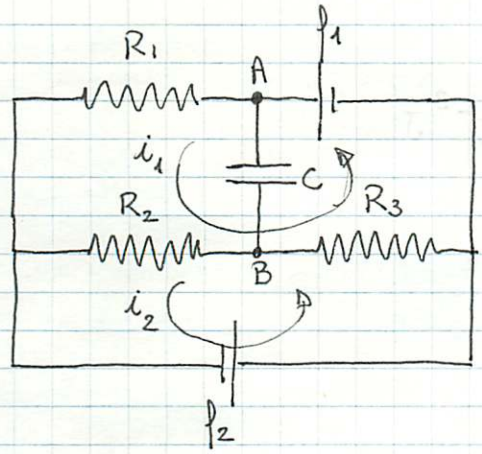
$$\frac{d^2P}{dR^2} = f^2 \frac{-(R+r)^3 - (r-R)3(R+r)^2}{(R+r)^6} =$$

$$= f^2 \frac{-R-r-3r+3R}{(R+r)^4} =$$

$$= f^2 \frac{2R-4r}{(R+r)^4} \qquad \left.\frac{d^2P}{dR^2}\right|_{R=r} < 0 \quad (\text{massimo})$$

$$= 2f^2 \frac{R-2r}{(R+r)^4}$$

Nel circuito in figura si ha $f_1 = 30\,V$ $f_2 = 40\,V$ $R_1 = 20\,\Omega$ $R_2 = 10\,\Omega$ $R_3 = 15\,\Omega$ e ~~...~~ $C = 5\mu F$. Quanto vale in condizioni di regime l'energia immagazzinata nel condensatore?



Dette i_1 ed i_2 le due correnti di maglia orientate in senso antiorario si ha:

$$\begin{cases} f_1 = (R_1 + R_2 + R_3)\, i_1 - (R_2 + R_3)\, i_2 \\ f_2 = -(R_2 + R_3)\, i_1 + (R_2 + R_3)\, i_2 \end{cases}$$

la cui soluzione è:

$$i_1 = \frac{f_1 + f_2}{R_1} = 3.5\,A$$

$$i_2 = \frac{f_2}{R_2 + R_3} + \frac{f_1 + f_2}{R_1} = 5.1\,A$$

Detti A e B gli estremi del condensatore si ha:

$$V_B = V_A - R_1 i_1 - R_2 i_1 + R_2 i_2$$

quindi la d. d. p. ai suoi estremi è:

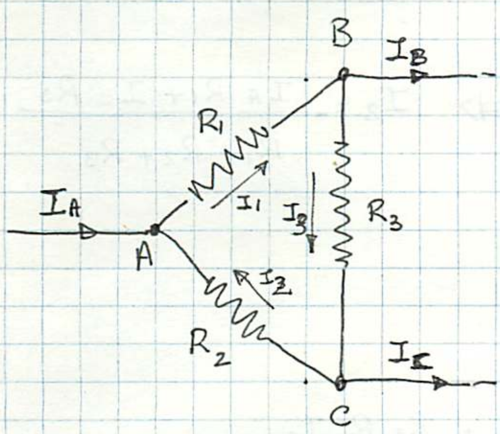
$$\Delta V = V_A - V_B = (R_1 + R_2)\, i_1 - R_2\, i_2 = 54\,V$$

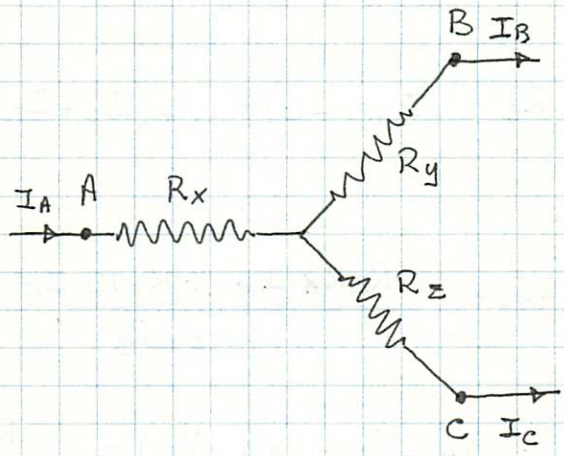
e l'energia immagazzinata vale:

$$U = \frac{1}{2} Q \Delta V = \frac{1}{2} C \Delta V^2 = 7.3\ 10^{-3}\,J$$

Nella rete a triangolo sono note le resistenze R_1, R_2, R_3 e le correnti I_A ed I_B $(I_C = I_A - I_B)$. Si calcoli la d.d.p. $V_A - V_B$ e $V_A - V_C$.

Nella rete a stella si hanno le stesse correnti I_A I_B ed I_C del triangolo. Quale relazione deve esistere tra R_x R_y R_z ed R_1 R_2 R_3 affinché le d.d.p. $V_A - V_B$, $V_A - V_C$, $V_B - V_C$ della stella siano uguali a quelle del triangolo?





