MAGNETOSTATICA NELLA MATERIA

Magnetostatica nella materia

- $\underline{\nabla} \cdot \underline{B} = 0$

- $\underline{\nabla} \times \underline{B} = \mu_0 \left(\underline{J} + \underline{J}_m \right)$

$$\underline{A}(\underline{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\underline{J}(\underline{x}') + \underline{J}_m(\underline{x}')}{|\underline{x} - \underline{x}'|} d^3x' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\underline{K}_m(\underline{x}')}{|\underline{x} - \underline{x}'|} d^2x' =$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\underline{J}(\underline{x}')}{|\underline{x} - \underline{x}'|} d^3x' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\underline{M}(\underline{x}') \times (\underline{x} - \underline{x}')}{|\underline{x} - \underline{x}'|^3} d^3x' \; *$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\underline{J}(\underline{x}') + \underline{\nabla}' \times \underline{M}(\underline{x}')}{|\underline{x} - \underline{x}'|} d^3x' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\underline{M}(\underline{x}') \times \hat{n}'}{|\underline{x} - \underline{x}'|} ds' \; **$$

$\underline{J}_m(\underline{x}) = \underline{\nabla} \times \underline{M}(\underline{x})$ $\qquad$ $\underline{M}$ = momento di dipolo magnetico per unità di volume

$\underline{K}_m(\underline{x}) = \underline{M}(\underline{x}) \times \hat{n}$

$$\underline{\nabla} \times \underline{B} = \mu_0 \underline{J} + \underline{\nabla} \times \left(\mu_0 \underline{M} \right)$$

- $\underline{\nabla} \times \left(\underline{B} - \mu_0 \underline{M} \right) = \mu_0 \underline{J}$

- $\underline{H} \equiv \left(\underline{B} - \mu_0 \underline{M} \right) \frac{1}{\mu_0}$ $\qquad$ $\underline{\nabla} \times \underline{H} = \underline{J}$

* $\underline{M}(x') \times \frac{\underline{x} - \underline{x}'}{|\underline{x} - \underline{x}'|^3} = +\underline{M}(\underline{x}') \times \underline{\nabla}' \frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}'|} = \frac{+1}{|\underline{x} - \underline{x}'|} \underline{\nabla}' \times M(\underline{x}') - \underline{\nabla}' \times \frac{\underline{M}(x')}{|\underline{x} - \underline{x}'|}$

avendo usato

$$\underline{\nabla} \times (f \underline{v}) = \underline{\nabla} f \times \underline{v} + f \underline{\nabla} \times \underline{v}$$

** $\int \underline{\nabla} \times \underline{v} \, d^3x = \int \hat{n} \times \underline{v} \, d^2x$

- mezzi isotropi $\qquad \underline{M} = \chi\, \underline{H}$

$$\underline{B} = \mu_0\left(\underline{H} + \underline{M}\right) = \mu_0\left(1+\chi\right)\underline{H}$$

$$\mu_r \equiv 1+\chi \qquad\qquad \underline{B} = \mu_0 \mu_r \underline{H}$$

- mezzi isotropi + omogenei $\quad \mu_r$ costante $\quad \underline{\nabla} \times \underline{B} = \mu_0 \mu_r \underline{J}$

- $B_{n1} = B_{n2} \qquad H_{t1} = H_{t2}$

$$\frac{1}{\mu_{r1}} B_{t1} = \frac{1}{\mu_{r2}} B_{t2}$$

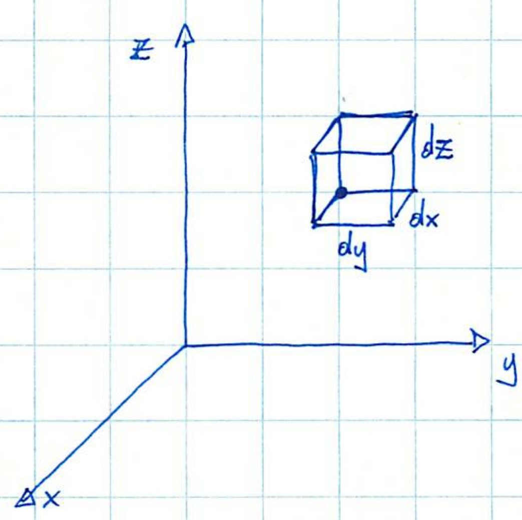
$$\frac{\tan \phi_1}{\tan \phi_2} = \frac{B_{1t}/B_{n1}}{B_{t2}/B_{n2}} = \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}}$$

- materiali diamagnetici : $\chi \lesssim 0 \quad \mu_r \lesssim 1$
- materiali paramagnetici : $\chi \gtrsim 0 \quad \mu_r \gtrsim 1$
- materiali ferromagnetici: $\underline{B} = \underline{F}(\underline{H})$ con $\underline{F}$ funzione vettoriale di $\underline{H}$, non lineare e a più valori

$$\int_V \underline{\nabla} \cdot \underline{A} \; dV = \int_S \underline{A} \cdot \hat{n} \; dS$$

$$\int_V \underline{\nabla} \phi \; dV = \int_S \phi \; \hat{n} \; dS$$

$$\int_V \underline{\nabla} \times \underline{A} \; dV = \int_S \hat{n} \times \underline{A} \; dS$$



$\cancel{\hat{n} \times \underline{A} \, dS =}$ $\cancel{\hat{x}}$

$$\underline{\nabla} \times \underline{A} \quad dV = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad dx\,dy\,dz$$

$$= \left[\hat{x} \left(\partial_y A_z - \partial_z A_y \right) + \hat{y} \left(\partial_z A_x - \partial_x A_z \right) + \hat{z} \left(\partial_x A_y - \partial_y A_x \right) \right] dx\,dy\,dz =$$

$$= \hat{x} \left[A_z(y+dy) - A_z(y) \right] dx\,dz - \hat{x} \left[A_y(z+dz) - A_y(z) \right] dx\,dy$$

$$+ \hat{y} \left[A_x(z+dz) - A_x(z) \right] dx\,dy - \hat{y} \left[A_z(x+dx) - A_z(x) \right] dy\,dz$$

$$+ \hat{z} \left[A_y(x+dx) - A_y(x) \right] dy\,dz - \hat{z} \left[A_x(y+dy) - A_x(y) \right] dx\,dz =$$

$$= dy\,dz \left\{ \hat{z}\left[A_y(x+dx) - A_y(x)\right] - \hat{y}\left[A_z(x+dx) - A_z(x)\right] \right\}$$

$$+ dx\,dz \left\{ \hat{x}\left[A_z(y+dy) - A_z(y)\right] - \hat{z}\left[A_x(y+dy) - A_x(y)\right] \right\}$$

$$+ dx\,dy \left\{ \hat{y}\left[A_x(z+dz) - A_x(z)\right] - \hat{x}\left[A_y(z+dz) - A_y(z)\right] \right\} =$$

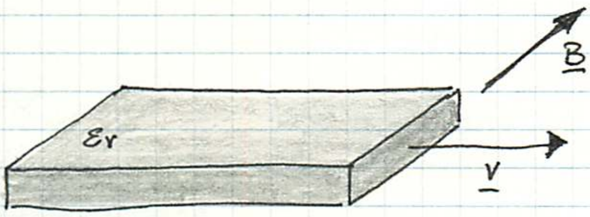
$$= dy\,dz \quad \hat{x} \times \left[\underline{A}(x+dx) - \underline{A}(x)\right]$$

$$+ dx\,dz \quad \hat{y} \times \left[\underline{A}(y+dy) - \underline{A}(y)\right]$$

$$+ dx\,dy \quad \hat{z} \times \left[\underline{A}(z+dz) - \underline{A}(z)\right] \qquad = dS\ \hat{n} \times \underline{A}$$

