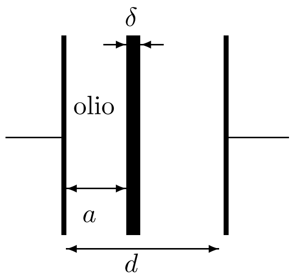
Fisica Generale II per Chimica e Chimica Industriale
11 settembre 2001

Esercizio 1

In un condensatore piano le cui armature hanno superficie $S = 10$ cm^2 e sono poste a distanza $d = 1$ cm viene inserita parallelamente alle armature una lamina metallica di spessore $\delta = 0.5$ mm a distanza $a = 4$ mm dalla armatura di sinistra. L'intercapedine tra l'armatura di sinistra e la lamina viene riempita con olio di costante dielettrica relativa $\varepsilon_r = 3.32$ e il condensatore viene connesso a un generatore di tensione di valore $f = 100$ V. Si determini:
a) la capacità C del sistema;
b) i moduli dei campi elettrici $\boldsymbol{E}_1$ e $\boldsymbol{E}_2$ nell'intercapedine con olio e in quella vuota;
c) la forza $\boldsymbol{F}$ risultante sulla lamina.

[punteggio 10/30]



Esercizio 2

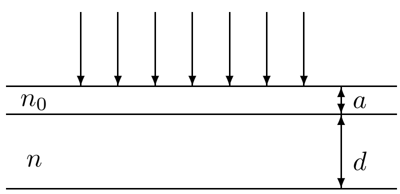
Una spira avente la forma di poligono regolare di $n = 6$ lati e il cui cerchio inscritto ha raggio $R = 15$ cm è percorsa da una corrente stazionaria $I = 0.2$ A. Determinare:
a) il valore dell'induzione magnetica $\boldsymbol{B}$ nel centro della spira;
b) la differenza relativa tra il valore di $\boldsymbol{B}$ generato dal poligono con $n = 6$ lati e quello dell'induzione magnetica prodotta da una spira circolare di raggio R percorsa dalla stessa corrente I.

[punteggio 10/30]

Esercizio 3

Una radiazione di lunghezza d'onda $\lambda_0 = 600$ nm incide perpendicolarmente su una lastra di vetro di spessore $d \gg \lambda_0$ avente indice di rifrazione $n = 1.6$. sulla lastra viene depositata una pellicola di spessore a e indice di rifrazione $n_0 = 1.2$. Determinare:
a) il minimo spessore a di pellicola affinché la radiazione trasmessa interferisca distruttivamente.
b) le lunghezze d'onda $\lambda_1 > \lambda_0 > \lambda_2$ più prossime a λ_0 per le quali, nelle stesse identiche condizioni, si ottiene un massimo di radiazione trasmessa.

[punteggio 10/30]



Esercizio 1 Il sistema è equivalente a due condensatori piani in serie di capacità rispettivamente

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{a} \qquad C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{d - a - \delta}. \tag{1}$$

La capacità equivalente è $C^{-1} = C_1^{-1} + C_2^{-1}$ con

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{a + \varepsilon_r (d - a - \delta)} = 1.32 \text{ pF}. \tag{2}$$

Detta σ la densità di carica libera sulle armature del condensatore e sulla lamina metallica, si ha $\sigma = Cf/S$ e quindi

$$E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{Cf}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S} = 4.5 \times 10^3 \text{ Vm}^{-1} \tag{3}$$

$$E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Cf}{\varepsilon_0 S} = 14.9 \times 10^3 \text{ Vm}^{-1}. \tag{4}$$

L'energia elettrostatica del sistema con la lamina a distanza a dall'armatura di sinistra vale

$$U(a) = \frac{1}{2} C f^2 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S f^2}{a + \varepsilon_r (d - a - \delta)}. \tag{5}$$

Poiché il sistema è connesso a un generatore che mantiene la differenza di potenziale costante al valore f la forza sulla lamina è data da

$$F = -\frac{\partial U_{tot}}{\partial a} = +\frac{\partial U}{\partial a} = \frac{1}{2} C^2 f^2 \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}, \tag{6}$$

che può anche essere riscritta come

$$F = \frac{1}{2} Cf \left(\frac{Cf}{\varepsilon_0 S} - \frac{Cf}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S} \right) = \frac{1}{2} Cf \left(E_2 - E_1 \right) = 6.9 \times 10^{-7} \text{ N}. \tag{7}$$

La forza attira la lamina verso l'armatura di destra (tende ad allargare l'intercapedine riempita con olio).

