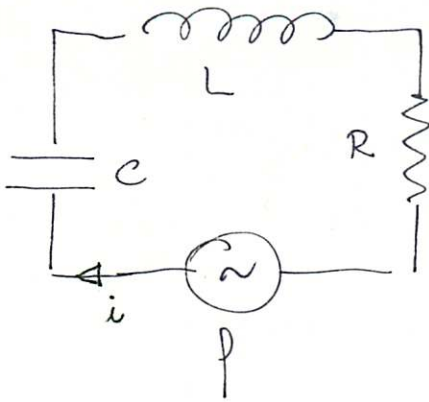


**CORRENTI
ALTERNATE**



$$p - L \frac{di}{dt} - V_c = Ri$$

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \frac{dp}{dt}$$

soluzione particolare per $p(t) = p_0 \cos \omega t$

poichè $p(t) = \text{Re} \{ e^{j\omega t} \}$ basta cercare la soluzione particolare

per $p = p_0 e^{j\omega t}$ e poi prendere la parte reale

si suppone $i(t) = i_0 e^{j(\omega t - \varphi)}$

$$\left((j\omega)^2 L + R j\omega + \frac{1}{C} \right) i_0 e^{j(\omega t - \varphi)} = j\omega p_0 e^{j\omega t}$$

$$j\omega i_0 e^{j\omega t} \left(j\omega L + R + \frac{1}{j\omega C} \right) e^{-j\varphi} = j\omega p_0 e^{j\omega t}$$

$$j\omega i_0 e^{j\omega t} \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} e^{j \arctan \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right)} e^{-j\varphi} = j\omega p_0 e^{j\omega t}$$

$$i_0 = \frac{p_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$\tan \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

$$i(t) = i_0 \cos(\omega t - \varphi)$$

soluzione omogenea

$$L \alpha^2 + R \alpha + \frac{1}{C} = 0$$

$$\alpha^{\pm} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4 \frac{L}{C}}}{2L}$$

$$i(t) = A^+ e^{\alpha^+ t} + A^- e^{\alpha^- t} + i_0 \cos(\omega t - \varphi)$$

1) se $R^2 - 4 \frac{L}{C} > 0$ $\alpha^+ < 0$ $\alpha^- < 0$ smorzamento

2) se $R^2 - 4 \frac{L}{C} = 0$ $\alpha^+ = \alpha^- = -\frac{R}{2L}$ soluz. critica $(A_1 + A_2 t) e^{\alpha t}$

3) se $R^2 - 4 \frac{L}{C} < 0$ $\alpha^+ e \alpha^- \in \mathbb{C}$ smorzamento oscillante

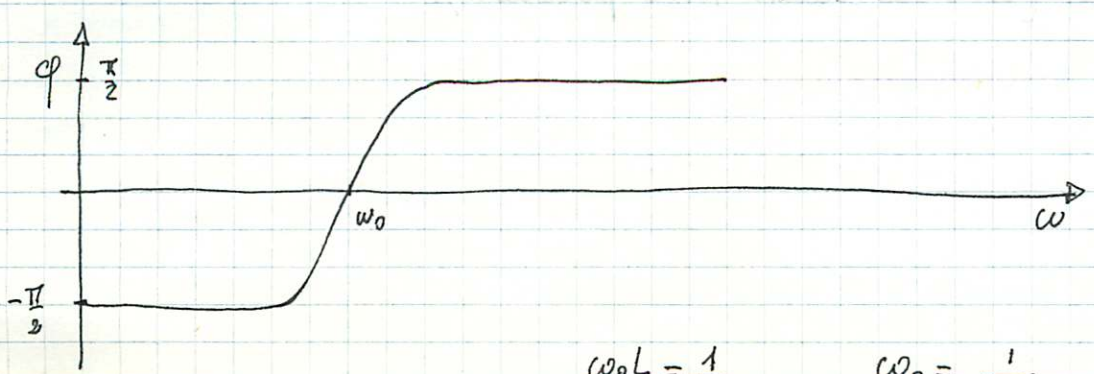
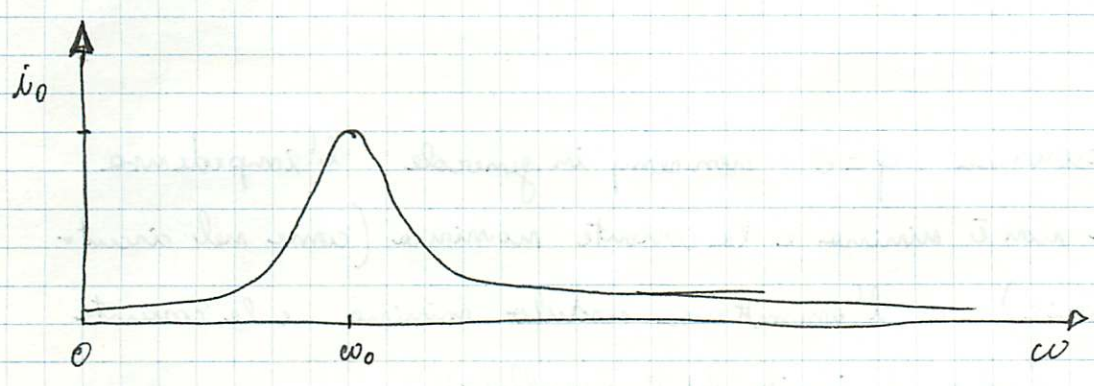
$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \quad \text{impedance}$$

$$i(t) = \frac{p(t)}{Z} = \frac{p_0 e^{j\omega t}}{|Z| e^{j\varphi}} = \frac{p_0}{|Z|} e^{j(\omega t - \varphi)}$$

$$= i_0 e^{j(\omega t - \varphi)}$$

$$i_0 = \frac{p_0}{|Z|} = \frac{p_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$\tan \varphi = \frac{\text{Im}\{Z\}}{\text{Re}\{Z\}} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$



$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Potenze assorbite:

$$P(t) = i(t) v(t) = \frac{I_0}{|Z|} \cos(\omega t - \varphi) \cdot I_0 \cos \omega t =$$
$$= \frac{I_0^2}{|Z|} \left(\cos^2 \omega t \cos \varphi + \sin \omega t \cos \omega t \sin \varphi \right)$$

$$\bar{P} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} P(t) dt = \frac{\omega}{2\pi} \frac{I_0^2}{|Z|} \left(\frac{1}{2} \frac{2\pi}{\omega} \cos \varphi + 0 \sin \varphi \right) =$$
$$= \frac{1}{2} \frac{I_0^2}{|Z|} \cos \varphi = i_{\text{eff}} v_{\text{eff}} \cos \varphi \quad (\text{Giulio Ferraris})$$

la potenza media assorbita è massima a $\varphi = 0$

$\varphi = 0$ ($\text{Im}\{Z\} = 0$, reattanza nulla) si chiama condizione di risonanza

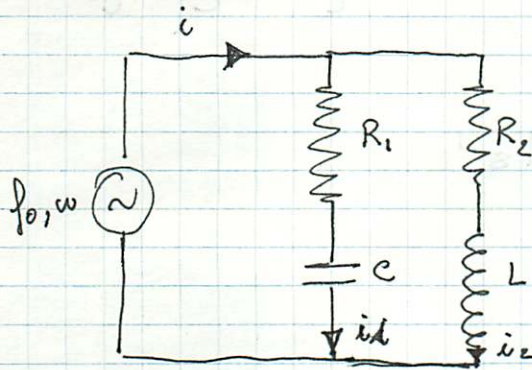
NB: alla risonanza $\varphi = 0$ in generale l'impedenza modulo non è minima e la corrente massima (come nel circuito RLC serie) o l'ammettanza modulo minima e la corrente minima (come nel circuito RLC parallelo).

Un generatore di f.e.m. alternata $f = f_0 \cos(\omega t)$ $f_0 = 2V$

$\omega = 500 \text{ rad s}^{-1}$ è chiuso nel circuito mostrato in figura dove

$$R_1 = 13 \Omega \quad R_2 = 5 \Omega \quad L = 30 \text{ mH} \quad C = 40 \mu\text{F}$$

Si calcoli la corrente in ciascun ramo e la pulsazione di risonanza ω^*



Se $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$ la corrente nel ramo del generatore; risulta

$$i(t) = i_0 \cos(\omega t - \varphi) \quad i_1(t) = i_{01} \cos(\omega t - \varphi_1) \quad i_2(t) = i_{02} \cos(\omega t - \varphi_2)$$

$$i_0 = \frac{f_0}{|Z|} \quad \tan \varphi = \frac{\text{Im}\{Z\}}{\text{Re}\{Z\}} \quad i(t) = \text{Re} \left\{ \frac{p(t)}{Z} \right\} = \text{Re} \left\{ \frac{f_0 e^{i\omega t}}{|Z| e^{i\varphi}} \right\} = \frac{f_0}{|Z|} \cos(\omega t - \varphi)$$

dove

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \quad Z_1 = R_1 + \frac{1}{j\omega C} \quad Z_2 = R_2 + j\omega L$$

$$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{(R_1 - j\frac{1}{\omega C})(R_2 + j\omega L)}{R_1 + R_2 + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} = \frac{R_1 R_2 + \frac{L}{C} + j(\omega R_1 L - \frac{R_2}{\omega C})}{R_1 + R_2 + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})}$$

$$= \frac{(R_1 R_2 + \frac{L}{C})(R_1 + R_2) + (\omega R_1 L - \frac{R_2}{\omega C})(\omega L - \frac{1}{\omega C}) + j \left[(R_1 R_2 + \frac{L}{C})(\omega L - \frac{1}{\omega C}) + (\omega R_1 L - \frac{R_2}{\omega C}) \cdot (R_1 + R_2) \right]}{(R_1 + R_2)^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$$

alla risonanza (i in fase con p cioè $\text{Im}\{Z\} = 0$):

$$(R_1 + R_2) \left(\omega^* R_1 L - \frac{R_2}{\omega^* C} \right) - \left(R_1 R_2 + \frac{L}{C} \right) \left(\omega^* L - \frac{1}{\omega^* C} \right) = 0$$

$$\omega^{*2} \left(R_1 L (R_1 + R_2) - R_1 R_2 L - \frac{L^2}{C} \right) = (R_1 + R_2) \frac{R_2}{C} - \frac{R_1 R_2}{C} - \frac{L}{C^2}$$

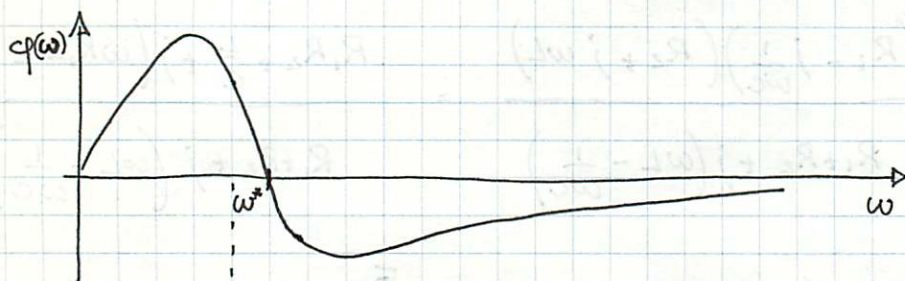
$$\omega^* = \sqrt{\frac{\frac{1}{LC} \frac{L}{C} - R_2^2}{\frac{1}{LC} \frac{L}{C} - R_1^2}} = 1020 \text{ rad s}^{-1}$$

$$i_1 = \frac{p}{Z_1} \quad i_{01} = \frac{p_0}{|Z_1|} = \frac{p_0}{\sqrt{R_1^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}}$$