Dette I_1 I_2 I_3 le correnti di ramo nel triangolo si ha:

$$V_A - V_B = I_1 R_1 = -R_2 I_2 - R_3 I_3$$

per i nodi A e B vale:

$$\begin{cases} I_A + I_2 = I_1 \\ I_1 = I_B + I_3 \end{cases} \qquad \begin{aligned} I_2 &= I_1 - I_A \\ I_3 &= I_1 - I_B \end{aligned}$$

per cui

$$I_1 R_1 = R_2 (I_A - I_1) + R_3 (I_B - I_1) \Rightarrow I_1 = \frac{R_2 I_A + R_3 I_B}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$V_A - V_B = \frac{R_1 R_2 I_A + R_1 R_3 I_B}{R_1 + R_2 + R_3}$$

analogamente

$$V_A - V_C = -I_2 R_2 = I_1 R_1 + I_3 R_3$$

$$\begin{cases} I_A + I_2 = I_1 \\ I_3 = I_B + I_2 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} I_1 = I_A + I_2 \\ I_3 = I_C + I_2 \end{array}$$

$$-I_2 R_2 = (I_A + I_2) R_1 + (I_C + I_2) R_3 \Rightarrow I_2 = -\frac{I_A R_1 + I_C R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$V_A - V_C = \frac{R_2 R_1 I_A + R_2 R_3 I_C}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$V_B - V_C = V_A - V_C - (V_A - V_B) = \frac{R_3 R_1 I_B + R_3 R_2 I_C}{R_1 + R_2 + R_3}$$

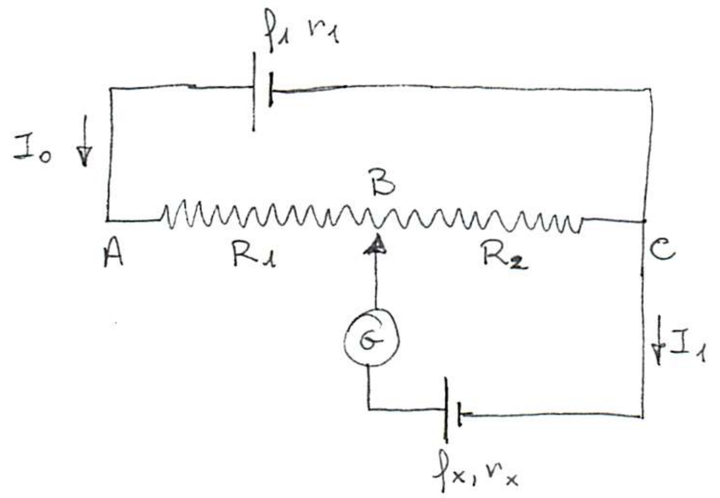
Nella stella si ha:

$$V_A - V_B = R_x I_A + R_y I_B \qquad V_A - V_C = I_A R_x + R_z I_C$$

affinchè queste d.d.p. siano uguali a quelle del triangolo deve essere:

$$\begin{cases} R_x = R_1 R_2 / (R_1 + R_2 + R_3) \\ R_y = R_1 R_3 / (R_1 + R_2 + R_3) \\ R_z = R_2 R_3 / (R_1 + R_2 + R_3) \end{cases} \qquad \begin{cases} R_1 = (R_x R_y + R_x R_z + R_y R_z) / R_z \\ R_2 = (R_x R_y + R_x R_z + R_y R_z) / R_y \\ R_3 = (R_x R_y + R_x R_z + R_y R_z) / R_x \end{cases}$$

Circuito potenziometrico per la misura di f.e.m. incognite



la resistenza AC ha un contatto B che viene spostato finché il galvanometro misura $I_1 = 0$

$$f_x = I_1(r_x + r_G) + (I_0 + I_1) R_2$$
$$f_1 = I_0 R_1 + (I_0 + I_1) R_2$$

se $I_1 = 0$

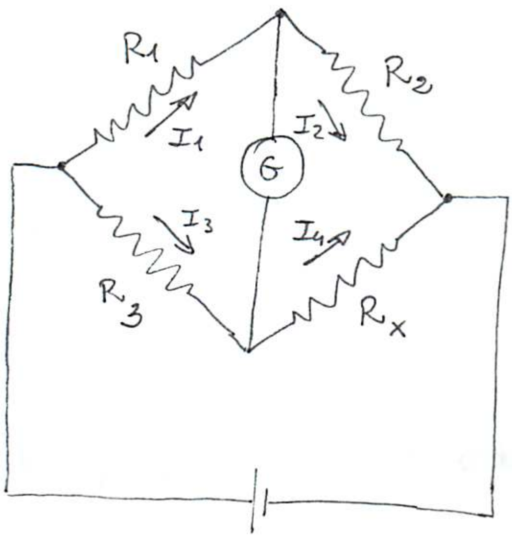
$$f_x = I_0 R_2 \qquad f_1 = I_0 (R_1 + R_2) \Rightarrow \frac{dI_0}{df_x} = 0$$

usando una sorgente di f.e.m. campione f_c

$$f_c = I_0 R_{2c}$$

$$f_x = f_c \frac{R_2}{R_{2c}}$$

Ponte di Weatstone per la misura di resistenze



variando il rapporto $\frac{R_1}{R_2}$ e il valore di R_3

si equilibria il ponte (: corrente nulla attraverso G)