Una lastra di materiale dielettrico omogeneo ed isotropo $\varepsilon_r = 4$ si muove con velocità $v = 5\ ms^{-1}$ perpendicolarmente ad un campo $B = 1.5\ T$ uniforme. Calcolare la densità di carica di polarizzazione che si manifestano sulla lastra

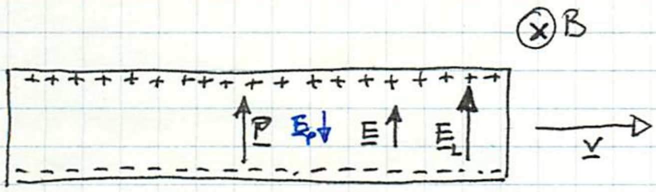
---



su una carica q (fissa) del dielettrico agisce una forza di Lorentz

qvB diretta verso l'alto per $q>0$ e verso il basso per $q<0$

quindi esiste un campo elettrico inducente $E_L = vB$ $\quad \underline{E}_L = \underline{v} \times \underline{B}$



$\underline{E} = \underline{E}_L + \underline{E}_P \qquad E < E_L$

il campo elettrico totale è $E = \dfrac{vB}{\varepsilon_r}$ $\qquad \underline{E} = \dfrac{1}{\varepsilon_r}\, \underline{v} \times \underline{B}$

cui corrisponde una polarizzazione $\underline{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\,\underline{E} = \varepsilon_0 \dfrac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\, \underline{v} \times \underline{B}$

$\underline{\nabla} \cdot \underline{P} = 0 \implies \rho_{pol} = 0$ nel volume

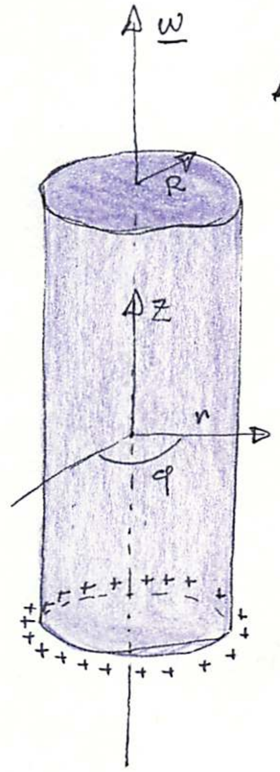
$\sigma_{pol} = \underline{P} \cdot \hat{n} \qquad |\sigma_{pol}| = \varepsilon_0 \dfrac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\, vB = 6.65\ 10^{-11}\ C\ m^{-2}$

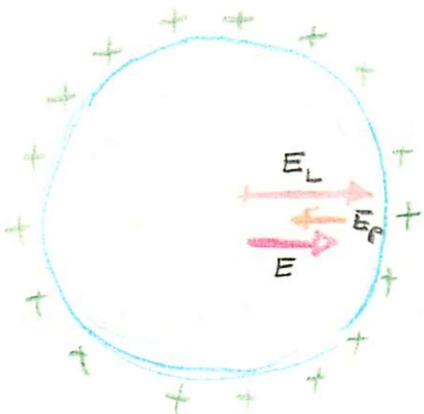
positiva sopra negativa sotto

si noti che $\underline{E} = \underline{E}_L - \frac{1}{\varepsilon_0}\underline{P} = \underline{v}\times\underline{B}\left(1 - \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\right) = \frac{1}{\varepsilon_r}\,\underline{v}\times\underline{B}$

N.B.: metallo $\Rightarrow \varepsilon_r = \infty$ così che $E = 0$

Un cilindro di materiale dielettrico (costante dielettrica ε_r) di raggio R ruota con velocità angolare costante ω intorno al suo asse. Determinare le densità di carica di polarizzazione di superficie σ_{pol} e di volume ρ_{pol} indotte da un campo di induzione magnetica $\underline{B}$ uniforme diretto nel verso dell'asse.





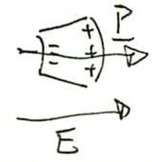
Si supponga il cilindro di altezza h molto grande rispetto al raggio R in modo da poter trascurare effetti di bordo.

Le cariche elettriche del dielettrico sono sottoposte ad una forza di Lorentz di intensità crescente lungo r $\quad F(r) = q\,\omega r B$

che separa cariche positive e negative e polarizza per deformazione il mezzo.

Il campo elettrico locale risultante $E(r)$ ~~produce una forza che~~ è tale da produrre la stessa forza magnetica ~~compensi quella magnetica~~

$$\varepsilon_r q\, E(r) = F(r) \qquad E(r) = \frac{\omega B r}{\varepsilon_r}$$



$$\underline{E}(r) = \frac{\omega B}{\varepsilon_r} r \hat{r} \qquad \text{(diretto verso l'esterno)}$$

Il vettore intensità di polarizzazione è:

$$\underline{P}(r) = \varepsilon_0 \chi \underline{E}(r) = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r} \omega B r \hat{r}$$

$$\sigma_{pol} = \underline{P}(R) \cdot \hat{r} = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r} \omega B R$$

$$\rho_{pol} = -\underline{\nabla} \cdot \underline{P} = -\frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r} \omega B \quad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r \cdot r)$$

$$= -2\frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r} \omega B$$

si noti che:

$$\int_{cilindro} \rho_{pol}\, dV = \int_0^R -\frac{2\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r} \omega B \quad h 2\pi r dr = -\frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r} \omega B 2\pi h R^2$$

$$\int_{cilindro} \sigma_{pol}\, dS = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r} \omega B R \quad 2\pi R h$$

e quindi $\quad Q_{pol} = 0$

sachant qu'à l'instant initial la bille se trouvait à une distance R de l'axe du solénoïde. Disposant des résultats numériques, décider si l'effet sera observable avec des billes macroscopiques. A quelles difficultés se heurterait-on dans une expérience avec des macroparticules chargées?

R é p o n s e. $r = R/2$, $T = 2\pi mc/(qB) \approx 60$ ans.

11. On enfile un tore en diélectrique de permittivité ε sur un noyau cylindrique en fer, traversé par un flux magnétique uniforme $\Phi = \Phi_0 \cos \omega t$ (fig. 177). Le tore comporte un interstice d'air infiniment étroit résultant de deux coupures infiniment rapprochées parallèles aux plans méridiens. Calculer l'intensité E du champ électrique dans cet interstice en fonction de la distance r à l'axe du cylindre.

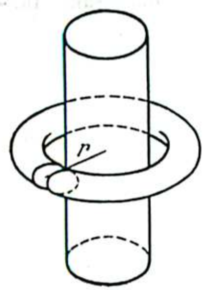


Fig. 177

R é p o n s e. $E = \dfrac{\varepsilon\omega}{2\pi c r}\Phi_0 \sin \omega t$.