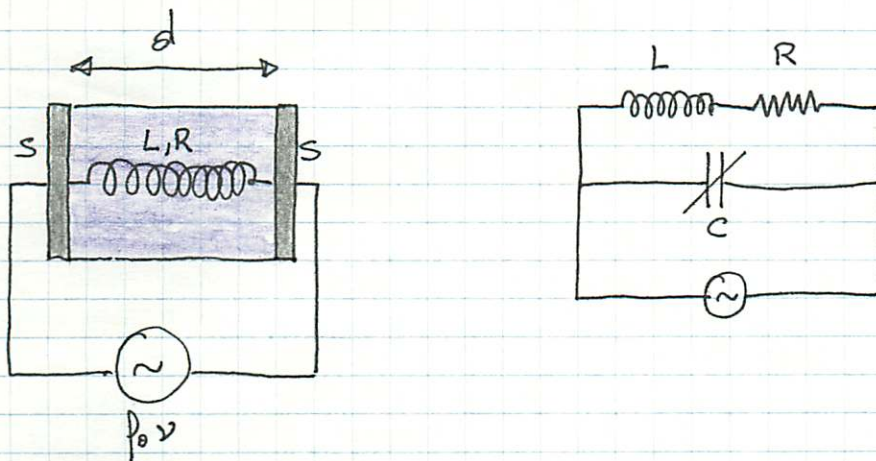
$$\varphi_1 = \frac{\text{Im}\{Z_1\}}{\text{Re}\{Z_1\}} = \frac{1}{\omega R_1 C}$$

$$i_2 = \frac{p}{Z_2} \quad i_{02} = \frac{p_0}{|Z_2|} = \frac{p_0}{\sqrt{R_2^2 + \omega^2 L^2}}$$

$$\varphi_2 = \frac{\text{Im}\{Z_2\}}{\text{Re}\{Z_2\}} = \frac{\omega L}{R_2}$$



Un avvolgimento avente induttanza $L = 800 \text{ mH}$ e resistenza $R = 10 \Omega$ è connesso tra due dischi metallici paralleli di area $S = 300 \text{ cm}^2$ immersi in un liquido isolante di costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 2.5$. I dischi sono connessi ad un generatore di f.e.m. alternata di frequenza $\nu = 10^4 \text{ Hz}$. Quale deve essere la distanza d tra i dischi affinché il circuito sia anti risonante?



Il sistema è equivalente ad un circuito LRC parallelo con C variabile

$$C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{d}$$

l'ammittanza del circuito è $Y = Z^{-1}$

$$\frac{1}{Z} = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{(1 - \omega^2 LC) + j\omega RC}{R + j\omega L} =$$

$$= \frac{(1 - \omega^2 LC)R - \omega^2 RLC + j[-(1 - \omega^2 LC)\omega L + \omega R^2 C]}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

l'ammittanza (impedenza) è reale (risonanza) se

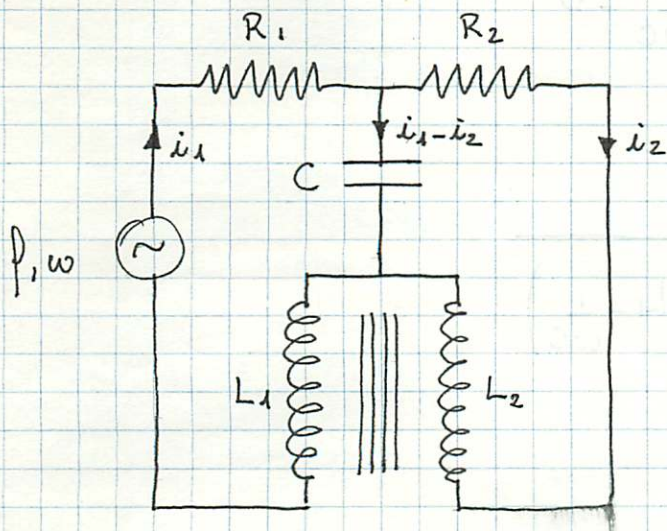
$$\cancel{\omega R^2 C} - \cancel{\omega L} (1 - \omega^2 LC) = 0$$

$$R^2 C + \omega^2 L^2 C = L$$

$$C = \frac{L}{R^2 + \omega^2 L^2}$$

$$d = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{C} = \epsilon_0 \epsilon_r S \frac{R^2 + (\omega L)^2}{L} = 2.097 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Nel circuito mostrato in figura si ha $P_{eff} = 500 \text{ W}$, $R_1 = 200 \Omega$, $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$, $C = 1 \mu\text{F}$, $L_1 = 40 \text{ mH}$, $L_2 = 10 \text{ mH}$, e la frequenza del generatore è $\omega = (L_2 C)^{-\frac{1}{2}}$ e $M = \sqrt{L_1 L_2}$ (trasformatore ideale).
 Si calcoli l'intensità efficace e lo sfasamento delle correnti erogate dal generatore.



Detta i_1 ed i_2 le correnti nei rami delle resistenze R_1 e R_2 e induttanze $R_1 L_1$, $R_2 L_2$ in regime stazionario si ha:

$$\begin{cases} P - j\omega L_1 i_1 - j\omega M i_2 - \frac{1}{j\omega C} (i_1 - i_2) = R_1 i_1 \\ -j\omega L_2 i_2 - j\omega M i_1 + \frac{1}{j\omega C} (i_1 - i_2) = R_2 i_2 \end{cases}$$

che è un sistema di 2 eq. per le due incognite i_1 ed i_2

$$\begin{cases} i_1 \left[R_1 + j \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C} \right) \right] + i_2 j \left(\omega M + \frac{1}{\omega C} \right) = P \\ i_1 j \left(\omega M + \frac{1}{\omega C} \right) + i_2 \left[R_2 + j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C} \right) \right] = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione è:

$$i_1 = \frac{j \left[R_2 + j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C} \right) \right]}{\left[R_1 + j \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C} \right) \right] \left[R_2 + j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C} \right) \right] + \left(\omega M + \frac{1}{\omega C} \right)^2}$$

pour le $\omega = \frac{1}{\sqrt{L_2 C}} \quad \omega L_2 - \frac{1}{\omega C} = 0$

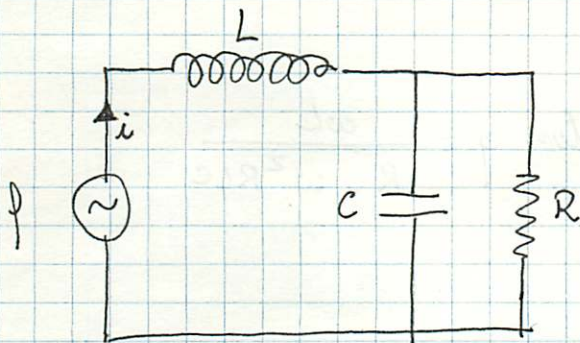
$$i_1 = j \frac{1}{\left[R_1 + \frac{1}{R_2} \left(\omega M + \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right] + j \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C} \right)}$$

$$i_{1 \text{ eff}} = |i_{\text{eff}}| = \frac{1}{\sqrt{\left[R_1 + \frac{1}{R_2} \left(\omega M + \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right]^2 + \left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C} \right)^2}} = 1.20 \text{ A}$$

$$\tan \varphi_1 = \frac{\omega L_1 - \frac{1}{\omega C}}{R_1 + \frac{1}{R_2} \left(\omega M + \frac{1}{\omega C} \right)^2} \quad \varphi_1 = 0.80 \text{ rad}$$

Nel circuito in figura la f.e.m. vale $f(t) = f_1 + f_0 \sin \omega t$.

Si calcoli rapporto $x(t)$ tra le componenti alternate e quelle costanti della d.d.p. ai capi delle resistenze in condizioni di regime



Per la linearità delle equazioni circuitali le grandezze ottenute con sorgente $f(t) = f_1 + f_0 \sin \omega t$ sono la somma di quelle ottenute separatamente con sorgenti f_1 e $f_0 \sin \omega t$.

Sia $f(t) = f_0 \sin \omega t$

dette $v(t)$ la d.d.p. ai capi di R e C si ha:

$$v(t) = i(t) Z_{RC} = \frac{f(t)}{Z} Z_{RC}$$

$$\text{dove } Z_{RC} = \left(\frac{1}{R} + j\omega C \right)^{-1} = \frac{R}{1 + j\omega RC}$$

$$Z = j\omega L + Z_{RC} = \frac{R + j\omega L(1 + j\omega RC)}{1 + j\omega RC}$$

$$v(t) = f(t) \frac{R}{R - \omega^2 RLC + j\omega L} =$$

$$= f(t) \frac{R e^{-i\varphi}}{\sqrt{(R - \omega^2 RLC)^2 + \omega^2 R^2 L^2}}$$

$$\tan \varphi = \frac{\omega L}{R - \omega^2 RLC}$$

$$V_{\text{eff}}(t) = \frac{p_0 R}{\sqrt{(R - \omega^2 RLC)^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t - \varphi)$$

prendendo il limite delle espressioni

$$v(t) = p(t) \frac{R e^{-i\varphi}}{\sqrt{(R - \omega^2 RLC)^2 + \omega^2 L^2}} \quad \tan \varphi = \frac{\omega L}{R - \omega^2 RLC}$$

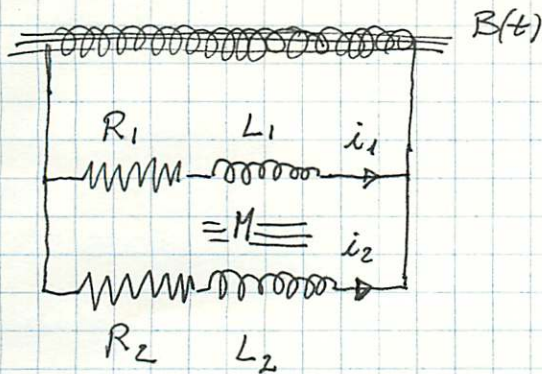
per $\omega \rightarrow 0$ si ha

$$V_{\text{cost}} = \frac{p_1 R}{R} e^{-i\varphi} = p_1 \quad \varphi = 0$$

$$x(t) = \frac{V_{\text{cost}}}{V_{\text{eff}}(t)} = \frac{p_0}{p_1} \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 \left(\frac{L}{R}\right)^2}} \sin(\omega t - \varphi)$$

$$x_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \max |x(t)| = \frac{p_0}{\sqrt{2} p_1} \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 \left(\frac{L}{R}\right)^2}}$$

Nel circuito in figura l'avvolgimento è immerso in un campo magnetico di prova dal valore 0 ad un valore costante $B > 0$ in un intervallo di tempo Δt^* . Si calcoli il rapporto tra le cariche q_1, q_2 che attraversano le resistenze R_1, R_2 nell'intervallo di tempo $\Delta t \gg \Delta t^*$.



Dette i_1 ed i_2 le correnti nei due rami di R_1 ed R_2 la legge II di Kirchhoff applicata al circuito formato da questi due rami dà:

$$-L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt} - \left(-L_2 \frac{di_2}{dt} \right) - \left(-M \frac{di_1}{dt} \right) = R_1 i_1 - R_2 i_2$$

$$i_1 R_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

integrando membro a membro tra $t=0$ e $t=\infty$

$$R_1 q_1 + L_1 \Delta i_1 + M \Delta i_2 = R_2 q_2 + L_2 \Delta i_2 + M \Delta i_1$$

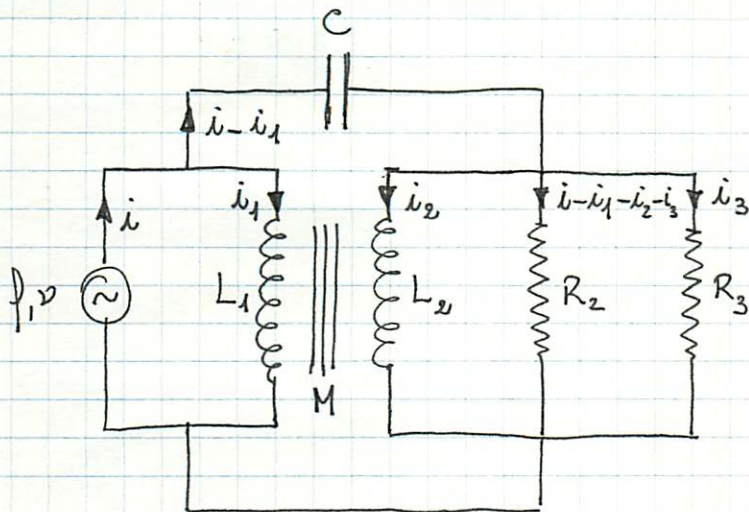
$$\Delta i_1 = i_1(\infty) - i_1(0) = 0 - 0 = 0$$

$$\Delta i_2 = 0$$

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

Nel circuito in figura si ha $V_{eff} = 220\text{ V}$, $\nu = 50\text{ Hz}$, $R_2 = 2\text{ k}\Omega$
 $R_3 = 40\text{ k}\Omega$, $C = 1\text{ }\mu\text{F}$, $L_1 = 400\text{ mH}$, $L_2 = 1\text{ mH}$, $M = \sqrt{L_1 L_2}$.