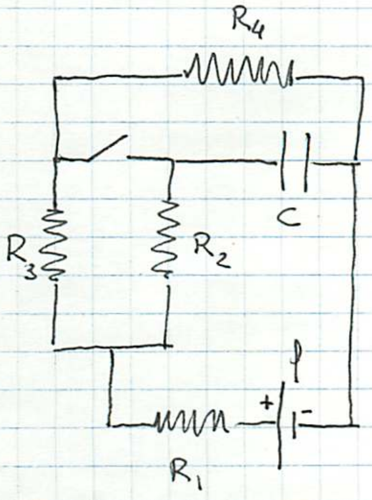
in questo caso $\quad I_1 = I_2 \quad I_3 = I_4$

$$R_1 I_1 - R_3 I_3 = 0$$

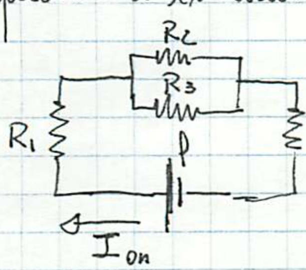
$$R_2 I_2 - R_x I_4 = 0 = R_2 I_1 - R_x I_3$$

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_x} \qquad R_x = R_3 \frac{R_2}{R_1}$$

Dato il circuito in figura dove $f = 10\,V$ $R_1 = 5\,\Omega$ $R_2 = R_3 = 20\,\Omega$ $R_4 = 35\,\Omega$ $C = 2\,\mu F$, calcolare la corrente di regime I quando l'interruttore è chiuso. L'interruttore viene poi aperto: calcolare la variazione di carica sulle armature del condensatore quando il sistema ha raggiunto la nuova configurazione di equilibrio.



quando l'interruttore è chiuso il sistema è equivalente al circuito



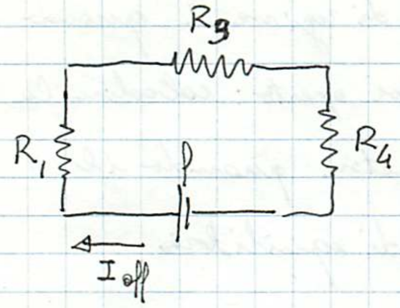
$$I_{on} = \frac{f}{R_{on}} = 0.2\,A$$

$$R_{on} = R_1 + R_4 + \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)^{-1} = 50\,\Omega$$

Poiché C è in parallelo ad R_4 la d.d.p. ai loro capi è la stessa e la carica sul condensatore vale:

$$Q_{on} = C\,\Delta V_{on} = C\,I_{on} R_4 = 1.4\;10^{-5}\,C.$$

Quando l'interruttore è aperto il circuito equivalente è:



$$R_{off} = R_1 + R_3 + R_4 = 60\,\Omega$$

$$I_{off} = \frac{f}{R_{off}} = 0.167\ A$$

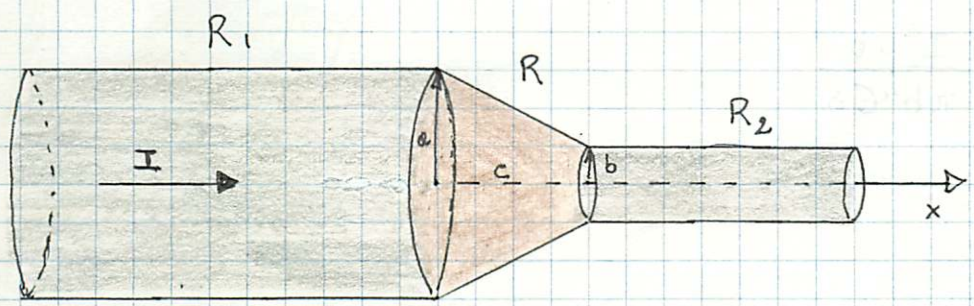
ora C è in parallelo ad $R_3 + R_4$ quindi

$$Q_{off} = C\,\Delta V_{off} = C\,I_{off}(R_3+R_4) = 1.832\ 10^{-5}\,C$$

$$\Delta Q = Q_{off} - Q_{on} = 4.32\ 10^{-6}\,C$$

Un filo di sezione a e resistenza R_1 viene connesso ad un filo di sezione $b<a$ e resistenza R_2 mediante una strozzatura troncoconica di lunghezza c. Detto ρ la resistività della strozzatura si calcoli la resistenza totale e la differenza di temperatura che si stabilisce tra i due fili dopo un tempo t in cui fluisce una corrente stazionaria I.
Si trascurino le dispersioni termiche e siano δ e c la densità del materiale ed il suo calore specifico

---



la resistenza totale è $R_1 + R_2 + R$ dove R è la resistenza della strozzatura:

A distanza x dal filo 1 il raggio della strozzatura è

$$y = a - (a-b)\frac{x}{c}$$

$$dR = \rho \frac{dx}{\pi y^2} = \rho \frac{dx}{\pi\left[a - \frac{a-b}{c}x\right]^2}$$

$$R = \int dR = \int_0^c \frac{\rho}{\pi} \frac{dx}{\left(a - \frac{a-b}{c}x\right)^2} = \frac{\rho}{\pi} \frac{1}{a - \frac{a-b}{c}x} \frac{c}{a-b}\Bigg|_0^c =$$

$$= \frac{\rho}{\pi}\frac{c}{a-b}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) = \frac{\rho c}{\pi a b}$$

la potenza termica dissipata in ciascun tratto di filo vale

$$W_i = I^2 R_i \qquad i = 1,2$$

Detta T_0 la temperatura iniziale comune, dopo un tempo t si ha

$$T_1(t) = T_0 + \frac{W_1 t}{\mathcal{C} m_1} = T_0 + \frac{I^2 \frac{\rho \cancel{\ell_1}}{\pi a^2} t}{\mathcal{C}\, \delta\, \pi a^2 \cancel{\ell_1}} = T_0 + \frac{I^2 \rho t}{\pi^2 a^4 \mathcal{C} \delta}$$

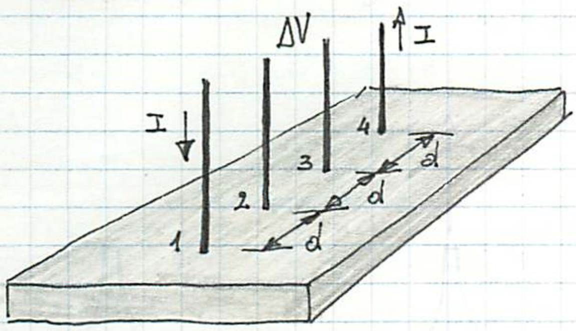
$$T_2(t) = T_0 + \frac{I^2 \rho t}{\pi b^4 \mathcal{C} \delta}$$

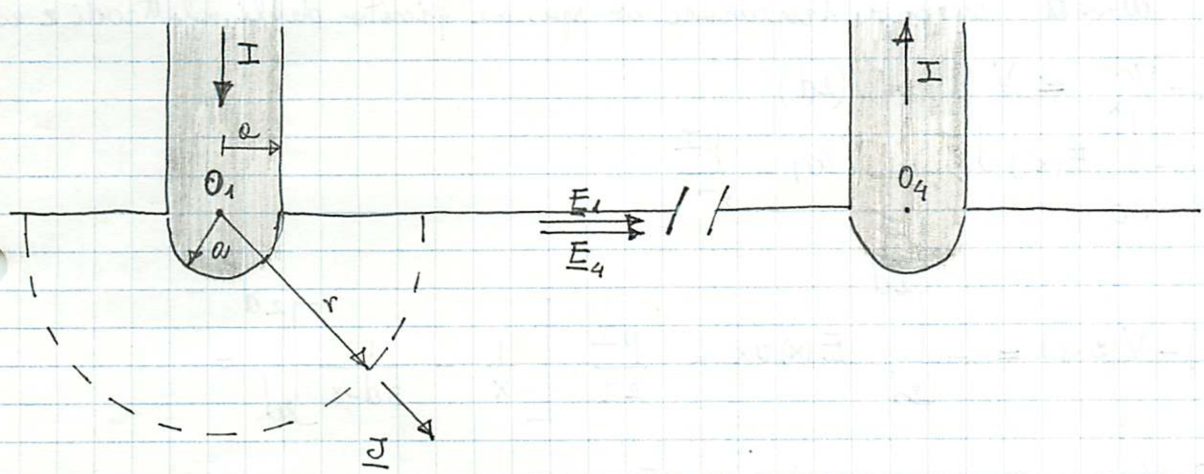
quindi

$$\Delta T(t) = T_2(t) - T_1(t) = \frac{I^2 \rho t}{\pi \mathcal{C} \delta} \left(\frac{1}{b^4} - \frac{1}{a^4} \right) > 0$$

$= 0.13\,cm$

4 elettrodi allineati e distanti d l'uno dall'altro sono a contatto con una lamina semiconduttrice di resistività $\rho = 0.015\ \Omega\, m$. Gli elettrodi 1 e 4 sono connessi ad un generatore di corrente I $= 2.5\,mA$. Calcolare la d.d.p. ΔV tra gli elettrodi 2 e 3 assumendo che ogni elettrodo sia cilindrico di raggio $a \ll d$ e termini con una semi calotta sferica di raggio a completamente immersa nel semiconduttore.