Esercizio 2 Si consideri un elemento infinitesimo di un lato del poligono sotteso da un angolo al centro infinitesimo $d\theta$, con $-\pi/n \le \theta \le \pi/n$, di lunghezza

$$d\ell = d(R\tan\theta) = \frac{R}{\cos^2\theta}d\theta. \tag{8}$$

Dalla prima legge di Laplace, il contributo infinitesimo all'induzione magnetica nel centro della spira dovuto al tratto $d\ell$ vale

$$d\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\boldsymbol{\ell}\times\boldsymbol{a}}{a^3} \tag{9}$$

essendo $\boldsymbol{a}$ il vettore che individua la posizione del centro della spira rispetto a $d\ell$ e $d\boldsymbol{\ell}$ orientato come la corrente. Poiché $a\cos\theta = R$ e l'angolo tra $d\boldsymbol{\ell}$ e $\boldsymbol{a}$ vale $\frac{\pi}{2}-\theta$, si ha

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{B} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{R}{\cos^2\theta}d\theta\left(\frac{\cos\theta}{R}\right)^2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\boldsymbol{u} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\cos\theta d\theta\ \boldsymbol{u}, \end{aligned} \tag{10}$$

essendo $\boldsymbol{u}$ il versore ortogonale al piano della spira orientato secondo il verso della corrente. L'induzione magnetica totale nel centro della spira è dunque $\boldsymbol{B} = B\boldsymbol{u}$ con

$$\begin{aligned} B &= n\int_{-\pi/n}^{\pi/n}\frac{\mu_0 I}{4\pi R}\cos\theta d\theta \\ &= n\frac{\mu_0 I}{2\pi R}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = 0.8\times10^{-6}\ \mathrm{T}. \end{aligned} \tag{11}$$

Nel limite $n\to\infty$, si ottiene il valore dell'induzione magnetica al centro di una spira circolare

$$B_\infty = \frac{\mu_0 I}{2R}. \tag{12}$$

Per un poligono con un generico numero di lati n, la differenza relativa tra $B(n)$ e B_∞ è data da

$$\frac{|B(n)-B_\infty|}{B_\infty} = \frac{\left|\frac{n\mu_0 I}{2\pi R}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)-\frac{\mu_0 I}{2R}\right|}{\frac{\mu_0 I}{2R}} = \left|\frac{n}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)-1\right|. \tag{13}$$

Per $n=6$ si ha

$$\left|\frac{6}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)-1\right| = 4.5\times10^{-2}. \tag{14}$$

Esercizio 3

In presenza della pellicola, a causa delle riflessioni multiple al suo interno è possibile avere una interferenza distruttiva della radiazione trasmessa. In base alle formule di Fresnel, si ha uno sfasamento di π della radiazione nella riflessione all'interfaccia pellicola-vetro ($n_1 < n_2$). Lo sfasamento è assente nella riflessione all'interfaccia pellicola-aria ($n_1 > n_2$). Lo sfasamento tra due raggi trasmessi attraverso k e $k+1$ riflessioni nella pellicola è quindi

$$\Delta\phi = n_0 \frac{2\pi}{\lambda_0} 2a + \pi. \tag{15}$$

La loro interferenza è distruttiva se

$$\Delta\phi = (2m+1)\pi, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{16}$$

e il minimo valore di a per cui la radiazione trasmessa interferisce distruttivamente è

$$a = \frac{1}{2}\frac{\lambda_0}{n_0} = 250 \text{ nm}. \tag{17}$$

Per una radiazione di lunghezza d'onda λ, la condizione di interferenza costruttiva in trasmissione è

$$n_0 \frac{2\pi}{\lambda} 2a + \pi = 2m\pi, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots \tag{18}$$

da cui

$$\lambda = 2n_0 a \, \frac{2}{2m-1}. \tag{19}$$

Poichè $\lambda_0 = 2n_0 a$, per $m = 1$ si ottiene

$$\lambda_1 = \lambda_0 \; 2 = 1200 \text{ nm}, \tag{20}$$

mentre per $m = 2$

$$\lambda_2 = \lambda_0 \, \frac{2}{3} = 400 \text{ nm}. \tag{21}$$