Si calcoli la tensione efficace ai capi di R_3



Detta i , i_1 , i_2 , i_3
 le correnti nel generatore
 in L_1 , L_2 e R_3 , in regime
 stazionario si ha:

$$\begin{cases} \varphi - j\omega L_1 i_1 - j\omega M i_2 = 0 \\ \varphi - \frac{1}{j\omega C} (i - i_1) = (i - i_1 - i_2) \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = V_3 \\ -j\omega L_2 i_2 - j\omega M i_1 = - (i - i_1 - i_2) \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = -V_3 \end{cases}$$

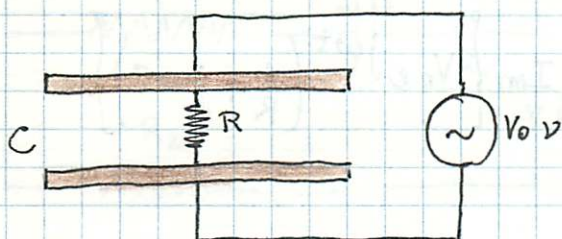
$$V_3 = j\omega L_2 i_2 + j\omega M i_1 = \frac{L_2}{M} j\omega M i_2 + j\omega M i_1 =$$

$$= \frac{L_2}{M} (\varphi - j\omega L_1 i_1) + j\omega M i_1 = \frac{L_2}{M} \varphi - j\omega \frac{L_2 L_1}{M} i_1 + j\omega M i_1 =$$

$$= \varphi \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}$$

$$V_{3eff} = V_{eff} \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = 11\text{ V}$$

Un condensatore ad aria ($\epsilon_r = 1$) ha armature costituite da due dischi di raggio $r = 30$ cm distanti $d = 3$ cm. I centri della due dischi sono connessi da una resistenza $R = 750 \Omega$ e ad essi è applicata una f.e.m. sinusoidale di ampiezza $V_0 = 15$ V e frequenza $\nu = 6$ MHz. Si trovino le espressioni analitiche e si calcolino le i valori delle intensità efficaci della corrente di spostamento, di conduzione, complessiva trascurando gli effetti ai bordi.



Trascurando gli effetti ai bordi il campo \underline{E} è ortogonale ai dischi e costante dentro al condensatore (nulla fuori)

$$E = E_0 \sin(2\pi\nu t) = \frac{V_0}{d} \sin(2\pi\nu t)$$

$$D = \epsilon_0 E = \frac{\epsilon_0 V_0}{d} \sin(2\pi\nu t)$$

la densità di corrente di spostamento è $\underline{J}_D = \frac{\partial D}{\partial t}$

$$I_D(t) = J_D \cdot \pi r^2 = 2\pi\nu \frac{\epsilon_0 V_0}{d} \cos(2\pi\nu t) \cdot \pi r^2 = \omega C V_0 \cos(\omega t)$$

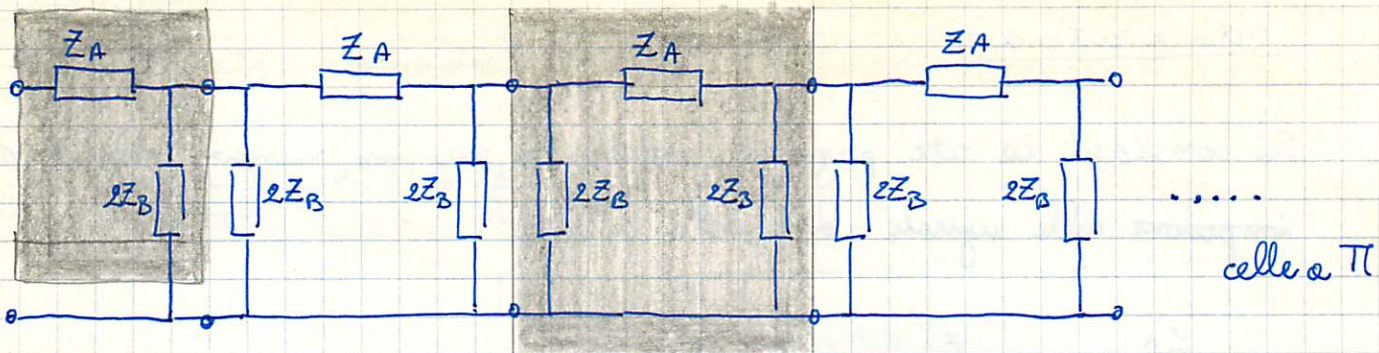
$$I_D^{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \max [I_D(t)] = \sqrt{\nu \int_0^{\frac{1}{\nu}} I_D(t)^2 dt} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2\pi\nu \epsilon_0 V_0 \pi r^2}{d} = 33 \text{ mA}$$

$$I_c(t) = \frac{V_0}{R} \sin(2\pi\nu t) \quad I_c^{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{V_0}{R} = 14 \text{ mA}$$

$$I(t) = I_D(t) + I_c(t) = \omega C V_0 \cos(\omega t) + \frac{V_0}{R} \sin(\omega t)$$

$$I^{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{2} (\omega C V_0)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{V_0}{R}\right)^2} = V^{\text{eff}} \sqrt{\omega^2 C^2 + \frac{1}{R^2}} = 36 \text{ mA}$$

$$I \rightarrow I_T - I_T$$



si chiama impedenza delle rete di celle a π , Z_π , l'impedenza della rete ad eccezione delle impedenze iniziali Z_A e $2Z_B$:

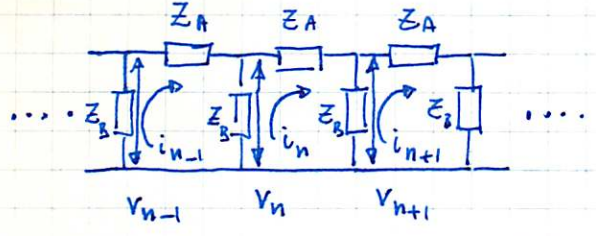
$$Z = Z_A + \left(\frac{1}{2Z_B} + \frac{1}{Z_\pi} \right)^{-1} \quad \text{cioè} \quad Z_\pi = \frac{(Z - Z_A) 2Z_B}{2Z_B - Z + Z_A}$$

$$\text{si noti che } Z_T \cdot Z_\pi = \left(Z - \frac{Z_A}{2} \right) \frac{\left(Z - \frac{Z_A}{2} \right) 2Z_B - Z_A Z_B}{2Z_B - Z + Z_A} =$$

$$= 2Z_B \frac{\left(Z - \frac{Z_A}{2} \right)^2 - 2 \left(Z - \frac{Z_A}{2} \right) \frac{Z_A}{4}}{2Z_B - Z + Z_A}$$

$$= 2Z_B \frac{\frac{Z_A^2}{4} + Z_A Z_B - \frac{Z_A}{2} \sqrt{\frac{Z_A^2}{4} + Z_A Z_B}}{2Z_B + \frac{Z_A}{2} - \sqrt{\frac{Z_A^2}{4} + Z_A Z_B}} = Z_A Z_B$$

Si riconsideri ora la rete originaria; si ha $V_n - V_{n+1} = i_n Z_A$



$$V_n = i_n Z$$

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{Z - Z_A}{Z} = \text{fattore di propagazione}$$

$$\frac{V_{n+p}}{V_n} = \left(\frac{Z - Z_A}{Z} \right)^p$$

esempio: $Z_A = j\omega L$ $Z_B = \frac{1}{j\omega C}$ $Z_T = \sqrt{-\frac{\omega^2 L^2}{4} + \frac{L}{C}}$

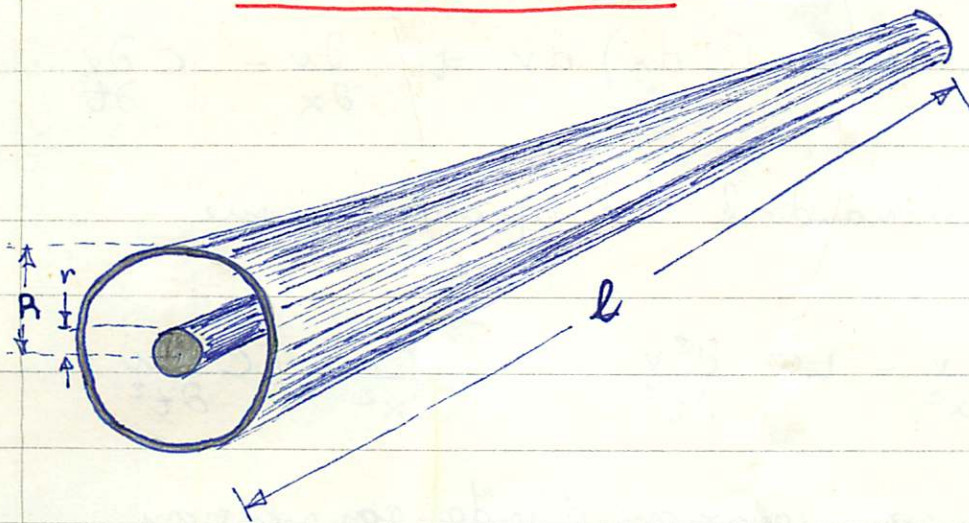
Z_T è reale per $\omega < \frac{2}{\sqrt{LC}}$ immaginario per $\omega > \frac{2}{\sqrt{LC}}$

$\omega = \frac{Z - Z_A}{Z} = \frac{Z_T - Z_A/2}{Z_T + Z_A/2}$ se $\omega < \frac{2}{\sqrt{LC}}$ $|\omega| = 1$ no smorzamento

se $\omega > \frac{2}{\sqrt{LC}}$ $|\omega| < 1$ smorzamento

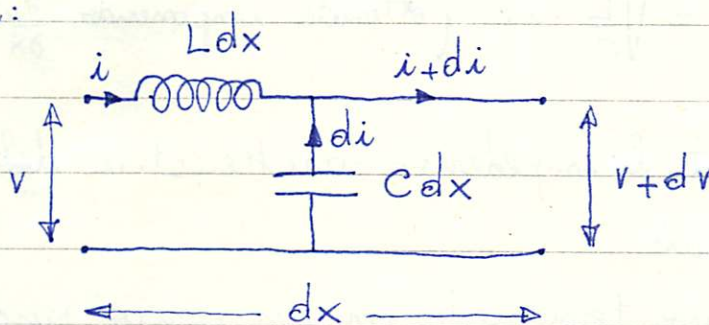
la rete è un filtro passa basso; scambiando C con L si ottiene un passa alto

CAVI COASSIALI



È un esempio di linea di ritardo a costanti distribuite; è caratterizzato da una induttanza L ed una capacità C per unità di lunghezza (nell'ipotesi di dielettrico perfetto e di superfici conduttrici perfette il cavo coassiale si comporta come una guida d'onde e non c'è energia dissipata).

Un tratto di lunghezza dx è schematizzabile così:



$$dv = - (L dx) \frac{\partial i}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = - L \frac{\partial i}{\partial t}$$

$$dq = C dx v \quad di = - \frac{dq}{dt} = -C dx \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$di \cdot dt = - (C dx) dv \Rightarrow \frac{\partial i}{\partial x} = -C \frac{\partial v}{\partial t}$$

Combinando le due equazioni segue

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad \text{o} \quad \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$$

Le sono equazioni d'onda con soluzioni del tipo $f(x \pm ut)$ purché la velocità u sia $u = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Un impulso e.m. viaggia (quasi) indistorto lungo il cavo coassiale impiegando un tempo (tempo di ritardo) per unità di lunghezza pari a $\tau = \sqrt{LC}$.