Si consideri l'elettrodo 1. Per motivi di simmetria $\underline{J}_1(r)$ è radiale

Per definizione $\quad I = \phi(\underline{J}_1) = 2\pi r^2 J_1(r) \qquad J_1(r) = \dfrac{I}{2\pi r^2}$

Per la legge di Ohm microscopica $\quad \underline{E}_1(r) = \rho\, \underline{J}_1(r)$ ovvero

$E_1(r) = \dfrac{\rho I}{2\pi r^2}$ avendo preso come centro O_1

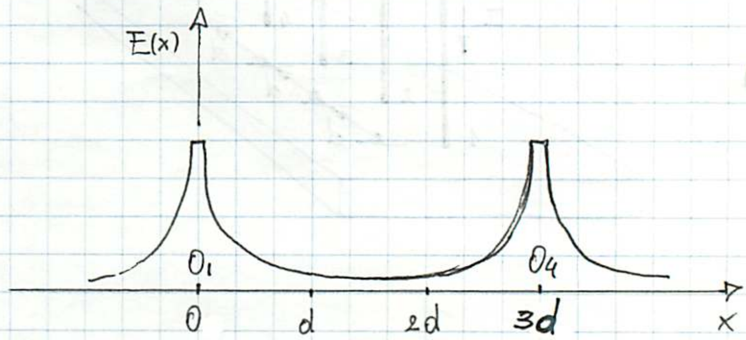
Per l'elettrodo 4 la situazione è identica salvo che la corrente ha verso opposto e quindi $J_4(r) = -\dfrac{I}{2\pi r^2}$ ovvero

$$E_4(r) = -\frac{\rho I}{2\pi r^2}$$

avendo considerato come centro O_4

Il campo totale è somma di $\underline{E}_1$ ed $\underline{E}_4$; lungo la congiungente $O_1 O_4$ detto x la distanza da O_1 si ha:

$$E(x) = \frac{\rho I}{2\pi}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(3d-x)^2}\right)$$



Nel limite $a \ll d$ si può trascurare lo spessore finito degli elettrodi 2 e 3

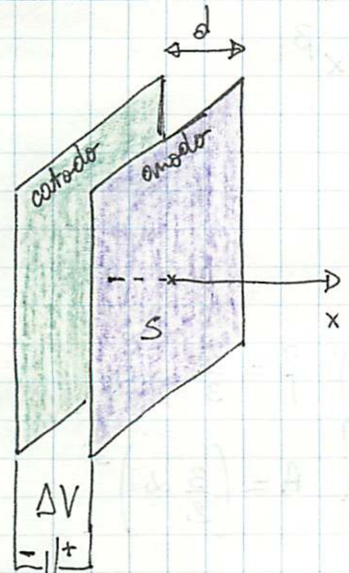
$$\Delta V \equiv V(2) - V(3) \simeq V(d) - V(2d)$$

$$\Delta V = V(d) - V(2d) = -\int_{2d}^{d} E(x)\, dx = \frac{\rho I}{2\pi}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{3d-x}\right]_{2d}^{d} =$$

$$= \frac{\rho I}{2\pi}\left(\frac{1}{d} - \frac{1}{2d} - \frac{1}{2d} + \frac{1}{d}\right) = \frac{\rho I}{2\pi d} = 4.6 \text{ mV}$$

Si ha dunque un metodo, detto delle 4 punte, per misurare ρ noti d, I e ΔV.

Un diodo è costituito da un anodo e un catodo piani e paralleli di superficie $S = 20 \text{ cm}^2$ e distanti $d = 5 \text{ mm}$.
Facendo l'ipotesi che gli elettroni vengono emessi dal catodo con velocità nulla si calcoli la corrente nel diodo per una d. d. p. applicata $\Delta V = 100 \text{ V}$.



Detta $\rho(x)$ la densità di carica all'interno del diodo l'equazione di Poisson dà:

$$\frac{d^2 V(x)}{dx^2} = -\frac{\rho(x)}{\varepsilon_0}$$

Detta $v(x)$ la velocità degli elettroni a distanza x dal catodo la densità di corrente vale:

$$j(x) = \rho(x)\, v(x)$$

In regime stazionario $\underline{\nabla} \cdot \underline{j} = \frac{d}{dx} j(x) = 0$ cioè $j(x) = \text{costante} = j < 0$

Per la conservazione dell'energia si ha:

$$\frac{1}{2} m\, v(x)^2 = e\, V(x)$$

quindi $\rho(x) = \frac{j}{V(x)} = j\sqrt{\frac{m}{2e\,V(x)}} < 0$

$$\frac{d^2}{dx^2} V(x) = -\frac{j}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2e\,V(x)}} = \alpha^2 V(x)^{-\frac{1}{2}} \qquad \alpha^2 \equiv -\frac{j}{\varepsilon_0}\sqrt{\frac{m}{2e}}$$

$V(0) = 0$

la soluzione è del tipo $V(x) = A\,x^{\beta}$

$$A\beta(\beta-1)\,x^{\beta-2} = \alpha^2 A^{-\frac{1}{2}}\, x^{-\frac{\beta}{2}}$$

$$\begin{cases} \beta - 2 = -\frac{\beta}{2} \\ A\beta(\beta-1) = \alpha^2 A^{-\frac{1}{2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta = \frac{4}{3} \\ A = \left(\frac{3}{2}\alpha\right)^{\frac{4}{3}} \end{cases}$$