12. Un cylindre creux en diélectrique, de rayon interne r_1 et de rayon externe r_2 est mis en rotation uniforme avec la vitesse angulaire ω autour de son axe géométrique dans un champ magnétique uniforme. Le vecteur induction B du champ magnétique est parallèle à l'axe du cylindre; la permittivité diélectrique du cylindre est ε. Calculer: 1) la densité spatiale $\rho_{\text{lié}}$ des charges liées qui sont apparues dans le cylindre du fait de sa rotation dans le champ magnétique; 2) la charge spatiale totale q par unité de longueur du cylindre; 3) les densités des charges superficielles sur les deux surfaces du cylindre; 4) la charge globale du cylindre.

S o l u t i o n. Une charge e tournant avec le cylindre est soumise à la force de Lorentz $F = \frac{e}{c}[vB] = \frac{e}{c}[[\omega r]\,B] = \frac{e}{c}(\omega B)\,r$. Cette force provoque la même polarisation du diélectrique que celle qui résulterait de l'application d'un champ électrique d'intensité $\frac{1}{c}(\omega B)\,r$, i.e.

$$P = \frac{\alpha}{c}(\omega B)\,r = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi c}(\omega B)\,r.$$

On en tire (puisque $\operatorname{div} r = \partial x/\partial x + \partial y/\partial y = 2$)

$$\rho_{\text{lié}} = -\operatorname{div} P = -\frac{\varepsilon-1}{2\pi c}(\omega B),$$

$$q = \int \rho_{\text{lié}}\, dV = -\frac{\varepsilon-1}{2c}(\omega B)\,(r_2^2 - r_1^2).$$

La densité superficielle des charges liées se trouvant sur la surface interne du cylindre est

$$\sigma_{1\,\text{lié}} = -\frac{\varepsilon-1}{4\pi c}(\omega B)\,r_1$$

et celle de la surface externe du cylindre est

$$\sigma_{2\,\text{lié}} = \frac{\varepsilon-1}{4\pi c}(\omega B)\,r_2.$$

La charge totale du cylindre est nulle.

§ 68. Inductance des fils électriques. Effets accompagnant l'application et la coupure d'un courant

1. Considérons un fil électrique fin en forme de boucle parcouru par un courant continu $\mathcal{J}$ (fig. 178). Soit B le champ magnétique créé par ce courant. Traçons à l'intérieur du fil parallèlement à son axe un contour mathématique fermé s et fixons sur ce contour un sens de parcours positif. Soit Φ le flux magnétique du vecteur B embrassé par le contour s. Si l'espace considéré ne renferme aucun corps ferromagnétique, les valeurs de B et de Φ seront proportionnelles au courant, ce qui permet d'écrire

$$\Phi = L\mathcal{J}^{(m)} = \frac{1}{c}L\mathcal{J}. \qquad (68.1)$$

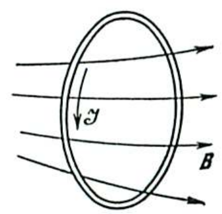


Fig. 178

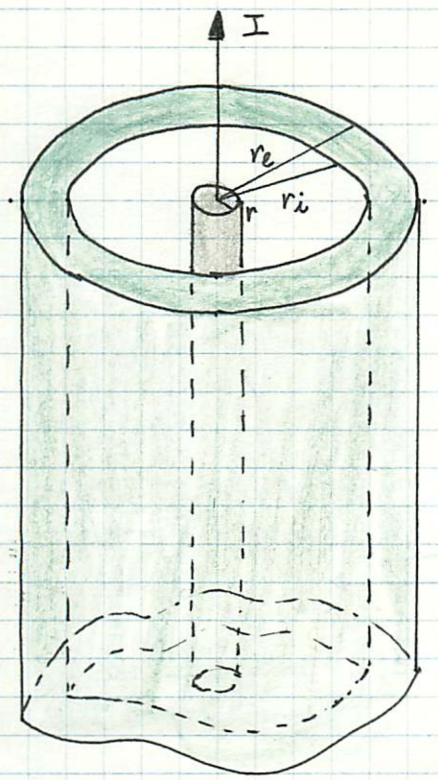
$\mathcal{J}$ désigne ici l'intensité de courant dans le système gaussien d'unités de mesure et $\mathcal{J}^{(m)}$ l'intensité de ce même courant exprimée dans le système C.G.S.M. Le coefficient L est indépendant de l'intensité de courant, n'étant fonction que des dimensions et de la configuration du fil; on l'appelle *inductance* ou encore *coefficient de self-inductance* du conducteur. Cette définition est quelque peu ambiguë puisqu'on n'a pas précisé la position du contour mathématique s. Tant qu'il s'agit de fils fins, cette imprécision est parfaitement négligeable. D'ailleurs on peut lever l'ambiguïté par un procédé qui sera décrit au § 69. Pour abréger nous appellerons la grandeur Φ *flux magnétique* à travers le contour conducteur fermé, quoique sa signification physique exacte n'apparaîtra qu'après introduction du contour mathématique auxiliaire s, comme nous l'avons fait ci-dessus.

Pour calculer l'inductance on ne peut remplacer un fil fin par un fil infiniment fin, i.e. par une ligne géométrique puisque dans ce cas le champ magnétique à proximité du fil serait proportionnel à $1/r$, r étant la distance jusqu'au fil, et on obtiendrait alors pour le flux magnétique et l'inductance des valeurs infinies. Plus le fil est fin, plus son inductance est grande, toutes choses égales d'ailleurs.

2. A titre d'exemple, calculons l'inductance d'un solénoïde en négligeant les effets de bord. Soient l la longueur du solénoïde, N le nombre total des spires et S l'aire d'une spire du solénoïde. A l'intérieur du solénoïde l'induction du champ magnétique est

$$B = \frac{4\pi}{c}\frac{\mathcal{J}N\mu}{l}.$$

Un filo rettilineo ed indefinito di raggio $r = 2\,mm$ è percorso da una corrente uniforme di intensità $I = 5A$. Il filo si trova all'interno di un tubo di ferro ($\mu_r = 700$) ad esso coassiale avente raggi $r_i = 5\,cm$ ed $r_e = 6\,cm$. Si trovi l'andamento di B ed H.



Per motivi di simmetria $\underline{B}$ ed $\underline{H}$ dipendono solo dalla distanza x dall'asse

Si consideri un cerchio di raggio x centrato sull'asse del filo

dalla proprietà $\underline{\nabla} \times \underline{H} = \underline{j}$ ovvero $\oint \underline{H} \cdot d\underline{l} = \int_S \underline{j} \cdot \hat{n}\, ds$

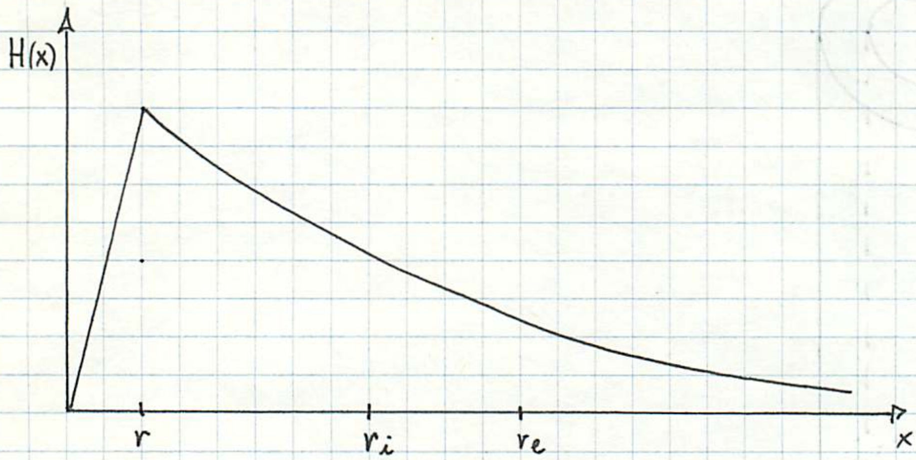
si ha:

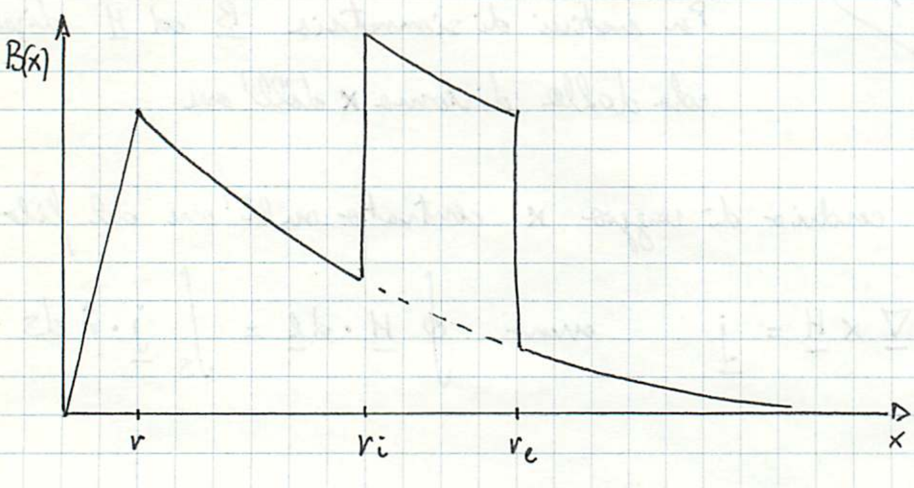
$0 < x < r$ $\qquad 2\pi x\, H = I \dfrac{x^2}{r^2} \qquad \Rightarrow H(x) = \dfrac{I}{2\pi} \dfrac{x}{r^2}$

$r < x$ $\qquad 2\pi x\, H = I \qquad \Rightarrow H(x) = \dfrac{I}{2\pi x}$

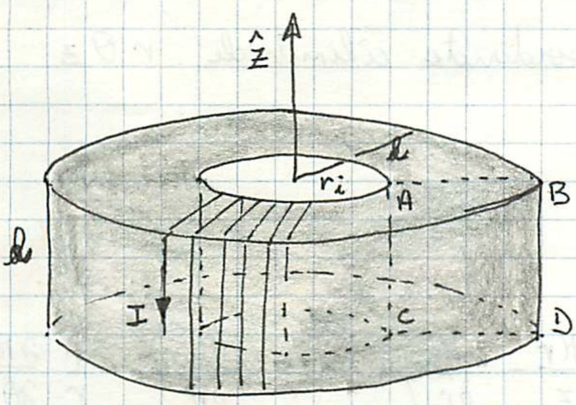
$\underline{B} = \mu_0 \mu_r \underline{H}$

$$B(x) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0}{2\pi} \dfrac{I\,x}{r^2} & 0 < x < r \\ \dfrac{\mu_0}{2\pi} \dfrac{I}{x} & r < r < r_i \\ \dfrac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} \dfrac{I}{x} & r_i < r < r_e \\ \dfrac{\mu_0}{2\pi} \dfrac{I}{x} & r_e < r \end{cases}$$





Un anello toroidale di permeabilità magnetica relativa μ_r ha sezione quadrata di lato l e raggio interno r_i. Intorno all'anello sono avvolte N spire percorse da corrente I. Si calcoli il flusso di $\underline{B}$ attraverso una sezione dell'anello e la densità delle correnti di magnetizzazione alla superficie e all'interno dell'anello.



Si fissi l'attenzione sulla sezione ABCD. Il campo $\underline{B}$ è azimutale

$\underline{B} = \hat{z} \times \hat{r} \quad B(r)$ dove $\hat{z}$ è il versore dell'asse del toro

e $\hat{r}$ è il versore radiale; il modulo $B(r)$ dipende dalla distanza dall'asse.

Considerata una circonferenza di raggio r concentrica al toro, si ha:

$$\oint \underline{H} \cdot d\underline{l} = H\, 2\pi r = N I \quad \Rightarrow \quad H(r) = \frac{N I}{2\pi r}$$

$$B(r) = \mu_0 \mu_r H(r) = \mu_0 \mu_r \frac{N I}{2\pi r}$$

$$\phi_{ABCD}(\underline{B}) = \int_{r_i}^{r_i + l} B(r)\, l\, dr = \frac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} N I\, l \ln\left(1 + \frac{l}{r_i}\right)$$

coefficiente di autoinduzione $L = \dfrac{N \phi(B)}{I} = \dfrac{\mu_0 \mu_r}{2\pi} N^2 l \ln\left(1 + \dfrac{l}{r_i}\right)$

ottenibile anche come $\frac{1}{2} L I^2 = \int \frac{B^2}{2\mu} dV$

Il vettore intensità di magnetizzazione vale:

$$\underline{M} = \frac{1}{\mu_0}\underline{B} - \underline{H} \qquad \underline{M}(r) = \hat{z} \times \hat{r}\,(\mu_r - 1)\,\frac{NI}{2\pi r}$$

la densità di corrente di magnetizzazione all'interno del toro vale:

$\underline{J}_m = \underline{\nabla} \times \underline{M}(r) = 0$ usando coordinate cilindriche $r\,\theta\,z$

$$\underline{M}(r) = \left(0,\ (\mu_r - 1)\frac{NI}{2\pi r},\ 0\right)$$

$$\underline{\nabla} \times \underline{M}(r) = \hat{r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial M_z}{\partial \theta} - \frac{\partial M_\theta}{\partial z}\right) + \hat{\theta}\left(\frac{\partial M_r}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial r}\right) + \hat{z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (M_\theta r)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial M_r}{\partial \theta}\right) = 0$$

le densità di corrente di magnetizzazione sulle superfici del toro valgono:

$\underline{K}_m = \underline{M} \times \hat{n}$ dove $\hat{n}$ è la normale esterna alla superficie considerata

superficie interna: $\underline{K}_m = \hat{z}\,(\mu_r - 1)\,\dfrac{NI}{2\pi r_i}$