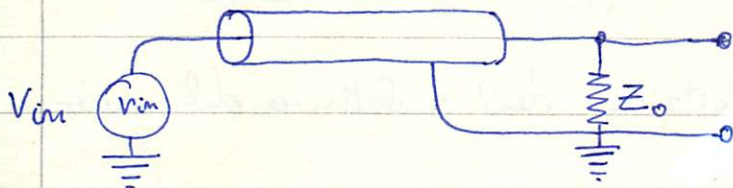
Le soluzioni ^{sinusoidale} v per la corrente e la tensione sono $i(t) = i_0 \sin(x - ut)$ $v = v_0 \sin(x - ut)$ con $v_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} i_0$ (ottenute imponendo $\frac{\partial i}{\partial x} = -C \frac{\partial v}{\partial t}$)

$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$ è l'impedenza caratteristica del cavo coassiale.

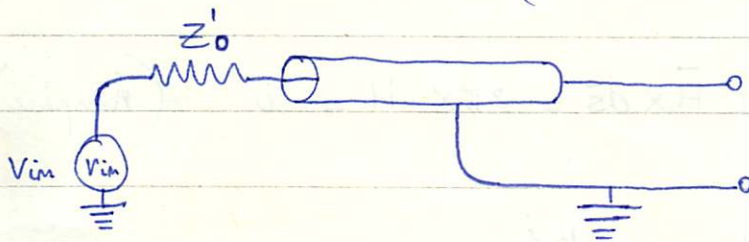
In un cavo terminato con un carico puramente resistivo pari a Z_0 non si hanno fenomeni di riflessione del segnale. (Dim.: la riflessione non si ha in un cavo infinitamente lungo;

per i teoremi sulle reti lineari un cavo finito terminato con impedenza Z_0 è equivalente ad un cavo infinitamente lungo).

Un cavo può essere terminato alla fine (se $r_{in} \approx 0$)

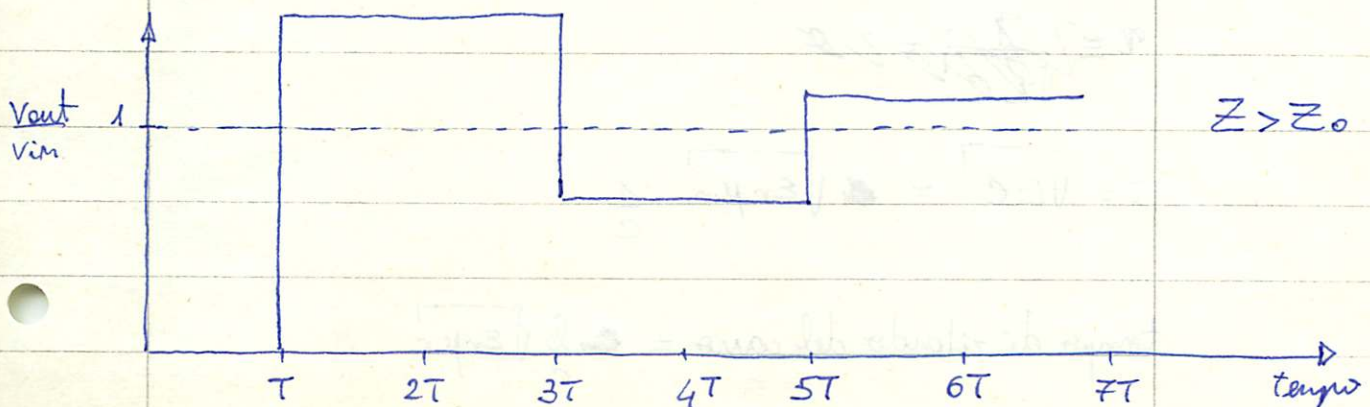
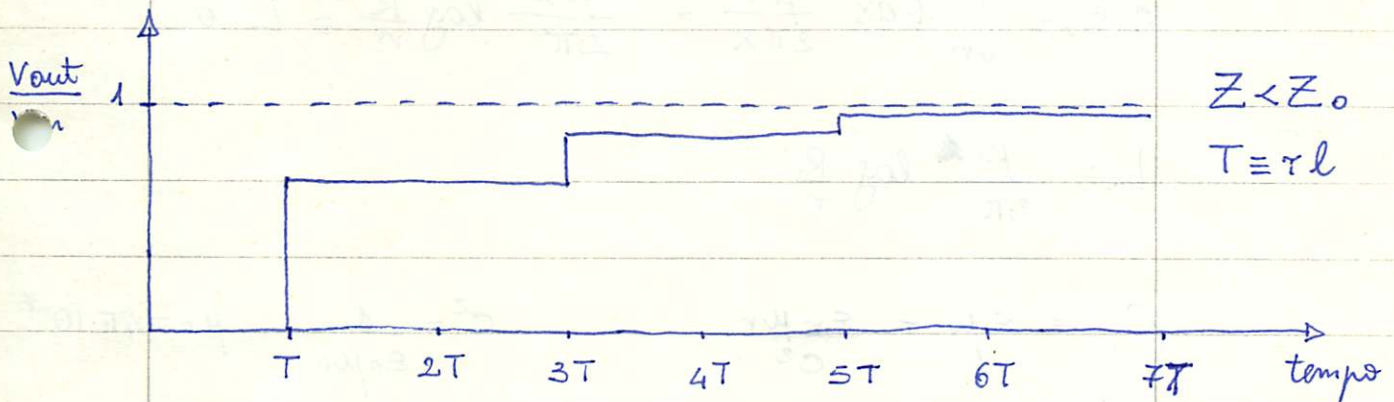


o all'inizio ~~indipendente~~ (per $r_{in} \neq 0$)



$$Z'_0 + r_{in} = Z_0$$

Ecco cosa succede se $Z \neq Z_0$



Calcolo di C (MKSA): $\oint \vec{D} = 2\pi x \cdot 1 \cdot D = q$ (Gauss)

$$E(x) = \frac{D(x)}{\epsilon} = \frac{q}{2\pi x \epsilon} = -\frac{dV}{dx}$$

$$\Delta V \equiv V(r) - V(R) = -\int_R^r dx \frac{q}{2\pi \epsilon x} = \frac{q}{2\pi \epsilon} \log \frac{R}{r}$$

$\epsilon =$ costante dielettrica del dielettrico del cavo.

$$C \equiv \frac{q}{\Delta V} = \frac{2\pi \epsilon}{\log \frac{R}{r}}$$

Calcolo di L (MKSA): $\oint \vec{H} \times d\vec{s} = 2\pi x \cdot H = i$ (Ampere)

$$B(x) = \mu H(x) = \frac{\mu i}{2\pi x}$$

$$\phi(B) = \int_r^R 1 \cdot dx \frac{\mu i}{2\pi x} = \frac{\mu i}{2\pi} \log \frac{R}{r} \equiv L i$$

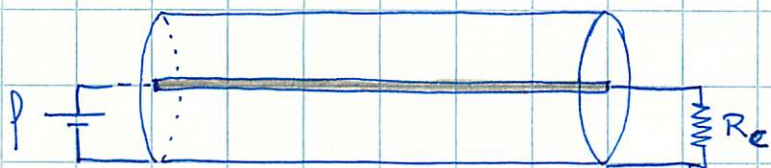
$$L = \frac{\mu}{2\pi} \log \frac{R}{r}$$

$$CL = \epsilon \mu = \frac{\epsilon_r \mu_r}{c^2}$$

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$$

$$\tau = \sqrt{LC} = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \frac{1}{c}$$

$$\text{tempo di ritardo del cavo} = \frac{l}{c} \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$$

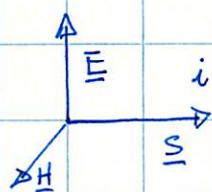


se il cavo è connesso ad una sorgente di f.e.m. costante \mathcal{E} e chiuso su un carico di resistenza R_c , i vettori \underline{E} ed \underline{H} sono:

\underline{E} radiale con $E(x) 2\pi x l = \sigma 2\pi r l / \epsilon_0 \epsilon_r$ $E(x) = \frac{\sigma r}{\epsilon_0 \epsilon_r}$
 essendo σ la densità di carica per unità di superficie sul conduttore centrale di raggio r . Dovendo essere $\mathcal{E} = \int \underline{E} \cdot d\underline{x} = \frac{\sigma r}{\epsilon_0 \epsilon_r} \ln\left(\frac{R}{r}\right)$

\underline{H} azimutale con $H(x) 2\pi x = i$ $H(x) = \frac{i}{2\pi x} = \frac{\mathcal{E}}{2\pi x R_c}$

il vettore di Poynting ha la direzione delle corrente



$$\underline{S} = \underline{E} \times \underline{H} \quad \text{con } S(x) = E(x) H(x) = \frac{\sigma r}{\epsilon_0 \epsilon_r} \frac{\mathcal{E}}{2\pi x R_c} = \frac{\sigma r}{2\pi R_c \epsilon_0 \epsilon_r}$$

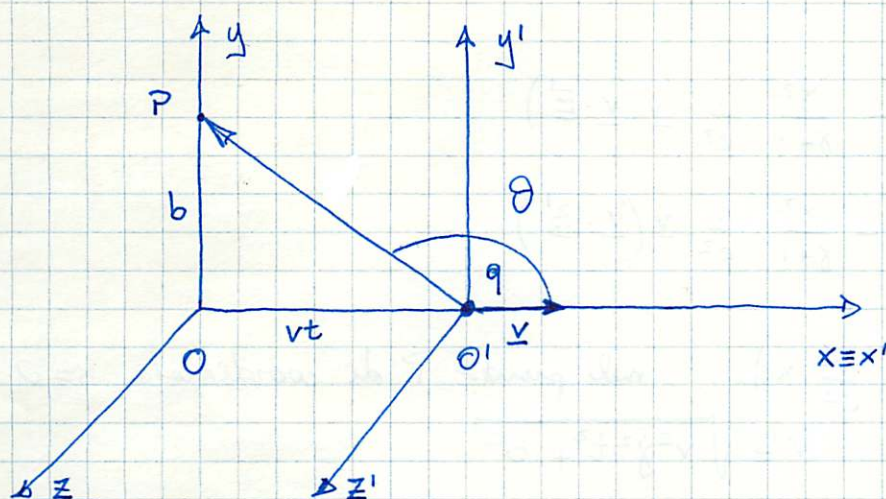
La potenza trasportata dal campo E.m. lungo il cavo vale

$$\int \underline{S} \cdot \hat{n} ds = \int_r^R S 2\pi x dx = \frac{\sigma r}{\epsilon_0 \epsilon_r R_c} \int_r^R \frac{dx}{x} = \frac{\sigma r}{\epsilon_0 \epsilon_r R_c} \ln\left(\frac{R}{r}\right) = \frac{\mathcal{E}^2}{R_c}$$

che è la potenza Joule dissipata nel carico resistivo.

Una particella di carica q si muove con velocità v costante.

Trovare l'espressione dei campi e.m. nel sistema di riferimento solidale alla particella e in quello fisso.



Si sceglie il sistema fisso con il punto di osservazione P dei campi giacente lungo l'asse y a distanza b dall'origine O e con l'asse x parallelo a v .