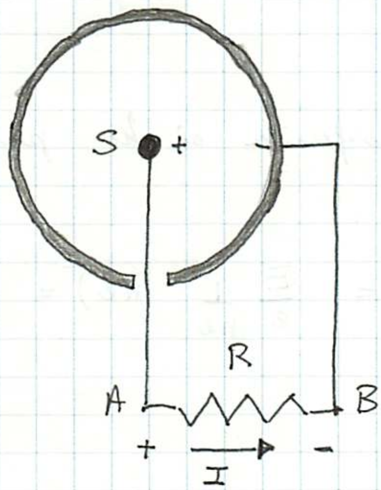
$$V(x) = \left(\frac{3}{2}\alpha\right)^{4/3} x^{4/3} = \left(\frac{3}{2}\alpha x\right)^{4/3}$$ legge di Langmuir-Child

$$V(d) = \Delta V = \left(\frac{3}{2}\alpha d\right)^{4/3}$$

$$\alpha = \frac{2}{3}\,\frac{\Delta V^{3/4}}{d}$$

$$I = jS = -\varepsilon_0 \alpha^2 S\sqrt{\frac{2e}{m}} = -\varepsilon_0 S\sqrt{\frac{2e}{m}}\;\frac{4}{9}\;\frac{\Delta V^{3/2}}{d^2} = -0.187\ mA$$

Al centro di una sfera di piombo cava c'è una sorgente radioattiva S che emette $n = 1.2\ 10^4$ elettroni al secondo con energia cinetica $E = 12$ KeV. La sorgente è connessa alla sfera mediante una resistenza $R = 0.95\ 10^{15}\ \Omega$.
In condizioni stazionarie quanto vale la d.d.p. ai capi di R? Quale è il suo valore massimo al variare di R? Per quale valore di R la potenza trasferita ad esso è massima?



La sfera di piombo si carica negativamente acquistando elettroni per cui $V_A > V_B$

In condizioni stazionarie la corrente è $I = ne$ quindi

$$V_{AB} = IR = neR = 1.8\,V$$

V_{AB} cresce al crescere di R ma non può crescere indefinitamente: quando la differenza di energia potenziale elettrostatica tra la sorgente e la sfera, eV_{AB}, supera l'energia cinetica degli elettroni emessi, E, la corrente si interrompe. Quindi

$eV_{AB} \leq E$ $\qquad V_{AB\,max} = \dfrac{E}{e} = 12\ KV$

in corrispondenza: $\qquad R_{max} = V_{AB\,max}/ne = 6.2\ 10^{18}\ \Omega$

La potenza sviluppata dalla sorgente è:

$$P_S = nE = 2.3\ 10^{-11}\ W \qquad 0 < R < R_{max} \qquad P_S = 0 \qquad R > R_{max}$$

La potenza dissipata per effetto Joule sulla resistenza R è:

$$P_R = RI^2 \doteq R\,(ne)^2 \qquad \text{per} \qquad 0 < R < R_{max}$$

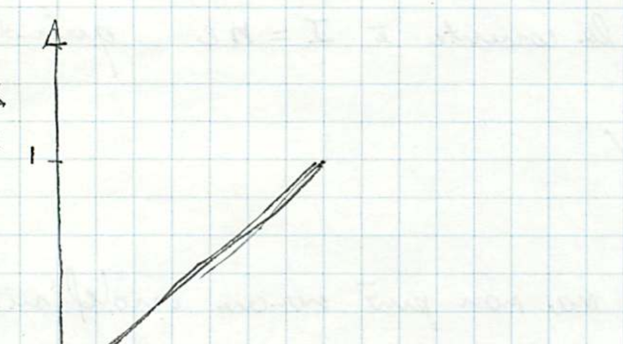
$$P_R = 0 \qquad \text{per} \qquad R > R_{max}$$

La potenza massima trasferita si ha per $R = R_{max}$ e vale

$$P_{R\,max} = R_{max}\,(ne)^2 = \frac{E}{e}\,\frac{1}{ne}\,(ne)^2 = nE = P_S$$

Si noti che per $R < R_{max}$ $\quad P_S > P_R$.

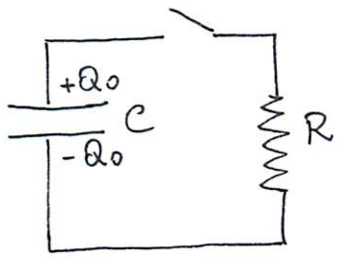
$P_S - P_R$ va a riscaldare la sfera di piombo (frenamento degli elettroni)



Equazioni circuitali in condizioni quasi stazionarie

Per processi non stazionari che variano su una scala di tempi $\ll \frac{l}{c}$ ($l \approx$ lunghezza del circuito, $c =$ velocità della luce) si applicano le leggi dei circuiti stazionari ai valori istantanei delle grandezze in gioco.