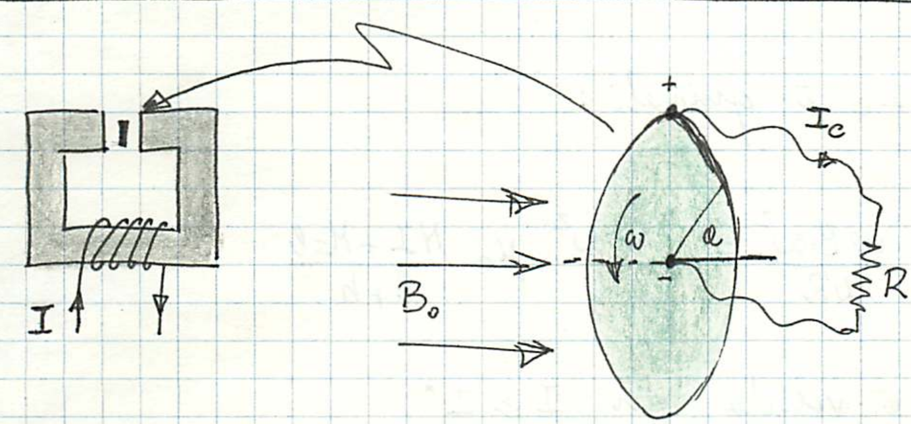
superficie esterna: $\underline{K}_m = -\hat{z}\,(\mu_r - 1)\,\dfrac{NI}{2\pi (r_i + l)}$

superficie superiore: $\underline{K}_m(r) = \hat{r}\,(\mu_r - 1)\,\dfrac{NI}{2\pi r}$

superficie inferiore: $\underline{K}_m(r) = -\hat{r}\,(\mu_r - 1)\,\dfrac{NI}{2\pi r}$

se $\mu_r > 1$ $\underline{K}$ è concorde a $\underline{I}$

Un elettromagnete di lunghezza $l = 35$ cm e traferro $h = 3.0$ mm ha un avvolgimento di $N = 350$ spire in cui circola una corrente I. Nel traferro viene posto un sottile disco conduttore di raggio $a = 1.50$ cm che ruota a velocità angolare costante $\omega = 120$ rad s^{-1}. Il disco è chiuso su un circuito di resistenza $R = 68\,\Omega$ mediante due contatti striscianti posti al centro e al bordo del disco. Sia I_c la corrente in tale circuito. Si aumenta gradatamente I e si osserva che a partire da $I^* = 37$ A cui corrisponde $I_c^* = 3.95\,10^{-4}$ A, I_c cresce linearmente con I. Determinare la relazione che lega I_c al campo B ed il valore della magnetizzazione di saturazione M_s del materiale usato.



Detti B, H $\quad B_0, H_0$ i campi nel ferromagnete e nel traferro, si ha:

$$B = B_0$$

$$NI = Hl + H_0 h$$

$$H_0 = \frac{B_0}{\mu_0} \qquad B = B_0 = \frac{\mu_0}{h}\left(NI - Hl\right)$$

nel ferro-magnete si ha $B = \mu_0(H + M)$

con $M = M(H)$ Per H sufficientemente intenso $M(H)$ satura a M_s

quindi $B = \mu_0(H + M_s)$ cioè $H = \dfrac{B}{\mu_0} - M_s$

sostituendo nella precedente relazione:

$$B = \frac{\mu_0}{h} N I - \frac{\mu_0 l}{h}\left(\frac{B}{\mu_0} - M_s\right)$$

che da:
$$B = \mu_0 \frac{N I + M_s l}{l + h}$$

a causa del campo $B_0 = B$ sul disco si stabilisce un campo elettrico $\cancel{q}E(r) = \cancel{q}|\underline{v} \times \underline{B}| = \cancel{q}\,\omega r B$

e quindi una d.d.p. tra periferia e centro pari a:

$$|\Delta V| = \int_0^R \omega r B \, dr = \frac{1}{2}\omega B a^2$$

la corrente I_c è quindi:

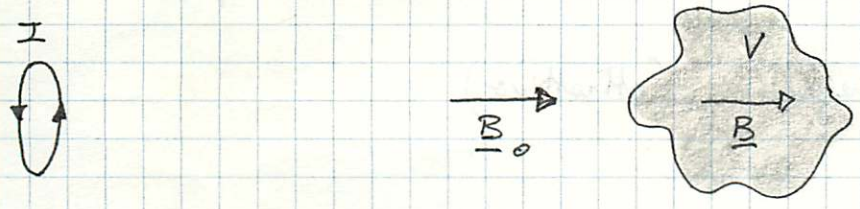
$$I_c = \frac{\Delta V}{R} = \frac{\omega B a^2}{2R} = \frac{\omega a^2}{2R}\mu_0 \frac{N I + M_s l}{l + h}$$

relazione che è valida per $I \geq I^*$

valutando $I_c(I^*) = I_c^*$ si ha:

$$M_s = \frac{1}{l}\left[(l + h) I_c^* \frac{2R}{\mu_0 \omega a^2} - N I^*\right] = 1.56 \; 10^6 \; A\,m^{-1}$$

Un pezzetto di sostanza di volume V e permeabilità magnetica μ_r si trova immerso nel campo magnetico generato da un dipolo magnetico nella direzione del suo asse.
Determinare la forza esercitata sul volumetto.



energia potenziale magnetostatica $= \int \frac{1}{2} \underline{B} \cdot \underline{H} \, dV = \int \frac{1}{2\mu} B^2 dV =$

$$= \int \frac{1}{2\mu_0} B_0^2 dV - \int_V \frac{1}{2\mu_0} B_0^2 dV + \int_V \frac{1}{2\mu_0\mu_r} B^2 dV =$$

$$= \text{costante} - \left(1 - \frac{1}{\mu_r}\right) \int_V \frac{1}{2\mu_0} B_0^2 dV \simeq$$

$$\simeq \text{costante} - \left(1 - \frac{1}{\mu_r}\right) \frac{1}{2\mu_0} V \langle B_0^2 \rangle$$

avendo usato $H = \frac{B}{\mu}$ e $B = B_0$ per continuità ($\underline{B}$ normale conservato)

$$\langle B_0^2 \rangle = \frac{1}{V} \int_V B_0^2 dV$$

la forza $\underline{F}$ vale

$$\underline{F} = -\underline{\nabla}\, U \simeq \left(1-\frac{1}{\mu_r}\right)\frac{V}{2\mu_0}\,\underline{\nabla}\langle B_0^2\rangle$$

poiché $\langle B_0^2\rangle$ diminuisce allontanandosi dal dipolo

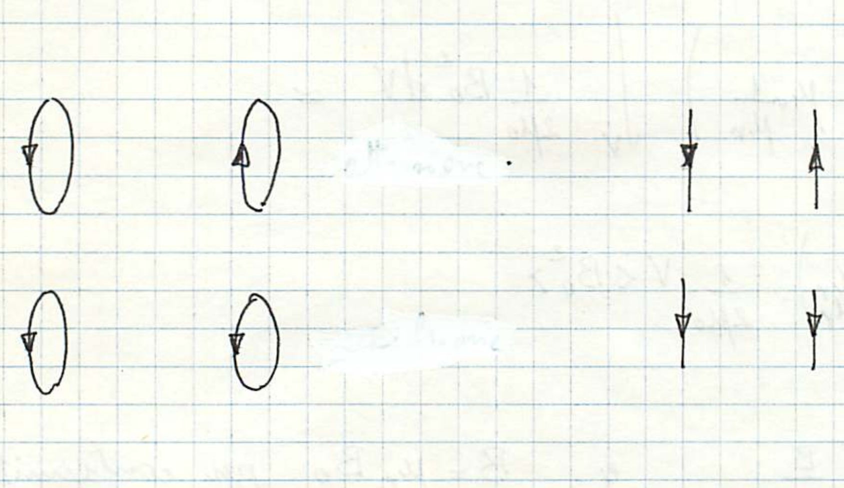
$\underline{\nabla}\langle B_0^2\rangle$ è negativo (attrattivo)