Si sceglie il sistema solidale alla particella con $x' \equiv x$ e assi $y'ez'$ paralleli a y e z . Si suppone che all'istante $t=0$ $O \equiv O'$

All'istante t' nel sistema scentato le coordinate di P sono: $(-vt', b, \theta)$. Posto $r' = \sqrt{(vt')^2 + b^2}$ si ha

$$V(P, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r'} \quad \underline{E}(P, t) = -\underline{\nabla}' V(P, t')$$

$$E'_{x'} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qvt'}{r'^3} \quad E'_{y'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qb}{r'^3} \quad E'_{z'} = 0$$

$$B'_x = B'_y = B'_z = 0$$

In una generale trasformazione di Lorentz si ha:

$$\begin{cases} \underline{E}' = \gamma (\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \frac{1}{c^2} \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{E}) \\ \underline{B}' = \gamma (\underline{B} - \frac{1}{c^2} \underline{v} \times \underline{E}) - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \frac{1}{c^2} \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{B}) \end{cases} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

la inversa diventa:

$$\begin{cases} \underline{E} = \gamma (\underline{E}' - \underline{v} \times \underline{B}') - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \frac{1}{c^2} \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{E}') \\ \underline{B} = \gamma (\underline{B}' + \frac{1}{c^2} \underline{v} \times \underline{E}') - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \frac{1}{c^2} \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{B}') \end{cases}$$

Poiché $t' = \gamma \left(t - \frac{v^2}{c^2} x \right)$ nel punto P di coordinate $x=0$ si ha $t' = \gamma t$ e quindi $r' = \sqrt{v^2 \gamma^2 t^2 + b^2}$

$$E_x = E'_x \left(\gamma - \frac{\gamma^2}{\gamma+1} \frac{v^2}{c^2} \right) = E'_x = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\gamma vt}{\left(\gamma^2 v^2 t^2 + b^2 \right)^{3/2}}$$

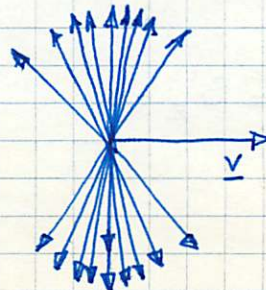
$$E_y = \gamma E'_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\gamma b}{\left(\gamma^2 v^2 t^2 + b^2 \right)^{3/2}} \quad E_z = 0 = B_x = B_y$$

$$B_z = \frac{\gamma}{c^2} v E'_y = \frac{v}{c^2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\gamma b}{\left(\gamma^2 v^2 t^2 + b^2 \right)^{3/2}} = v \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\gamma b}{\left(\gamma^2 v^2 t^2 + b^2 \right)^{3/2}}$$

nel limite non relativistico $\gamma \approx 1$ $B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{v qb}{\left(v^2 t^2 + b^2 \right)^{3/2}}$

$$\underline{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\underline{v} \times \underline{r}}{r^3} \quad \underline{r} = (vt, b, 0) \quad \underline{v} = (v, 0, 0)$$

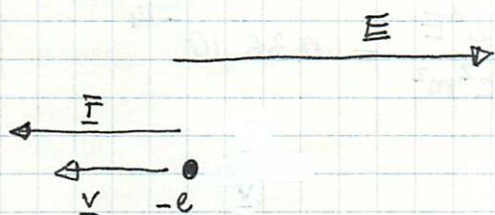
$$\begin{aligned} \left(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2 \right)^{3/2} &= \left(b^2 + v^2 t^2 \right)^{3/2} \left(\frac{\gamma^2 v^2 t^2 + b^2}{b^2 + v^2 t^2} \right)^{3/2} = r^3 \left[\gamma^2 + \frac{b^2 - b^2 \gamma^2}{b^2 + v^2 t^2} \right]^{3/2} \\ &= r^3 \gamma^3 \left(1 + \frac{1-\gamma^2}{\gamma^2} \frac{b^2}{b^2 + v^2 t^2} \right)^{3/2} = r^3 \gamma^3 \left(1 + \frac{1-\gamma^2}{\gamma^2} \sin^2 \theta \right)^{3/2} = r^3 \gamma^3 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta \right)^{3/2} \end{aligned}$$



$$\underline{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\underline{r}}{r^3 \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \theta \right)^{3/2}}$$

campo radiale ma non isotropo

Un elettrone di energia iniziale $E \gg m_e c^2$ si muove in una regione di spazio in cui vi è un campo $E = 10^6 \text{ V m}^{-1}$ antiparallelo alla sua velocità v . Si chiede il valore di $\frac{dE}{dt}$ dovuto al campo E , l'espressione di $\frac{dE}{dt}$ dell'accelerazione dell'elettrone e il valore della potenza irradiata.



Si noti che essendo $E \gg m_e c^2$ l'elettrone è ultra relativistico ($v \approx c$)

l'elettrone risente una forza $\underline{F} = -e \underline{E}$ che lo accelera

$$dE = \underline{F} \cdot \underline{v} dt = e E v dt \quad \frac{dE}{dt} = e E v \approx e E c = 4.8 \cdot 10^{-5} \text{ W}$$

poiché $E = \frac{m_e c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m_e c^2$ $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE}{dv} \frac{dv}{dt} = \gamma^3 v \dot{v} \quad \frac{d\gamma}{dv} = -\frac{1}{2} \frac{-2 \frac{v}{c^2}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = \gamma^3 v c^3$$

$$\dot{v} = \frac{1}{\gamma^3 v} \frac{dE}{dt} = \frac{e E}{\gamma^3}$$

La potenza irradiata dall'elettrone (formula di Lienard)

$$P = \frac{\mu_0}{6\pi c} e^2 \frac{a^2 - (\underline{v} \times \underline{a})^2 / c^2}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^3} = \frac{\mu_0}{6\pi c} e^2 \dot{v}^2 \gamma^6 = \frac{\mu_0}{6\pi c} e^2 \frac{e^2 E^2}{m^2 \gamma^6} \gamma^6 =$$

$$= \frac{\mu_0}{6\pi c} \frac{e^4 E^2}{m^2} = 1.75 \cdot 10^{-19} \text{ W}$$

si noti che

$$\frac{P}{\frac{dE}{dt}} = \frac{\mu_0}{6\pi c} \frac{e^4 E^2}{m^2} \frac{1}{eEV} = \frac{\mu_0}{6\pi c} \frac{e^3 E}{m^2 V} = \frac{\mu_0 e^3 E}{6\pi c^2 m^2} = 0.36 \cdot 10^{-14}$$

Una sorgente puntiforme emette luce visibile di $\lambda = 5 \cdot 10^{-7} \text{ m}$ e la potenza media emessa è $\bar{P} = 2 \text{ W}$. Si consideri ciascuna molecola del gas come un oscillatore di carica e e ampiezza di oscillazione $A = 10^{-10} \text{ m}$. Qual'è il numero di molecole N che irraggiano?

le molecole oscillano con legge $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$

dove $\omega = 2\pi\nu = 2\pi \frac{c}{\lambda}$

la loro accelerazione istantanea è $a(t) = \ddot{x}(t) = -\omega^2 A \sin(\omega t + \varphi)$

La potenza istantanea irradiata da 1 molecola è $\frac{e^2 a(t)^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} =$

$$= \frac{\mu_0 e^2 a(t)^2}{6\pi c} \quad (\text{formula di Larmor})^*$$

per N molecole

$$P(t) = N \frac{\mu_0 e^2}{6\pi c} \omega^4 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

la potenza media \bar{P} :

$$\bar{P} = \frac{\omega}{2\pi} \int_{0+\varphi}^{2\pi+\varphi} P(t) dt = \frac{1}{2} N \frac{\mu_0 e^2}{6\pi c} \omega^4 A^2 = N \bar{P}_1$$

$$\bar{P}_1 = 5.74 \cdot 10^{-12} \text{ W}$$

$$N = \bar{P} / \bar{P}_1 = 3.48 \cdot 10^{11} \text{ molecole}$$

$$* \quad v \sim \frac{A\omega}{2\pi} = A \frac{2\pi}{\lambda} \frac{c}{2\pi} = \frac{Ac}{\lambda}$$

$$\frac{v}{c} \sim \frac{A}{\lambda} = \frac{10^{-10} \text{ m}}{5 \cdot 10^{-7} \text{ m}} = 2 \cdot 10^{-4} \ll 1$$

l'approssimazione non relativistica (formula di Lorentz) è
corretta.

17

Radiation Damping, Self-Fields of a Particle, Scattering and Absorption of Radiation by a Bound System

17.1 Introductory Considerations

In the preceding chapters the problems of electrodynamics have been divided into two classes; one in which the sources of charge and current are specified and the resulting electromagnetic fields are calculated, and the other in which the external electromagnetic fields are specified and the motions of charged particles or currents are calculated. Wave guides, cavities, and radiation from prescribed multipole sources are examples of the first type of problem, while motion of charges in electric and magnetic fields and energy-loss phenomena are examples of the second type. Occasionally, as in the discussion of bremsstrahlung, the two problems are combined. But the treatment is a stepwise one—first the motion of the charged particle in an external field is determined, neglecting the emission of radiation; then the radiation is calculated from the trajectory as a given source distribution.

It is evident that this manner of handling problems in electrodynamics can be of only approximate validity. The motion of charged particles in external force fields necessarily involves the emission of radiation whenever the charges are accelerated. The emitted radiation carries off energy, momentum, and angular momentum and so must influence the subsequent motion of the charged particles. Consequently the motion of the sources of radiation is determined, in part, by the manner of emission of the radiation. A correct treatment must include the reaction of the radiation on the motion of the sources.

Why is it that we have taken so long in our discussion of electrodynamics to face this fact? Why is it that many answers calculated in an apparently erroneous way agree so well with experiment? A partial answer to the first question lies in the second. There are very many problems in electrodynamics which can be put

with negligible error into one of the two categories described in the first paragraph. Hence it is worth while discussing them without the added and unnecessary complication of including reaction effects. The remaining answer to the first question is that a completely satisfactory treatment of the reactive effects of radiation does not exist. The difficulties presented by this problem touch one of the most fundamental aspects of physics, the nature of an elementary particle. Although partial solutions, workable within limited areas, can be given, the basic problem remains unsolved. One might hope that the transition from classical to quantum-mechanical treatments would remove the difficulties. While there is still hope that this may eventually occur, the present quantum-mechanical discussions are beset with even more elaborate troubles than the classical ones. It is one of the triumphs of comparatively recent years (~1948-1950) that the concepts of Lorentz covariance and gauge invariance were exploited sufficiently cleverly to circumvent these difficulties in quantum electrodynamics and so allow the calculation of very small radiative effects to extremely high precision, in full agreement with experiment. From a fundamental point of view, however, the difficulties still remain. In this chapter we will consider only the classical aspects, but will indicate some of the quantum-mechanical analogs along the way.

The question as to why many problems can apparently be handled neglecting reactive effects of the radiation has the obvious answer that such effects must be of negligible importance. To see qualitatively when this is so, and to obtain semiquantitative estimates of the ranges of parameters where radiative effects are or are not important, we need a simple criterion. One such criterion can be obtained from energy considerations. If an external force field causes a particle of charge e to have an acceleration of typical magnitude a for a period of time T , the energy radiated is of the order of

$$E_{\text{rad}} \sim \frac{2e^2 a^2 T}{3c^2} = \frac{\mu_0 e^2 a^2}{6\pi c} T \quad (17.1)$$

from the Larmor formula (14.22). If this energy lost in radiation is negligible compared to the relevant energy E_0 of the problem, we can expect that radiative effects will be unimportant. But if $E_{\text{rad}} \geq E_0$, the effects of radiation reaction will be appreciable. The criterion for the regime where radiative effects are unimportant can thus be expressed by

$$E_{\text{rad}} \ll E_0 \quad (17.2)$$

The specification of the relevant energy E_0 demands a little care. We will distinguish two apparently different situations, one in which the particle is initially at rest and is acted on by the applied force only for the finite interval T , and one where the particle undergoes continual acceleration, e.g., in quasiperiodic motion at some characteristic frequency ω_0 . For the particle at rest initially a typical energy is evidently its kinetic energy after the period of

acceleration. Thus

$$E_0 \sim m(aT)^2$$

The criterion (17.2) for the unimportance of radiative effects then becomes

$$\frac{2}{3} \frac{e^2 a^2 T}{c^3} \ll ma^2 T^2$$

or

$$T \gg \frac{2}{3} \frac{e^2}{mc^3}$$

It is useful to define the characteristic time in this relation as

$$\tau = \frac{2}{3} \frac{e^2}{mc^3} = \frac{\mu_0 e^2}{6\pi mc} \quad (17.3)$$

Then the conclusion is that for time T long compared to τ radiative effects are unimportant. Only when the force is applied so suddenly and for such a short time that $T \sim \tau$ will radiative effects modify the motion appreciably. It is useful to note that the longest characteristic time τ for charged particles is for electrons and that its value is $\tau = 6.26 \times 10^{-24}$ sec. This is of the order of the time taken for light to travel 10^{-13} cm. Only for phenomena involving such distances or times will we expect radiative effects to play a *crucial* role.