Scarica di un condensatore



a $t=0$ è $Q(0) = Q_0$ chiudendo il circuito fluisce una corrente $i(t)$ ed il condensatore si scarica

detto $V(t)$ la d.d.p. ai capi del condensatore

$$V(t) = R\, i(t) = \frac{Q(t)}{C}$$

$$-dQ = i\, dt \implies -\frac{dQ}{dt} = i(t) = \frac{V(t)}{R}$$

$$\boxed{\frac{d\,Q(t)}{dt} = -\frac{Q(t)}{RC}}$$

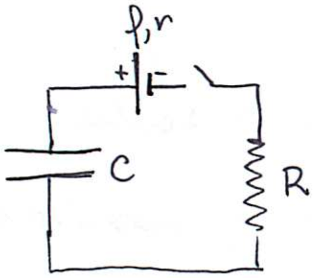
che ha soluzione

$$Q(t) = Q(0)\, e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$i(t) = \frac{Q_0}{RC}\, e^{-\frac{t}{RC}}$$

noto che $\int_0^\infty i(t)dt = Q_0$

carica di un condensatore



a $t=0$ è $Q(0)=0$

chiudendo l'interruttore il condensatore si carica a d.d.p. f

$$f - v(t) = (R+r)\, i(t) = f - \frac{Q(t)}{C}$$

$$dQ = i(t)\, dt \quad \Rightarrow \quad i(t) = \frac{dQ(t)}{dt}$$

$$\boxed{(R+r)\frac{dQ(t)}{dt} = \frac{fC - Q(t)}{C}}$$

$$\frac{dQ(t)}{fC - Q(t)} = \frac{dt}{(R+r)C}$$

$$\ln\left[\frac{fC - Q(t)}{fC - Q(0)}\right] = \frac{t}{(R+r)C}$$

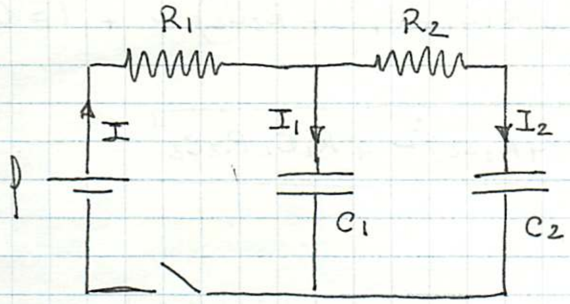
$$Q(t) = Cf\left[1 - e^{-\frac{t}{(R+r)C}}\right]$$

$$i(t) = \frac{f}{R+r}\, e^{-\frac{t}{(R+r)C}}$$

$$\Delta Q = Q(\infty) - Q(0) = Cf = \int_0^\infty dt\, i(t)$$

Nel circuito mostrato in figura determinare la d.d.p. $V_2(t)$ ai capi del condensatore C_2 a partire dall'istante $t=0$ in cui l'interruttore viene chiuso

---



Detta I, I_1 ed I_2 le correnti di ramo come illustrato in figura e V_1, V_2 le d.d.p. sui condensatori, si ha:

$$\begin{cases} I = I_1 + I_2 \\ f = I R_1 + V_1 \\ 0 = I_2 R_2 + V_2 - V_1 \end{cases}$$

Ma è:
$$I_1 = \frac{dQ_1}{dt} = C_1 \frac{dV_1}{dt} \qquad I_2 = \frac{dQ_2}{dt} = C_2 \frac{dV_2}{dt}$$

$$V_1 = V_2 + I_2 R_2 = V_2 + R_2 C_2 \frac{dV_2}{dt}$$

$$f = R_1 \left(C_1 \frac{dV_1}{dt} + C_2 \frac{dV_2}{dt} \right) + V_1 =$$

$$= R_1 \left(C_1 \frac{dV_2}{dt} + R_2 C_2 C_1 \frac{d^2 V_2}{dt^2} + C_2 \frac{dV_2}{dt} \right) + V_2 + R_2 C_2 \frac{dV_2}{dt}$$

che riordinata da:

$$R_1 R_2 C_1 C_2 \frac{d^2 V_2}{dt^2} + \left(R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2\right) \frac{d V_2}{dt} + V_2 = f$$

eq. caratteristica : $R_1 R_2 C_1 C_2 \, \alpha^2 + \left(R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2\right) \alpha + 1 = 0$

$$\alpha^{\pm} = \frac{-(R_1C_1 + R_1C_2 + R_2C_2) \pm \sqrt{(R_1C_1 + R_1C_2 + R_2C_2)^2 - 4 R_1C_1 R_2C_2}}{2 R_1C_1 R_2C_2}$$

$$V_2(t) = f + A^+ e^{\alpha^+ t} + A^- e^{\alpha^- t}$$

le condizioni iniziali sono :

$$V_2(0) = 0 \qquad V_1(0) = 0 = V_2(0) + R_2 C_2 \frac{dV_2}{dt}(0) \Rightarrow \frac{dV_2}{dt}(0) = 0$$