per materiali diamagnetici $\chi<0$ $(\mu_r<1)$

$\underline{F}$ risulta repulsiva (correnti indotte opposte ad I) $\mu_r=1+\chi$

per materiali paramagnetici $\chi>0$ $(\mu_r>1)$

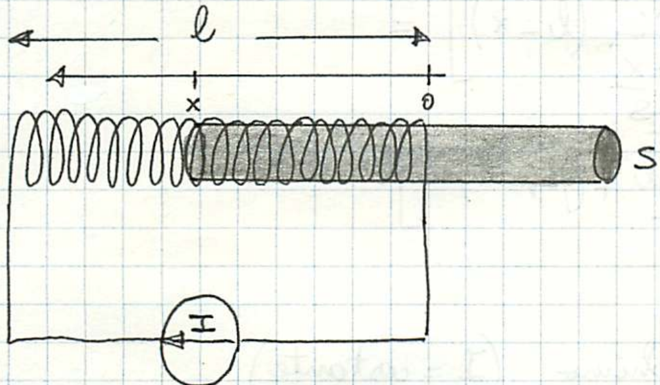
$\underline{F}$ risulta attrattiva (correnti indotte concordi ad I)



repulsione

attrazione

Un solenoide di lunghezza $l = 10$ cm è costituito da $N = 1000$ spire di area $S = 1$ cm^2 percorse da corrente $I = 1$ A. Nel solenoide viene inserito un nucleo di ferro dolce $\mu_r = 1000$. Calcolare la forza con cui il nucleo viene risucchiato dentro il solenoide. ?



Si consideri la configurazione con il nucleo di ferro penetrato per un tratto x.

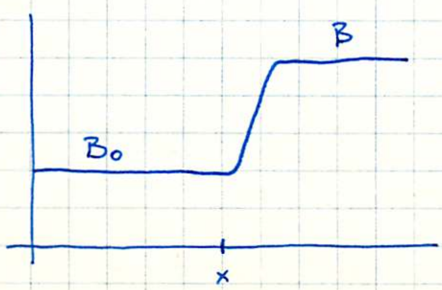
Detti B, H e $B_0 H_0$ i campi nel ferro e nel solenoide vuoto, si ha:

$$H = H_0 = \frac{NI}{l}$$

$$\left(\underline{\nabla} \times \underline{H} = \underline{J}\right)$$

$$H_0 = \frac{B_0}{\mu_0} \qquad H = \frac{B}{\mu_0 \mu_r} \qquad B_0 = \mu_0 \frac{N}{l} I$$

$$B = \mu_0 \mu_r \frac{N}{l} I$$



l'energia magnetica vale:

$$U_m = \int \frac{1}{2}\underline{B}\cdot\underline{H}\, dV = \frac{1}{2} H S \left[B x + B_0 (l - x) \right] =$$

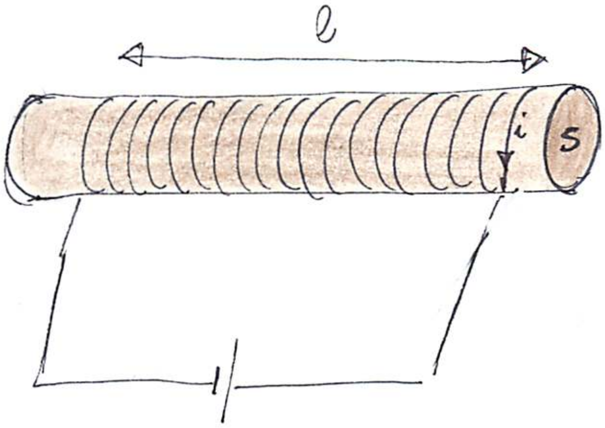
$$= \frac{1}{2} S \left(\frac{NI}{l}\right)^2 \mu_0 \left[\mu_r x + (l - x) \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\mu_0 S N^2 I^2}{l^2} \left[l + (\mu_r - 1) x \right]$$

Poiché il sistema non è chiuso (I = costante)

$$F(x) = + \frac{\partial U_m}{\partial x} = \frac{1}{2} \mu_0 (\mu_r - 1) \frac{S N^2 I^2}{l^2} = 6.28\ N$$

Una molla a spirale è avolta su un nucleo ferromagnetico ($\mu_r = 1000$). Esso è formato da $N = 250$ spire, è lunga $l_0 = 0.5\ m$ ed ha una sezione $S = 4\ cm^2$. Se la sua costante elastica è $K = 98\ \frac{N}{m}$ di quanto si accorcia quando è percorsa da una corrente $i = 1\ A$?



quando la molla è lunga l la sua energia potenziale elastica vale:

$$U_{el} = \frac{1}{2} K (l - l_0)^2$$

per una variazione dl di l si ha

$$dU_{el} = K (l - l_0)\, dl$$

Una variazione dl di l causa la variazione di energia magnetica immagazzinata

$$U_m = \frac{1}{2} i^2 L \quad \Rightarrow \quad dU_m = \frac{1}{2} i^2 dL$$

essendo L il coefficiente di autoinduzione

alternatively: $U_m = \int \frac{1}{2} \underline{B} \cdot \underline{H}\, dV = \frac{1}{2} S l\, H^2 \mu_0 \mu_r = \frac{1}{2} S l\, \mu_0 \mu_r \left(\frac{N}{l} i\right)^2$

ed un lavoro del generatore che mantiene la corrente i costante

$dW = i\, dV$

ma $V = -\frac{d}{dt}\phi(B) = -\frac{d}{dt}(Li) = -\frac{dL}{dt} i$ $\quad$ (a $i =$ cost.)

quindi $dV = -i\, dL$

$dW = -i^2 d L =$

all'equilibrio:

$d\mathcal{U}_{el} + d\mathcal{U}_{m} + dW = 0 \Rightarrow d\mathcal{U}_{el} - d\mathcal{U}_{m} = 0$

calcolo di L : $\phi(B) = NSB = S\frac{\mu N^2 i}{\ell}$ $\quad L = \frac{\mu N^2 S}{\ell}$

$dL = -\frac{\mu NS}{\ell^2} d\ell$

$k(\ell - \ell_0)\, d\ell + \frac{\mu N^2 S i^2}{2\ell^2} d\ell = 0$

per $\ell - \ell_0 \ll \ell_0$ $\quad \ell \approx \ell_0$

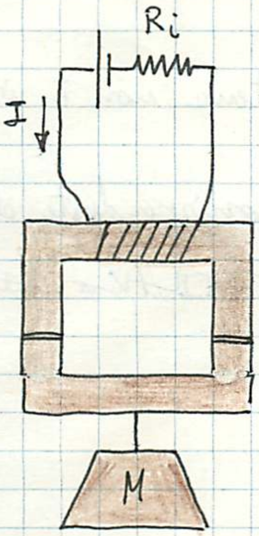
$\ell - \ell_0 \simeq -\frac{\mu_0 \mu_r S N^2 i^2}{2K\ell_0^2}$

il risultato $\ell - \ell_0 = 6.5\, 10^{-4}$ m giustifica l'approssimazione fatta.

(1)

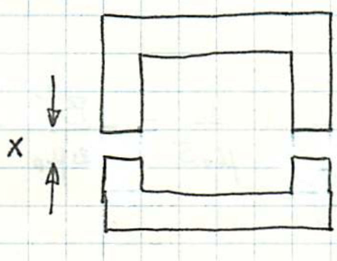
Una elettrocalamita deve sostenere un carico (àncora compresa) di massa $M = 1000$ Kg. Il nucleo ferromagnetico ($\mu_r = 1000$) ha lunghezza $d = 40$ cm e sezione quadrata $S = 36$ cm². Si dispone di un generatore di corrente continua I.