If the motion of the charged particle is quasi-periodic with a typical amplitude d and characteristic frequency ω_0 , the mechanical energy of motion can be identified with E_0 and is of the order of

$$E_0 \sim m\omega_0^2 d^2$$

The accelerations are typically $a \sim \omega_0^2 d$, and the time interval $T \sim (1/\omega_0)$. Consequently criterion (17.2) is

$$\frac{2e^2 \omega_0^4 d^2}{3c^3 \omega_0} \ll m\omega_0^2 d^2$$

or

$$\omega_0 \tau \ll 1 \quad (17.4)$$

where τ is given by (17.3). Since ω_0^{-1} is a time appropriate to the mechanical motion, again we see that, if the relevant mechanical time interval is long compared to the characteristic time τ (17.3), radiative reaction effects on the motion will be unimportant.

The examples of the last two paragraphs show that the reactive effects of radiation on the motion of a charged particle can be expected to be important if the external forces are such that the motion changes appreciably in times of the order of τ or over distances of the order of $c\tau$. This is a general criterion within the framework of classical electrodynamics. For motions less violent, the reactive effects are sufficiently small that they have a negligible effect on the short-term motion. Their long-term, cumulative effects can be taken into account in an approximate way, as we will see immediately.

Teorema di Poynting: conservazione dell'energia di un sistema di particelle cariche e di campi elettromagnetici.

forza di Lorentz: $\underline{F} = q(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B})$

per una densità di carica $\rho(\underline{r})$: $d\underline{F} = \rho d^3r = \rho(\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B}) d^3r$

lavoro fatto nel tempo dt : $dL = \int_V \rho \cdot \underline{v} dt d^3r = \int_V \rho \underline{E} \cdot \underline{v} dt d^3r$
 $= \int_V \underline{J} \cdot \underline{E} dt d^3r$

potenza: $P = \frac{dL}{dt} = \int_V \underline{J} \cdot \underline{E} d^3r$

Ampere-Maxwell: $\underline{\nabla} \times \underline{H} - \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} = \underline{J}$

$$P = \int_V \left[(\underline{\nabla} \times \underline{H}) \cdot \underline{E} - \underline{E} \cdot \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} \right] d^3r$$

identità vettoriali: $\underline{\nabla} \cdot (\underline{E} \times \underline{H}) = \underline{H} \cdot (\underline{\nabla} \times \underline{E}) - \underline{E} \cdot (\underline{\nabla} \times \underline{H})$

$$P = \int_V \left[+ \underline{H} \cdot (\underline{\nabla} \times \underline{E}) - \underline{\nabla} \cdot (\underline{E} \times \underline{H}) - \underline{E} \cdot \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} \right] d^3r$$

Faraday-Maxwell $\underline{\nabla} \times \underline{E} + \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = 0$

$$P = \int_V \left[- \underline{\nabla} \cdot (\underline{E} \times \underline{H}) - \left(\underline{H} \cdot \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} + \underline{E} \cdot \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} \right) \right] d^3r$$

$$= \int_V \left[- \underline{\nabla} \cdot (\underline{E} \times \underline{H}) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \underline{H} \cdot \underline{B} + \frac{1}{2} \underline{E} \cdot \underline{D} \right) \right] d^3r$$

vettore di Poynting $\underline{S} \equiv \underline{E} \times \underline{H}$ densità di energia $w = \frac{1}{2}(\underline{E} \cdot \underline{D} + \underline{H} \cdot \underline{B})$

$$P = - \int_{\sigma} \underline{S} \cdot \hat{n} d\sigma - \frac{d}{dt} \int_V w d^3r$$

$$P = \frac{dL}{dt} = \frac{dE_{mecc}}{dt} \quad E_{em} = \int_V w d^3r$$

$$\frac{d}{dt} (E_{mecc} + E_{em}) = - \int_{\sigma} \underline{S} \cdot \hat{n} d\sigma = \int_{\sigma} \underline{S} \cdot \hat{n}_{in} d\sigma$$

variazione di energia meccanica ed elettromagnetica in un certo volume $V =$ flusso di energia entrante attraverso la superficie σ che circonda V .

forma differenziale: $\int_V \underline{J} \cdot \underline{E} d^3r = P = \int_V \left(-\underline{\nabla} \cdot \underline{S} - \frac{\partial w}{\partial t} \right) d^3r$

$$-\underline{J} \cdot \underline{E} = \frac{\partial w}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot \underline{S}$$

Conservazione della quantità di moto di un sistema di particelle cariche e di campi elettromagnetici.

legge di Newton: $\frac{d}{dt} \underline{P}_{mecc} = \underline{F} = \int_V \rho (\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B}) d^3r$

legge di Gauss: $\underline{\nabla} \cdot \underline{D} = \rho = \int_V (\rho \underline{E} + \underline{J} \times \underline{B}) d^3r$

legge di Ampere-Maxwell: $\underline{\nabla} \times \underline{H} - \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} = \underline{J}$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \underline{P}_{mecc} &= \int_V \left[\underline{\nabla} \cdot \underline{D} \underline{E} + \left(\underline{\nabla} \times \underline{H} - \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} \right) \times \underline{B} \right] d^3r \\ &= \int_V \left[\underline{E} (\underline{\nabla} \cdot \underline{D}) - \underline{B} \times (\underline{\nabla} \times \underline{H}) + \underline{B} \times \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} \right] d^3r \\ &= \int_V \left[\underline{E} (\underline{\nabla} \cdot \underline{D}) + \underbrace{\underline{H} (\underline{\nabla} \cdot \underline{B})}_{=0} - \underline{B} \times (\underline{\nabla} \times \underline{H}) + \frac{\partial}{\partial t} (\underline{B} \times \underline{D}) - \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \times \underline{D} \right] d^3r \end{aligned}$$

Feraday-Neumann: $\underline{\nabla} \times \underline{E} + \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = 0$

$$\frac{d}{dt} \underline{P}_{mecc} = \int_V \left[\underline{E} (\underline{\nabla} \cdot \underline{D}) + \underline{H} (\underline{\nabla} \cdot \underline{B}) - \underline{D} \times (\underline{\nabla} \times \underline{E}) - \underline{B} \times (\underline{\nabla} \times \underline{H}) + \frac{\partial}{\partial t} (\underline{B} \times \underline{D}) \right] d^3r$$

densità di quantità di moto associate ai campi em: $\underline{g} = \underline{D} \times \underline{B} = \epsilon_0 \mu_0 \underline{E} \times \underline{H}$
$$= \frac{1}{c^2} \underline{S}$$

quantità di moto e.m.: $\underline{P}_{em} = \int d^3r \underline{g}$

$$\frac{d}{dt} (\underline{P}_{mecc} + \underline{P}_{em}) = \int_V \left[\underline{E} (\nabla \cdot \underline{D}) + \underline{H} (\nabla \cdot \underline{B}) - \underline{D} \times (\nabla \times \underline{E}) - \underline{B} \times (\nabla \times \underline{H}) \right] d^3r$$

$$\left[\underline{E} (\nabla \cdot \underline{D}) - \underline{D} \times (\nabla \times \underline{E}) \right]_1 = E_1 \left(\frac{\partial D_1}{\partial x_1} + \frac{\partial D_2}{\partial x_2} + \frac{\partial D_3}{\partial x_3} \right) - D_2 \left(\frac{\partial E_2}{\partial x_1} - \frac{\partial E_1}{\partial x_2} \right) + D_3 \left(\frac{\partial E_1}{\partial x_3} - \frac{\partial E_3}{\partial x_1} \right)$$

$$= \epsilon_0 \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (E_1^2) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_1} (E_1^2 + E_2^2 + E_3^2) + \frac{\partial}{\partial x_2} (E_1 E_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (E_1 E_3) \right]$$

$$\left[\underline{E} (\nabla \cdot \underline{D}) - \underline{D} \times (\nabla \times \underline{E}) \right]_i = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\epsilon_0 (E_i E_j - \frac{1}{2} \underline{E} \cdot \underline{E} \delta_{ij}) \right)$$

tensor degli sforzi di Maxwell: $T_{ij} = \epsilon_0 (E_i E_j - \frac{1}{2} \underline{E} \cdot \underline{E} \delta_{ij}) +$

$$+ \frac{1}{\mu_0} (B_i B_j - \frac{1}{2} \underline{B} \cdot \underline{B} \delta_{ij}) =$$

$$= E_i D_j + B_i B_j - \frac{1}{2} (\underline{E} \cdot \underline{D} + \underline{H} \cdot \underline{B}) \delta_{ij}$$

$$\frac{d}{dt} (\underline{P}_{mecc} + \underline{P}_{em})_i = \int_V \partial_j T_{ij} d^3r = \int_S T_{ij} n_j d\sigma$$

$\int_S T_{ij} n_j d\sigma =$ i -esima componente della forza trasmessa al

sistema di cariche e correnti attraverso la superficie σ

Nel caso in cui sul volume V agiscano anche altre forze esterne rappresentate dal vettore \bar{F} , il teorema delle quantità di moto si scrive: $\frac{d}{dt} \left\{ P_i^{(m)} + P_i^{(c)} \right\} = \int_V T_{ik} m_k d\tau + \phi_i$.

È evidente a questo punto perché $T_{\mu\nu}$ è chiamato tensore energia-impulso.

Il tensore degli sforzi di Maxwell.

Utilizziamo ora il tensore degli sforzi di Maxwell

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi} \left\{ \epsilon_0 E_i E_k + \frac{B_i B_k}{\mu_0} - \frac{1}{2} \delta_{ik} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right) \right\} \text{ per alcune}$$

applicazioni. Abbiamo visto che la forza per unità di superficie esercitata dal campo e.m. su un sistema di cariche + campi è

dato da $\underline{\phi} = (\phi_x, \phi_y, \phi_z)$ con $\phi_i = T_{ik} m_k$; $\underline{\phi}$ ovviamente è una

funzione del punto. Nel punto P l'elemento di superficie $d\tau$

abbia normale esterna $\hat{m} = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$ ed i campi abbiano

$$\bar{E} = (E, 0, 0)$$

Nel punto P il tensore

degli sforzi si scrive dunque:

$$T_{ik} = \frac{\epsilon_0}{2} \begin{pmatrix} E^2 & 0 & 0 \\ 0 & -E^2 & 0 \\ 0 & 0 & -E^2 \end{pmatrix}$$

e la forza

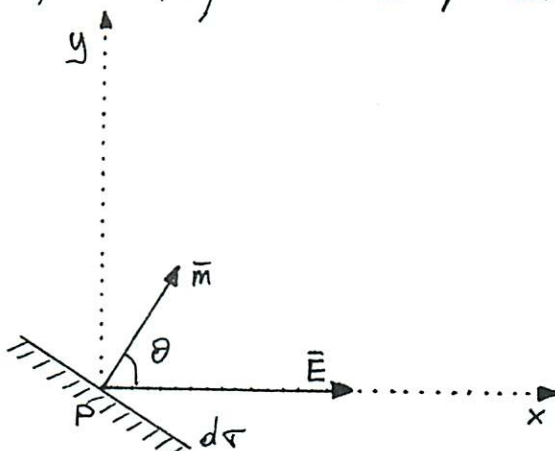
per unità di superficie

$$\text{diventa: } \underline{\phi} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} (\cos\theta, -\sin\theta, 0).$$

Se $\bar{E} \perp d\tau$ risulta $\underline{\phi} \parallel \hat{m}$ cioè sull'elemento d'area $d\tau$

si esercita una trazione.

