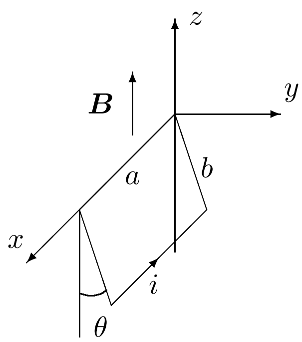
Fisica Generale II per Chimica e Chimica Industriale
5 febbraio 2002

Esercizio 1
Una sfera metallica di raggio $a = 0.1$ cm sulla quale è depositata una carica con densità superficiale $\sigma = 8.86 \times 10^{-6}$ Cm^{-2} è ricoperta da un guscio sferico di materiale isolante di spessore $d = 0.3$ cm. Sulla superficie interna del guscio è presente una densità di carica di polarizzazione $\sigma_{pi} = -0.75\ \sigma$. Calcolare:
a) la costante dielettrica relativa ε_r dell'isolante;
b) la densità di carica di polarizzazione σ_{pe} sulla superficie esterna dell'isolante;
c) l'energia elettrostatica U del sistema.

[punteggio 12/30]

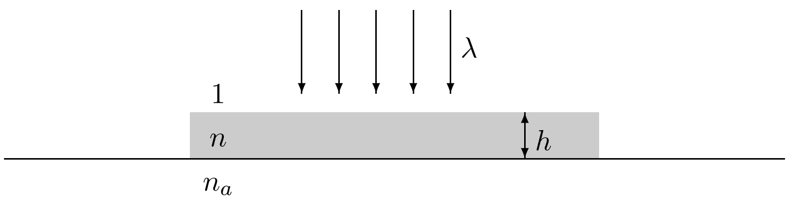
Esercizio 2
Una spira rigida di lati $a = 20$ cm e $b = 10$ cm ha una densità di massa per unità di lunghezza $\rho = 0.05$ gcm^{-1} ed è percorsa da una corrente i. La spira può ruotare senza attrito intorno all'asse orizzontale x. Accendendo un campo magnetico $\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{z}}$, con $B = 0.02$ T, la spira ruota portandosi in una posizione di equilibrio a un angolo $\theta = 30°$ rispetto alla verticale z. Assumendo un'accelerazione di gravità $g = 9.8$ ms^{-2}, calcolare:
a) l'espressione del momento della forza magnetica $\boldsymbol{M}$ agente sulla spira;
b) il valore della corrente i;
c) il lavoro L fatto dalle forze magnetiche durante la rotazione.

[punteggio 10/30]



Esercizio 3
Una chiazza di petrolio avente indice di rifrazione $n = 1.2$ e spessore $h = 460$ nm galleggia sulla superficie perfettamente piatta del mare. Sapendo che l'indice di rifrazione dell'acqua del mare è $n_a > n$, calcolare:
a) per quali lunghezze d'onda del visibile (400 nm $< \lambda <$ 700 nm) si ha massima riflessione guardando verticalmente la chiazza da un aereo;
b) per quali lunghezze d'onda del visibile è massima la radiazione trasmessa nel mare.

[punteggio 8/30]



Esercizio 1 Per la simmetria sferica del sistema, il teorema di Gauss fornisce

$$\boldsymbol{D}(r) = \hat{\boldsymbol{r}} \frac{\sigma a^2}{r^2}, \tag{1}$$

essendo $\hat{\boldsymbol{r}}$ il versore radiale e $r \geq a$ la distanza dal centro. Poiché il dielettrico è isotropo e omogeneo, per $r \geq a$ si ha

$$\boldsymbol{E}(r) = \hat{\boldsymbol{r}} \begin{cases} \frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0 \varepsilon_r r^2} & r < a + d \\ \frac{\sigma a^2}{\varepsilon_0 r^2} & r > a + d \end{cases} \tag{2}$$

e

$$\boldsymbol{P}(r) = \hat{\boldsymbol{r}} \begin{cases} \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \frac{\sigma a^2}{r^2} & r < a + d \\ 0 & r > a + d \end{cases} . \tag{3}$$