Qual'è il valore di I, se N è il numero di avvolgimenti, sufficiente a sostenere il carico?



Sia I la corrente nell'avvolgimento ed N il numero di spire

Per trovare la forza con cui due pezzi del nucleo ferromagnetico sono uniti li si consideri separati e distanza x



Detto H il campo magnetico nel nucleo ed H_0 quello nel vuoto, in assenza di flusso disperso si ha:

$$d H + 2 x H_0 = N I$$

Poichè la componente normale di B si conserva e B è normale

$$B = B_0 \qquad H_0 = \frac{B_0}{\mu_0} \qquad H = \frac{B}{\mu_0 \mu_r}$$

quindi $B = B_0 = \dfrac{NI}{\dfrac{d}{\mu_0\mu_r} + \dfrac{2x}{\mu_0}}$

l'energia magnetica associata a questa configurazione vale:

$$\mathcal{U} = \int \frac{1}{2}\, \underline{B}\cdot\underline{H}\, dV = \frac{1}{2} BH\, dS + \frac{1}{2} B_0 H_0\, 2xS = \frac{S}{2}\left(\frac{B^2 d}{\mu_0\mu_r} + B_0^2\frac{2x}{\mu_0}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(NI)^2}{\dfrac{d}{\mu_0\mu_r S} + \dfrac{2x}{\mu_0 S}} \qquad = \frac{S}{2} B_0^2\left(\frac{d}{\mu_0\mu_r} + \frac{2x}{\mu_0}\right)$$

la forza magnetica è $F = +\dfrac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}$ (il sistema non è isolato

il generatore fornisce l'energia $\mathcal{U}_{gen}$ corrispondente al magnete immerso nel proprio stesso campo*: $\cancel{d\mathcal{U}_g = NI\,dV = -NI\,d\phi(B)}$

$$\mathcal{U}_{gen} = -NI\,\phi(\underline{B}) = -NI\,\frac{NI}{\dfrac{d}{\mu_0\mu_r} + \dfrac{2x}{\mu_0}}\,S = -2\,\mathcal{U}$$

l'energia totale è quindi $\mathcal{U} + \mathcal{U}_{gen} = -\mathcal{U}$ cioè $F = +\dfrac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}$)

$$F(x) = -\frac{(NI)^2}{\left(\dfrac{d}{\mu_0\mu_r S} + \dfrac{2x}{\mu_0 S}\right)^2}\,\frac{1}{\mu_0 S} = -\frac{B^2}{2\mu_0}\,2S$$

* $\dfrac{1}{N}\, d\mathcal{U}_{gen} = -d\underline{m}\cdot\underline{B}$

$= -\frac{1}{2}\,\underline{r}\times d\underline{l}\; JS\cdot\underline{B}$

$= -\,dAB\; JS$

$= -\,I\,d\phi(B)$

o anche

$d\mathcal{U}_{gen} = +I\,dV$ (tensione)

$= -\,I\,d\phi(B)$

Faraday-Neumann-Lenz

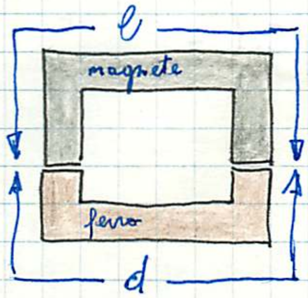
per $x = 0$

$$F(0) = -\frac{(NI)^2}{\left(\dfrac{d}{\mu_r}\right)^2}\,\mu_0 S \qquad |F(0)| > Mg$$

$$I > \sqrt{\frac{Mg}{\mu_0 S}}\cdot\left(\frac{d}{N\mu_r}\right)$$

Un magnete permanente di lunghezza $l = 50\ cm$, sezione $S = 36\ cm^2$ magnetizzazione $M = 4.0\ 10^5\ A\,m^{-1}$ costante di forma semitoroidale è connesso ad un nucleo ferromagnetico $\mu_r = 700$ anch'esso di forma semitoroidale e lunghezza $d = 40\ cm$. Si calcoli la forza con cui il nucleo è attratto dal magnete

---



Per una distanza x tra magnete e ferromagnete si ha:

$$B = B_0 = B_f$$

$$H\,l + H_0\,2x + H_f\,d = 0$$

dove $H = \dfrac{B}{\mu_0} - M$ è il campo nel magnete

$H_0 = \dfrac{B_0}{\mu_0}$ quello nel vuoto

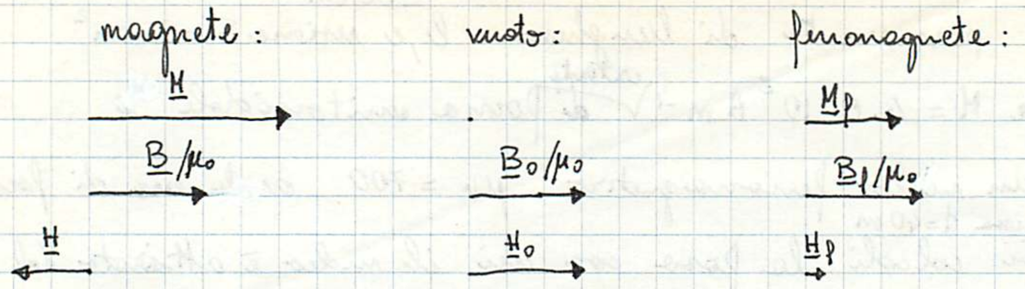
$H_f = \dfrac{B_f}{\mu_0 \mu_r}$ quello nel materiale ferromagnetico

$$\left(\frac{B}{\mu_0} - M\right) l + \frac{B}{\mu_0} 2x + \frac{B}{\mu_0 \mu_r} d = 0$$

$$B = B_0 = B_f = \frac{M l}{\dfrac{d}{\mu_0 \mu_r} + \dfrac{l}{\mu_0} + \dfrac{2x}{\mu_0}} = \mu_0 M \frac{l}{l + 2x + d/\mu_r}$$

$$H = \frac{B}{\mu_0} - M = -M \frac{2x + d/\mu_r}{l + \dfrac{d}{\mu_r} + 2x} \qquad H_0 = \frac{B_0}{\mu_0} = M \frac{l}{\dfrac{d}{\mu_r} + l + 2x}$$

$$H_f = \frac{B_f}{\mu_0 \mu_r} = M \frac{l/\mu_r}{\dfrac{d}{\mu_r} + l + 2x} \qquad M_f = (\mu_r - 1) H_f$$



$$\left(\frac{1}{\mu_0}\underline{B} = \underline{H} + \underline{M}\right)$$

Il magnete è isolato e la sua energia totale vale:

$$\mathcal{U} = -\frac{1}{2}\int d\underline{m} \cdot \underline{B}$$

$$\mathcal{U} = -\frac{1}{2}\int_V \underline{M} \cdot \underline{B}\, dV = -\frac{1}{2} M \ell S \frac{M\ell}{\frac{d}{\mu_0\mu_r} + \frac{2x}{\mu_0} + \frac{\ell}{\mu_0}}$$

equivalentemente si può interpretare il sistema aperto con sorgente di corrente $M\ell$ e scrivere $\mathcal{U} + \mathcal{U}_g = -\mathcal{U} = -\left(\frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} S d + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} S 2x + \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0\mu_r} S d\right) =$

$$= -\frac{1}{2}\frac{(M\ell)^2}{\frac{d}{\mu_0\mu_r S} + \frac{2x}{\mu_0 S} + \frac{\ell}{\mu_0 S}}$$