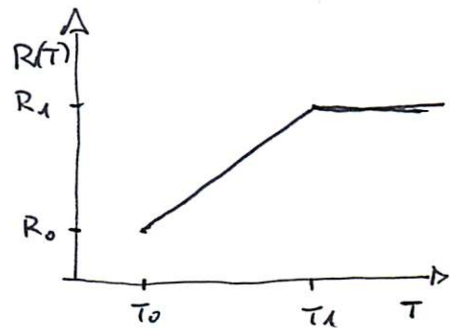
$$\begin{cases} f + A^+ + A^- = 0 \\ A^+ \alpha^+ + A^- \alpha^- = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} A^+ &= f \frac{\alpha^-}{\alpha^+ - \alpha^-} \\ A^- &= -f \frac{\alpha^+}{\alpha^+ - \alpha^-} \end{aligned}$$

$$V_2(t) = f \left[1 + \frac{\alpha^-}{\alpha^+ - \alpha^-} e^{\alpha^+ t} - \frac{\alpha^+}{\alpha^+ - \alpha^-} e^{\alpha^- t} \right]$$

si noti che $\mathrm{Re}\, \alpha^{\pm} < 0$ e quindi $\lim_{t \to \infty} V_2(t) = f$

Il filamento di una lampadina offre una resistenza elettrica dipendente dalla temperatura $R(T)$ secondo la legge:

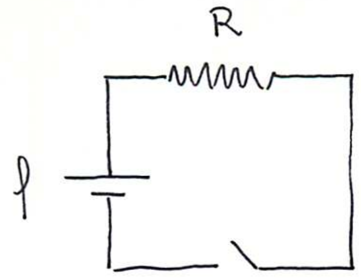
$$R(T) = \begin{cases} R_0 + \alpha (T - T_0) & T_0 \leq T \leq T_1 \\ \\ R_1 \left(\equiv R_0 + \alpha (T_1 - T_0) \right) & T_1 \leq T \end{cases}$$



A partire dall'istante $t=0$ la lampadina viene alimentata da una sorgente di f.e.m. continua ideale di valore f.

Trascurando la dispersione termica della lampadina e detta γ la sua capacità termica, calcolare l'andamento nel tempo della corrente $I(t)$ nel circuito supponendo che all'istante $t=0$ la lampadina sia a temperatura T_0.

Si trascuri il coefficiente di autoinduzione del circuito.



a $t=0$ è $T(0)=T_0$ ed $R = R_0$

all'istante t: $$f = I(t)\,R(t) \qquad (1)$$

l'energia dissipata nella lampadina va tutta ad aumentare la sua temperatura:

$$\int_0^t I(t')^2 R(t')\,dt' = \gamma\left(T(t) - T(0)\right) \qquad (2)$$

Derivando la (2) rispetto a t ed usando la (1)

$$\gamma\,\dot{T}(t) = \frac{f^2}{R(t)}$$

$$dT\;R(T) = \frac{f^2}{\gamma}\,dt$$

se $T \leq T_1$

$$\left[R_0 + \alpha(T-T_0)\right] dT = \frac{f^2}{\gamma}\,dt$$ integrando

$$R_0\left(T(t)-T_0\right) + \frac{\alpha}{2}\left(T(t)-T_0\right)^2 = \frac{f^2}{\gamma}\,t$$

$$\alpha\left[T(t)-T_0\right]^2 + 2R_0\left[T(t)-T_0\right] - \frac{2f^2}{\gamma}t = 0$$

$$T(t)-T_0 = \frac{-R_0 \pm \sqrt{R_0^2 + \frac{2f^2\alpha t}{\gamma}}}{\alpha}$$

affinché $\lim_{t\to 0}\left[T(t)-T_0\right] = 0$ occorre prendere il segno +

Questa legge esprime la dipendenza temporale di $T(t)$ fino al tempo t^* tale che $T(t^*) = T_1$

cioè $t^* = \frac{\gamma}{2f^2\alpha}\left(R_1^2 - R_0^2\right)$

per $t \geq t^*$ cioè $T \geq T_1$

$$\int_0^{T(t)} R(T')\,dT' = \int_0^{T_1} R(T')\,dT' + \int_{T_1}^{T(t)} R_1\,dT' =$$

$$= R_0(T_1-T_0) + \frac{\alpha}{2}(T_1-T_0)^2 + R_1(T(t)-T_1) =$$

$$= (T_1-T_0)\frac{R_0+R_1}{2} + R_1\left[T(t)-T_1\right] = \frac{f^2}{\gamma}t$$

$$T(t)-T_1 = \frac{f^2}{\gamma R_1}t - (T_1-T_0)\frac{R_0+R_1}{2R_1}$$

la corrente $I(t)$ è data dalla legge

$$I(t) = \frac{f}{R(t)} = \begin{cases} \dfrac{f}{R_0 + \alpha\left[T(t) - T_0\right]} & 0 \leq t \leq t^* \\[2ex] \dfrac{f}{R_1} & t^* \leq t \end{cases}$$

$$I(t) = \begin{cases} \dfrac{f}{\sqrt{R_0^2 + \dfrac{2 f^2 \alpha t}{\gamma}}} & 0 \leq t \leq t^* \\[2ex] \dfrac{f}{R_1} & t^* \leq t \end{cases}$$

essendo $t^* = \dfrac{\gamma}{2 f^2 \alpha}\left(R_1^2 - R_0^2\right)$