La densità di carica di polarizzazione sulla superficie $r = a$ vale

$$\sigma_{pi} = \boldsymbol{P}(a) \cdot (-\hat{\boldsymbol{r}}) = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \sigma \tag{4}$$

e quindi

$$\varepsilon_r = \frac{\sigma}{\sigma + \sigma_{pi}} = \frac{1}{1 - 0.75} = 4. \tag{5}$$

La densità di carica di polarizzazione sulla superficie $r = a + d$ vale

$$\sigma_{pe} = \boldsymbol{P}(a + d) \cdot \hat{\boldsymbol{r}} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} \sigma \frac{a^2}{(a + d)^2} = 4.15 \times 10^{-7} \text{ Cm}^{-2}. \tag{6}$$

L'energia elettrostatica del sistema è

$$\begin{aligned} U &= \int_a^{a+d} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r E(r)^2}{2} \, 4\pi r^2 \mathrm{d}r + \int_{a+d}^{\infty} \frac{\varepsilon_0 E(r)^2}{2} \, 4\pi r^2 \mathrm{d}r \\ &= \frac{2\pi\sigma^2 a^4}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \int_a^{a+d} r^{-2} \mathrm{d}r + \frac{2\pi\sigma^2 a^4}{\varepsilon_0} \int_{a+d}^{\infty} r^{-2} \mathrm{d}r \\ &= \frac{2\pi\sigma^2 a}{3\varepsilon_0 \varepsilon_r} \left[1 + (\varepsilon_r - 1) \frac{a^3}{(a + d)^3} \right] = 4.42 \times 10^{-3} \text{ J}. \end{aligned} \tag{7}$$

Esercizio 2 Il momento magnetico della spira è

$$\boldsymbol{m} = iab\ \hat{\boldsymbol{n}}, \tag{8}$$

essendo $\hat{\boldsymbol{n}}$ il versore ortogonale al piano della spira e orientato in base al verso della corrente i secondo la regola della mano destra. In presenza del campo magnetico la spira è sottoposta ad un momento meccanico

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B} = iabB \cos\theta\ \hat{\boldsymbol{x}}. \tag{9}$$

Sulla spira agisce anche il momento della forza peso

$$\boldsymbol{M}_{\text{peso}} = -\rho g(a+b)b \sin\theta\ \hat{\boldsymbol{x}}. \tag{10}$$

All'equilibrio deve essere $\boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}_{\text{peso}} = 0$ e quindi

$$i = \frac{\rho g(a+b)\tan\theta}{aB} = 2.12\ \text{A}. \tag{11}$$

Il lavoro fatto dalle forze magnetiche durante la rotazione è

$$\begin{aligned} L &= \int_0^\theta M \mathrm{d}\theta \\ &= iabB \sin\theta = 0.42 \times 10^{-3}\ \text{J}. \end{aligned} \tag{12}$$

Esercizio 3 Sia nella riflessione all'interfaccia aria-petrolio ($1 < n$) sia nella riflessione all'interfaccia petrolio-acqua ($n < n_a$), l'indice di rifrazione aumenta nel passaggio dal primo al secondo mezzo. Di conseguenza i raggi riflessi da queste due interfacce hanno entrambi uno sfasamento di π e la loro differenza di fase alla lunghezza d'onda λ è

$$\Delta\phi = 2nh\frac{2\pi}{\lambda}. \tag{13}$$

L'interferenza è massima se

$$\Delta\phi = 2k\pi, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{14}$$

cioé quando

$$\lambda = \frac{4nh}{2k} = \frac{1104}{k}\ \text{nm}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots. \tag{15}$$

Tra queste, l'unica lunghezza d'onda nello spettro visibile è $\lambda = 552$ nm ottenuta per $k = 2$.
I massimi (minimi) di interferenza in trasmissione coincidono con i minimi (massimi) di interferenza in riflessione. Di conseguenza, l'intensità trasmessa nel mare è massima se

$$2nh\frac{2\pi}{\lambda} = (2k+1)\pi, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{16}$$

cioé quando

$$\lambda = \frac{4nh}{2k+1} = \frac{2208}{2k+1}\ \text{nm}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{17}$$

Tra queste, l'unica lunghezza d'onda nello spettro visibile è $\lambda = 441.6$ nm ottenuta per $k = 1$.