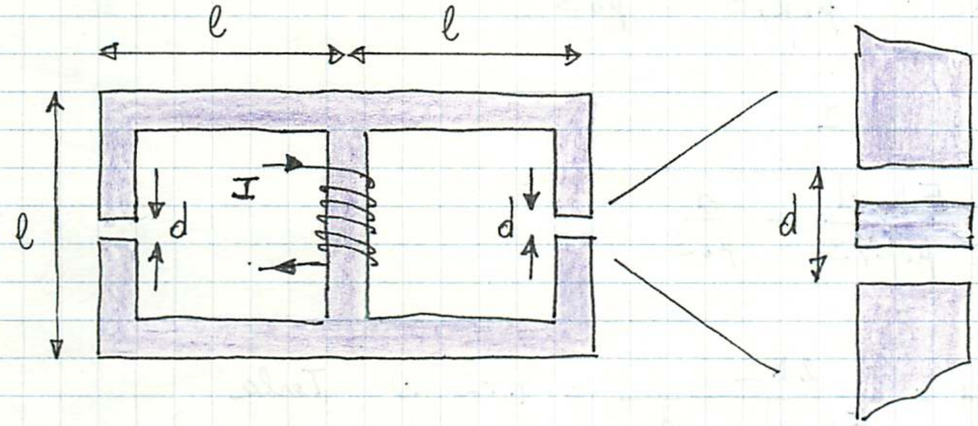
la forza è attrattiva:

$$F(x) = -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} = -\frac{(M\ell)^2}{\left(\frac{d}{\mu_0\mu_r S} + \frac{2x}{\mu_0 S} + \frac{\ell}{\mu_0 S}\right)^2}\frac{1}{\mu_0 S} = -\frac{B^2}{2\mu_0} 2S$$

$$F(0) = -\frac{(M\ell)^2}{\left(\frac{d}{\mu_0\mu_r S} + \frac{\ell}{\mu_0 S}\right)^2}\frac{1}{\mu_0 S} = -722.2\ \text{N}$$

Il circuito in figura ha sezione costante S ed è costituito da un materiale di permeabilità magnetica relativa $\mu_r = 750$. L'avvolgimento è costituito da $N = 1000$ spire percorse da corrente $I = 0.2$ A.
Si calcoli B nei traferri e nell'avvolgimento. In uno dei traferri viene inserito un pezzo di materiale. Si calcoli B nel traferro così modificato

---



$l = 10$ cm

$d = 1$ cm

$\delta = 0.5$ cm

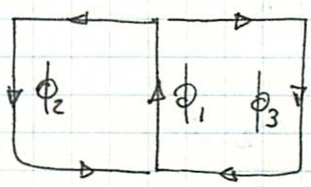
In approssimazione di flussi dispersi trascurabili per ogni maglia del circuito magnetico vale la legge di Hopkinson:

$$\sum I = \oint \underline{H} \cdot d\underline{l} = \int \frac{1}{\mu} \underline{B} \cdot d\underline{l} = \int \underline{B} \cdot \hat{n}\, S(l) \, \frac{dl}{\mu S(l)} = \phi \int \frac{dl}{\mu S(l)}$$

dove $\phi = \phi(\underline{B}) = \underline{B}(l) \cdot \hat{n}\, S(l) = \text{costante} \quad \left(\underline{\nabla} \cdot \underline{B} = 0 \right)$

$$\int \frac{dl}{\mu S(l)} \equiv R = \text{riluttanza}$$ associata al ramo considerato

Orientati i flussi ϕ_1 ϕ_2 e ϕ_3 come in figura si ha:



$$
\begin{cases}
\phi_1 = \phi_2 + \phi_3 \\
NI = \phi_1 \dfrac{l}{\mu_0 \mu_r S} + \phi_2 \left(\dfrac{3l - d}{\mu_0 \mu_r S} + \dfrac{d}{\mu_0 S} \right) \\
NI = \phi_1 \dfrac{l}{\mu_0 \mu_r S} + \phi_3 \left(\dfrac{3l - d}{\mu_0 \mu_r S} + \dfrac{d}{\mu_0 S} \right)
\end{cases}
$$

sommando le ultime 2 relazioni :

$$
2NI = \phi_1 \left(\frac{2l}{\mu_0 \mu_r S} + \frac{3l - d}{\mu_0 \mu_r S} + \frac{d}{\mu_0 S} \right)
$$

$$
\phi_2 = \phi_3 = \frac{1}{2} \phi_1 = \frac{1}{2} \frac{2NI}{\dfrac{5l - d}{\mu_0 \mu_r S} + \dfrac{d}{\mu_0 S}}
$$

$$
B_1 = B_{avvolgimento} = \frac{\phi_1}{S} = \frac{2NI}{\dfrac{5l - d}{\mu_0 \mu_r} + \dfrac{d}{\mu_0}} = 4.72 \; 10^{-2} \text{ Tesla}
$$

$$
B_2 = B_3 = B_{traferro} = \frac{1}{2} B_1 = 2.36 \; 10^{-2} \text{ Tesla.}
$$

Inserendo il pezzo di materiale nel traferro a destra si ha:

$$
\begin{cases}
\phi_1 = \phi_2 + \phi_3 \\
NI = \phi_1 \dfrac{l}{\mu_0 \mu_r S} + \phi_2 \left(\dfrac{3l - d}{\mu_0 \mu_r S} + \dfrac{d}{\mu_0 S} \right) \\
NI = \phi_1 \dfrac{l}{\mu_0 \mu_r S} + \phi_3 \left(\dfrac{3l - d + \delta}{\mu_0 \mu_r S} + \dfrac{d - \delta}{\mu_0 S} \right)
\end{cases}
$$

eliminando ϕ_2 :

$$\begin{cases} \phi_1 \left(\dfrac{4l-d}{\mu_0 \mu_r S} + \dfrac{d}{\mu_0 S} \right) - \phi_3 \left(\dfrac{3l-d}{\mu_0 \mu_r S} + \dfrac{d}{\mu_0 S} \right) = NI \\ \phi_1 \dfrac{l}{\mu_0 \mu_r S} + \phi_3 \left(\dfrac{3l-d+\delta}{\mu_0 \mu_r S} + \dfrac{d-\delta}{\mu_0 S} \right) = NI \end{cases}$$

posto $a = \dfrac{4l-d}{\mu_0 \mu_r} + \dfrac{d}{\mu_0}$ $\quad b = \dfrac{3l-d}{\mu_0 \mu_r} + \dfrac{d}{\mu_0}$

$c = \dfrac{l}{\mu_0 \mu_r}$ $\quad d = \dfrac{3l-d+\delta}{\mu_0 \mu_r} + \dfrac{d-\delta}{\mu_0}$

$$\begin{cases} \phi_1 a - \phi_3 b = NIS \\ \phi_1 c + \phi_3 d = NIS \end{cases}$$

$$\phi_3 = \frac{a-c}{ad+bc} NIS$$

$$B_3 = B_{\text{traferro modificato}} = \frac{\phi_3}{S} = NI \frac{a-c}{ad+bc} = 4.49\ 10^{-2} \text{ Tesla}$$

$a = 8371.55\ T^{-1} A$

$b = 8265.45\ T^{-1} A$

$c = 106.10\ T^{-1} A$

$d = 4291.89\ T^{-1} A$