Se $\bar{E} \parallel d\tau$ allora $\underline{\phi} \parallel -\hat{m}$

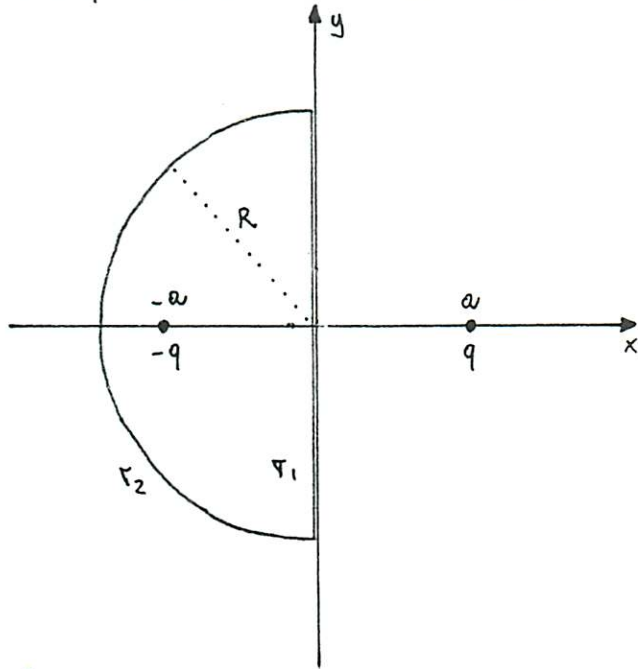


cioè su $d\sigma$ si esercita una pressione. Se $\theta = 45^\circ$ allora

$\phi \perp \hat{n}$ e su $d\sigma$ si esercita uno sforzo di taglio.

Utilizzando le proprietà del tensore di Maxwell possiamo ricavare anche l'espressione della forza di Coulomb tra due cariche.

Si considerino due cariche di segno opposto, q e $-q$, piazzate nei punti a e $-a$ dell'asse x .



Sia σ la superficie costituita dalla semisfera di raggio

R (contenente $-q$) e dal disco

portato sul piano yz : $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$

Indicando con \vec{F} la forza

di cui si esercita sulla carica $-q$

si ha: $\vec{F} = \int_{\sigma} \phi d\sigma =$

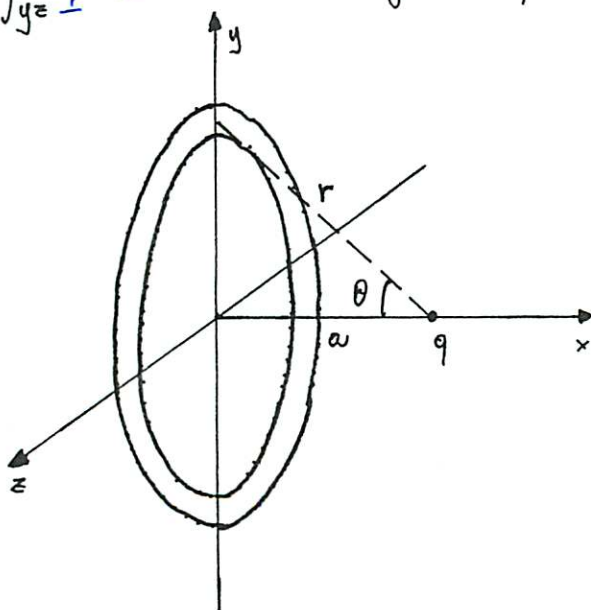
$= \int_{\sigma_1} \phi d\sigma + \int_{\sigma_2} \phi d\sigma$ con

$\phi_i = T_{ik} m_k$. Ponendo al limite per $R \rightarrow \infty$ il contributo

su σ_2 tende a zero: $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\sigma_2} \phi d\sigma = 0$ in quanto T_{ik} va

come R^{-4} e $d\sigma$ come R^2 . Si ha dunque $\vec{F} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\sigma_1} \phi d\sigma =$

$= \int_{yz} \phi \cdot d\sigma$. Per eseguire questa integrazione sul piano yz si



consideri l'elemento di superficie

cui $d\sigma$ costituito dalle corone

circolari di raggi y e $y+dy$:

$d\sigma = 2\pi y dy =$ (essendo

$y = a \tan \theta$)

$= 2\pi a^2 \frac{\sin \theta}{\cos^3 \theta} d\theta$.

Il campo elettrico su $d\tau$ è la somma di quelli prodotti da q

$$e - q: \quad \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 =$$

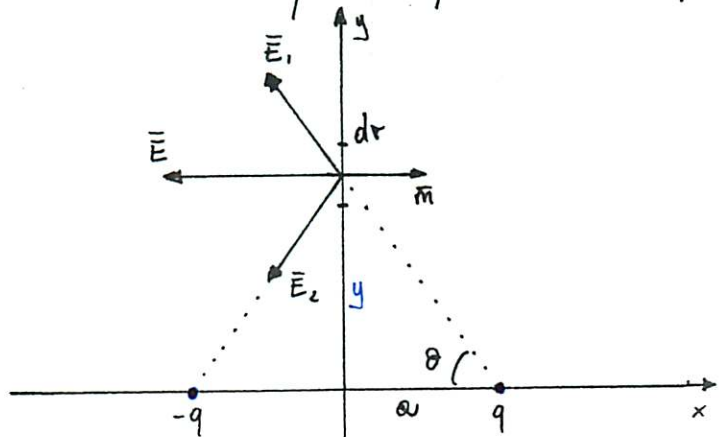
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q}{a^2 + y^2} \cos\theta (-1, 0, 0)$$

Poiché $\vec{B} = 0$ ed

$\vec{E} = (E, 0, 0)$ come nel caso

precedente si ha:

$$T_{ik} = \frac{q^2 \cos^2\theta}{\epsilon_0 8\pi^2 \frac{a^4}{\cos^4\theta}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$



Essendo $\hat{m} = (1, 0, 0)$ segue: $\underline{\phi} = \frac{q^2 \cos^6\theta}{\epsilon_0 8\pi^2 a^4} (1, 0, 0)$

Si ottiene dunque:

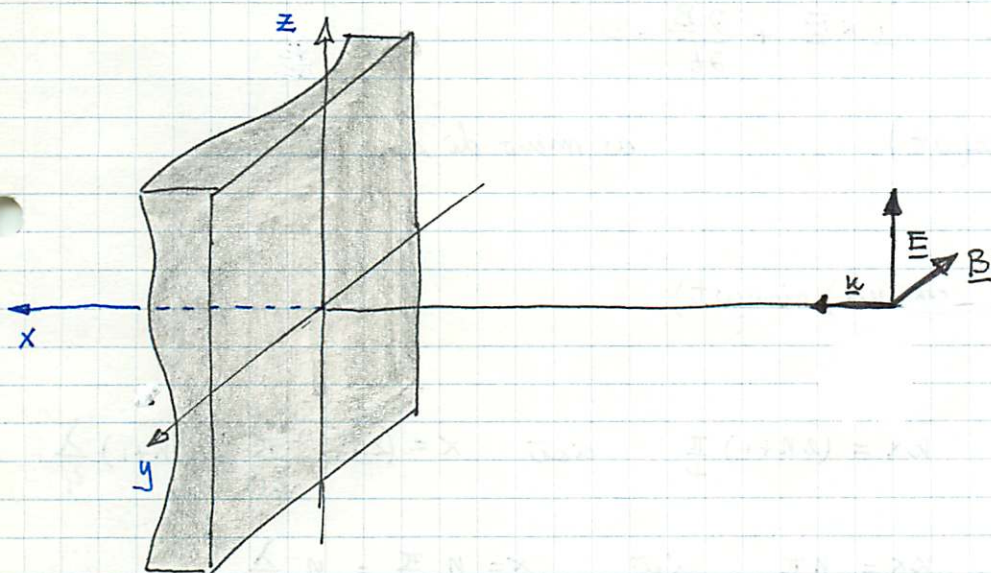
$$\vec{F} = \int \underline{\phi} d\tau = \hat{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{q^2 \cos^6\theta}{\epsilon_0 8\pi^2 a^4} 2\pi a^2 \frac{\sin\theta}{\cos^3\theta} d\theta =$$

$$= \hat{m} \frac{q^2}{a^2 4\pi\epsilon_0} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta \sin\theta d\theta = \hat{m} \frac{q^2}{a^2 4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{\cos^4\theta}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{\hat{m}}{4\pi\epsilon_0 a^2} \frac{1}{4} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2a)^2} \hat{m} \quad \text{di } \vec{i} \text{ appunto la forza di}$$

Coulomb da la carica q esercita su $-q$.

Un'onda e.m. piana di frequenza $\nu = 250 \text{ kHz}$ si propaga nell'aria ($\epsilon_r \approx 1$, $\mu_r \approx 1$) e si riflette sopra una superficie piana perfettamente conduttrice disposta perpendicolarmente alla sua direzione di propagazione. A quali distanze dalla superficie si formano i nodi e i ventri dell'onda elettrica e magnetica? Quanto vale il vettore di Poynting?



Sia $x=0$ la superficie metallica riflettente. Supponendo l'onda piana polarizzata linearmente con il campo \underline{E} lungo z nel semispazio $x < 0$ si devono avere un'onda incidente ed una riflette.

$$\underline{E}(x, t) = \underline{E}_0 \sin(\kappa x - \omega t) + \underline{E}_r \sin(\kappa x - \omega t + \varphi_r)$$

poiché la superficie $x=0$ è metallica deve essere $\underline{E}(0, t) = 0$

$$\underline{E}_0 \sin(-\omega t) + \underline{E}_r \sin(-\omega t + \varphi_r) = 0$$

che è soddisfatta ad ogni istante se $\varphi_r = \pi$ ed $\underline{E}_r = -\underline{E}_0$

$$\underline{E}(x, t) = \underline{E}_0 \sin(\kappa x - \omega t) - \underline{E}_0 \sin(\kappa x - \omega t) =$$

$$= \underline{E}_0 \left[\sin(\kappa x) \cos(\omega t) + \cancel{\sin(-\omega t) \cos(\kappa x)} + \sin(\kappa x) \cos \omega t + \cancel{\sin(\omega t) \cos(\kappa x)} \right]$$

$$z = 2 \underline{E}_0 \sin(kx) \cos(\omega t) = 2 \underline{E}_0 \hat{z} \sin(kx) \cos(\omega t)$$

si hanno nodi quando $kx = n\pi$ cioè $x = n \frac{\pi}{k}$ $n=0, 1, 2, \dots$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi \nu}{c} = \frac{\omega}{c} \quad \left(v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \approx c \right)$$

si hanno ventri quando $kx = (2n+1) \frac{\pi}{2}$ $x = (2n+1) \frac{\pi}{2k}$ $n=0, 1, 2, \dots$

usando l'eq. di Maxwell $\nabla \times \underline{E} + \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = 0$

$$\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = -\hat{x} 2 \underline{E}_0 k \cos(kx) \cos(\omega t) \quad \text{ovvero di una costante}$$

$$\underline{B}(x, t) = -\hat{x} \frac{2 \underline{E}_0 k}{\omega} \cos(kx) \sin(\omega t)$$

si hanno nodi quando $kx = (2n+1) \frac{\pi}{2}$ cioè $x = (2n+1) \frac{\pi}{2k} = (2n+1) \frac{\lambda}{4}$

si hanno ventri quando $kx = n\pi$ cioè $x = n \frac{\pi}{k} = n \frac{\lambda}{2}$

Il vettore di Poynting \underline{S}

$$\underline{S} = \underline{E} \times \underline{H} = \underline{E} \times \frac{\underline{B}}{\mu_0} = \hat{x} \frac{4 \underline{E}_0^2 k}{\omega \mu_0} \sin kx \cos kx \sin \omega t \cos \omega t$$

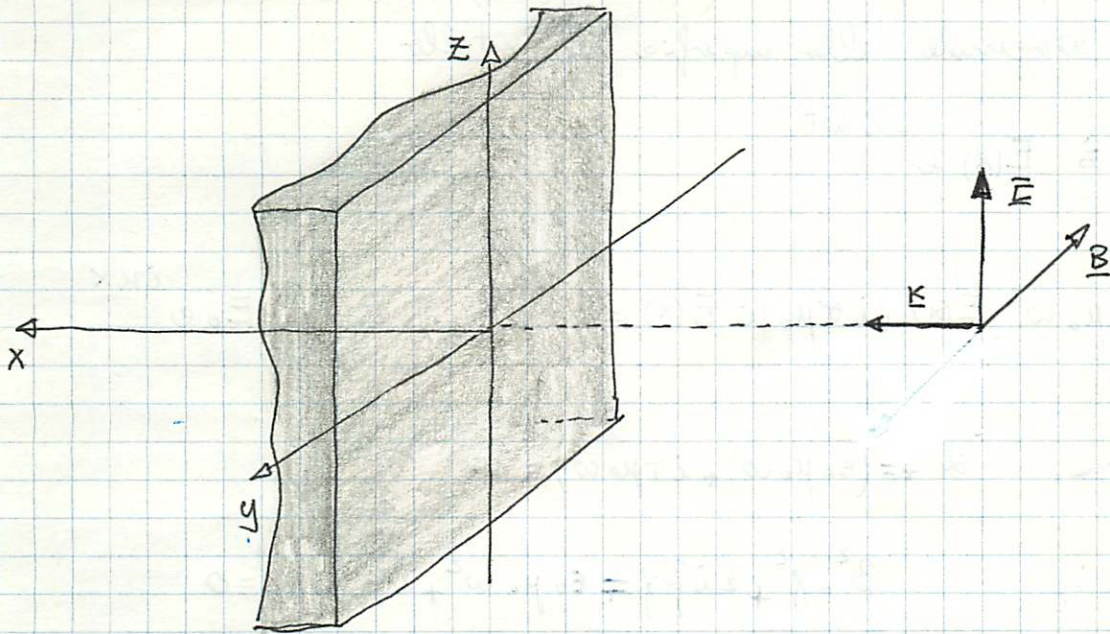
$$= \hat{x} \frac{\underline{E}_0^2}{c \mu_0} \sin(2kx) \sin(2\omega t)$$

$\underline{S} = 0$ quando $2kx = n\pi$ cioè $x = \frac{n}{2} \frac{\pi}{k}$ $n=0, 1, 2, \dots$

ovvero nei punti nodali di \underline{E} o di \underline{B}

$$\frac{1}{T} \int_0^T \underline{S}(x, t) dt = 0 \quad \text{in media non si ha propagazione di energia e.m.}$$

Una onda e.m. di frequenza $\nu = 6 \cdot 10^{14}$ Hz investe la superficie di un metallo (rame) la cui resistività è $\rho = 1.7 \cdot 10^{-8}$ Ω m.
 Determinare la penetrazione dell'onda nel metallo.



Solo nel limite di metallo ideale ($\sigma \rightarrow \infty$, $\rho \rightarrow 0$) l'onda incidente viene completamente riflessa. La propagazione dell'onda trasmessa nel metallo è regolata dalle leggi:

$$\nabla \cdot \underline{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \underline{B} = 0$$

$$\nabla \times \underline{E} + \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \times \underline{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} = \mu_0 \underline{j}$$

$$\underline{j} = \sigma \underline{E}$$

$$\sigma = \frac{1}{\rho}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \underline{E}) = -\nabla^2 \underline{E} + \nabla (\nabla \cdot \underline{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \underline{B}) = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \sigma \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \underline{B}) = -\nabla^2 \underline{B} + \nabla (\nabla \cdot \underline{B}) = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \underline{B}) + \mu_0 \sigma (\nabla \times \underline{E}) =$$

$$= -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \underline{B}}{\partial t^2} - \mu_0 \sigma \frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$$

$$\nabla^2 \underline{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial t^2} - \sigma \mu_0 \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla^2 \underline{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \underline{B}}{\partial t^2} - \sigma \mu_0 \frac{\partial \underline{B}}{\partial t} = 0$$

Per un'onda piana polarizzata (\underline{E} lungo \hat{z}) propagantesi nella direzione x ortogonale alla superficie del metallo

$$\underline{E}(x, t) = \hat{z} E(x) e^{-i\omega t}$$

$$\frac{d^2 E(x)}{dx^2} + \epsilon_0 \mu_0 \omega^2 E(x) + i\sigma \mu_0 \omega E(x) = 0 \quad \bar{E}(x) = \bar{E}_0 e^{ikx}$$

eq. caratteristica $k^2 = \epsilon_0 \mu_0 \omega^2 + i\sigma \mu_0 \omega$

posto $k = \beta + i\gamma$ $\beta^2 - \gamma^2 + 2i\beta\gamma = \epsilon_0 \mu_0 \omega^2 + i\sigma \mu_0 \omega$

$$\begin{cases} \beta\gamma = \frac{1}{2} \sigma \mu_0 \omega \\ -\gamma^2 + \beta^2 = \epsilon_0 \mu_0 \omega^2 \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma = \frac{1}{\beta} \frac{\sigma \mu_0 \omega}{2} \\ \beta^4 - \beta^2 \epsilon_0 \mu_0 \omega^2 - \frac{1}{4} \sigma^2 \mu_0^2 \omega^2 = 0 \end{cases}$$

$$\beta = \pm \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 \mu_0 \omega^2 + \sqrt{(\epsilon_0 \mu_0 \omega^2)^2 + \sigma^2 \mu_0^2 \omega^2} \right) \quad \text{per la propagazione lungo } \hat{x}$$

ve scelto il segno + $\beta = \sqrt{\frac{\epsilon_0 \mu_0}{2} \left(\sqrt{\frac{\sigma^2}{\epsilon_0^2 \omega^2} + 1} + 1 \right)} \omega$

$$\gamma = \omega \sqrt{\frac{\epsilon_0 \mu_0}{2} \left(\sqrt{\frac{\sigma^2}{\epsilon_0^2 \omega^2} + 1} - 1 \right)} = \frac{2\pi\nu}{c} \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\sigma^2}{\epsilon_0^2 \omega^2} + 1} - 1 \right)}$$

$$\underline{E}(x, t) = \hat{z} \bar{E}_0 e^{-\gamma x} e^{i(\beta x - \omega t)}$$

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{c}{2\pi\nu} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\sigma^2}{\epsilon_0^2 4\pi^2 \nu^2} + 1} - 1 \right)}} = 26.8 \text{ \AA} \quad (\lambda = 5000 \text{ \AA})$$

$\frac{\sigma}{\omega \epsilon_0} \gg 1$ metallo ideale $\gamma^{-1} \ll \lambda$

l'indice di rifrazione del metallo è dunque:

$$n = \frac{c}{v} = \frac{c}{\lambda/T} = c \frac{2\pi}{\lambda} \frac{1}{2\pi\nu} = \frac{c}{\omega} \kappa = \frac{c}{\omega} (\beta + i\gamma) = n' + i n''$$

$$n' = \frac{c}{\omega} \beta = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\sigma^2}{\epsilon_0^2 \omega^2} + 1} + 1 \right)}$$

$$n'' = \frac{c}{\omega} \gamma = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\sigma^2}{\epsilon_0^2 \omega^2} + 1} - 1 \right)}$$

si noti che $\lim_{\omega \rightarrow \infty} n(\omega) = 1$ $\lim_{\omega \rightarrow 0} n(\omega) = \sqrt{\frac{\sigma}{2\epsilon_0 \omega}} (1 + i)$

la conservazione delle componenti tangenziali di \underline{E} ed \underline{H} alla superficie $x=0$ da:

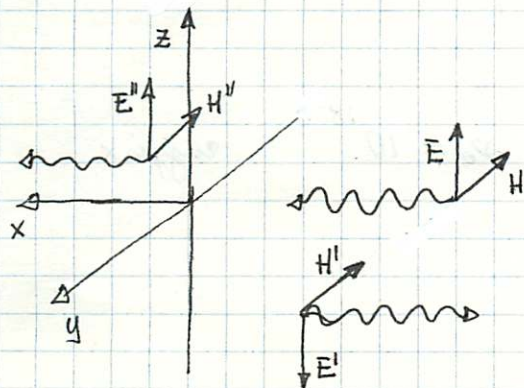
$$\begin{cases} E - E' = E'' \\ H + H' = H'' \end{cases}$$

$$\begin{cases} E - E' = E'' \\ E + E' = n E'' \end{cases}$$

$$\left(\nabla \times \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t} \Rightarrow \kappa \underline{E} = \omega \underline{B} \right.$$

$$\begin{aligned} \underline{B} &= \frac{\kappa}{\omega} \underline{E} = \frac{\omega n \perp}{c} \underline{E} \\ &= \frac{n}{c} \underline{E} = \frac{\underline{E}}{v} \end{aligned} \left. \right)$$

$$\underline{H} = \frac{\underline{B}}{\mu} = \frac{\underline{E}}{\mu v} \left. \right)$$



$$\begin{cases} E' + E'' = E \\ -E' + nE'' = E \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1+n)E'' = 2E \\ (n+1)E' = (n-1)E \end{cases}$$

$$\begin{cases} E' = \frac{n-1}{n+1} E \\ E'' = \frac{2}{n+1} E \end{cases}$$

$$\begin{cases} H' = \frac{n-1}{n+1} H \\ H'' = \frac{2n}{n+1} H \end{cases}$$

$$v H'' = \frac{2}{n+1} c H$$

$$\underline{S} = \underline{E} \times \underline{H} \quad \langle \underline{S} \rangle = \langle \underline{E} \underline{H} \rangle = \frac{\underline{E} \underline{H}}{2} \quad \langle \underline{S}' \rangle = \langle \underline{E}' \underline{H}' \rangle = \left[\frac{n-1}{n+1} \right]^2 \langle \underline{S} \rangle \quad \langle \underline{S}'' \rangle = \langle \underline{E}'' \underline{H}'' \rangle = \frac{4 \operatorname{Re} \{ n \} \langle \underline{S} \rangle}{|n+1|^2}$$

$$\langle \underline{S} \rangle = \langle \underline{S}' \rangle + \langle \underline{S}'' \rangle$$

$$R \equiv \frac{\langle \underline{S}' \rangle}{\langle \underline{S} \rangle} = \text{riflettanza}$$

$$T \equiv \frac{\langle \underline{S}'' \rangle}{\langle \underline{S} \rangle} = \text{trasmissione}$$

$$R + T = 1$$

$$R(\omega) = \left| \frac{n(\omega) - 1}{n(\omega) + 1} \right|^2$$

$\omega \gg \omega_0$ \circ metallo trasparente ad alte frequenze
 $\omega \ll \omega_0$ $|$ metallo opaco a basse frequenze

$$\omega_0 \equiv \frac{\sigma}{\epsilon_0} \approx \frac{10^{18}}{8.854 \cdot 10^{-12}} \sim 10^{19} \text{ rad s}^{-1} \quad \nu_0 = 10^{18} \text{ raggi x}$$

$$\hbar \omega_0 = h \nu_0 \approx 6000 \text{ eV}$$

$$E = \operatorname{Re} \left[\left(\bar{E}_0' + i \bar{E}_0'' \right) e^{i(kx - \omega t)} \right] =$$

$$= \bar{E}_0' \cos(kx - \omega t) - \bar{E}_0'' \sin(kx - \omega t)$$

$$B = \operatorname{Re} \left[\left(\bar{B}_0' + i \bar{B}_0'' \right) e^{i(kx - \omega t)} \right] =$$

$$= \bar{B}_0' \cos(kx - \omega t) - \bar{B}_0'' \sin(kx - \omega t)$$

$$\langle EB \rangle \equiv \frac{1}{T} \int_0^T EB dt = \frac{1}{2} \left(\bar{E}_0' \bar{B}_0' + \bar{E}_0'' \bar{B}_0'' \right)$$

$$EB^* + E^*B = \left(\bar{E}_0' + i \bar{E}_0'' \right) \left(\bar{B}_0' - i \bar{B}_0'' \right) + \text{c.c.}$$

$$= 2 \left(\bar{E}_0' \bar{B}_0' + \bar{E}_0'' \bar{B}_0'' \right)$$