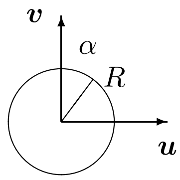
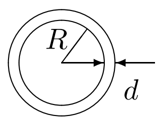
Corso di Laurea in Chimica Industriale
Fisica Generale (secondo corso)
I esonero – 14 novembre 2000

Esercizio 1
Una sfera dielettrica cava di raggio $R = 0.1$ cm possiede una densità di carica per unità di superficie $\sigma(\alpha) = A\cos\alpha$, con $A = 2.0 \times 10^{-7}$ Cm^{-2}, essendo α l'angolo formato rispetto ad un asse di riferimento individuato dal versore $\boldsymbol{v}$. Sia $\boldsymbol{u}$ un secondo versore ortogonale a $\boldsymbol{v}$. Calcolare:
a) la carica totale q della sfera,
b) il momento di dipolo $\boldsymbol{p}$ della sfera,
c) le componenti u ed v del campo elettrico $\boldsymbol{E}$ nel punto P_1 individuato dal vettore posizione $\boldsymbol{r}_1 = d\boldsymbol{u} + d\boldsymbol{v}$ con $d = 8.0$ m,
d) il lavoro W_{12} fatto dal campo elettrico per spostare una carica $Q = 3.0 \times 10^{-9}$ C dal punto P_1 al punto P_2 individuato dal vettore posizione $\boldsymbol{r}_2 = d\boldsymbol{v}$.



Esercizio 2
Una sfera metallica di raggio $R = 5$ cm si trova a potenziale $V_0 = 50$ V rispetto all'infinito. La sfera è ricoperta da uno strato di materiale isolante di spessore $d = 4$ mm. Il materiale isolante è lineare e isotropo ma non omogeneo e la sua costante dielettrica relativa varia con la distanza r dal centro della sfera con legge $\kappa(r) = \gamma r/R$ con $\gamma = 6$. Calcolare:
a) la densità di carica σ sulla superficie della sfera metallica,
b) le densità di carica di polarizzazione σ_{pi} e σ_{pe} sulle superfici interna e esterna del dielettrico,
c) la carica di polarizzazione q_p nel volume del dielettrico,
d) l'energia elettrostatica U del sistema.



Operatore ∇ in coordinate sferiche

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} f(r,\theta,\phi) &= \frac{\partial f}{\partial r}\boldsymbol{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\boldsymbol{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\boldsymbol{u}_\phi \\
\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}(r,\theta,\phi) &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} \\
\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}(r,\theta,\phi) &= \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(\sin\theta A_\phi)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right]\boldsymbol{u}_r \\
&\quad + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\right]\boldsymbol{u}_\theta \\
&\quad + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\boldsymbol{u}_\phi
\end{aligned}
$$

Costanti Fisiche

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_0 &= 8.8542\times10^{-12}\ \mathrm{C^2N^{-1}m^{-2}} \\
e &= 1.6022\times10^{-19}\ \mathrm{C}
\end{aligned}
$$

Esercizio 1 Si consideri l'elemento infinitesimo di superficie della sfera compreso tra gli angoli α e $\alpha + d\alpha$. La carica totale della sfera è

$$\begin{aligned} q &= \int_0^\pi \sigma(\alpha)\ 2\pi R \sin\alpha\ R d\alpha \\ &= 2\pi R^2 A \int_0^\pi \sin\alpha \cos\alpha\ d\alpha = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Il momento di dipolo della sfera è $\boldsymbol{p} = p\boldsymbol{v}$, dove

$$\begin{aligned} p &= \int_0^\pi \sigma(\alpha)\ 2\pi R \sin\alpha\ R d\alpha\ R\cos\alpha \\ &= 2\pi R^3 A \int_0^\pi \sin\alpha \cos^2\alpha\ d\alpha \\ &= 2\pi R^3 A \int_{-1}^1 z^2\ dz = \frac{4}{3}\pi R^3 A = 8.4 \times 10^{-16}\ \text{Cm}. \end{aligned} \tag{2}$$

Poiché $d \gg R$, è valida l'approssimazione di dipolo

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_1) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}_1)\boldsymbol{r}_1}{r_1^5} - \frac{\boldsymbol{p}}{r_1^3}\right] \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3pd(d\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{v})}{4\sqrt{2}d^5} - \frac{p\boldsymbol{v}}{2\sqrt{2}d^3}\right] \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{3p}{4\sqrt{2}d^3}\boldsymbol{u} + \frac{p}{4\sqrt{2}d^3}\boldsymbol{v}\right] \end{aligned} \tag{3}$$

da cui

$$\begin{aligned} E_u &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3p}{4\sqrt{2}d^3} = 7.8 \times 10^{-9}\ \text{Vm}^{-1} \\ E_v &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{4\sqrt{2}d^3} = 2.6 \times 10^{-9}\ \text{Vm}^{-1} \end{aligned} \tag{4}$$

Il lavoro fatto dal campo elettrico per spostare la carica Q è

$$\begin{aligned} W_{12} &= \int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} Q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} = Q\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} -\boldsymbol{\nabla}V(\boldsymbol{r})\cdot d\boldsymbol{r} \\ &= Q\left[V(\boldsymbol{r}_1) - V(\boldsymbol{r}_2)\right]. \end{aligned} \tag{5}$$

Nell'approssimazione di dipolo

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}, \tag{6}$$

si ottiene

$$W_{12} = \frac{Qp}{4\pi\varepsilon_0 d^2}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - 1\right) = -2.3 \times 10^{-16}\ \text{J}. \tag{7}$$

Esercizio 2 Sia σ la densità di carica sulla superficie della sfera metallica a potenziale V_0. Per motivi di simmetria σ è costante. Il vettore induzione elettrica è del tipo $\boldsymbol{D} = D(r)\boldsymbol{u}_r$ con $\boldsymbol{u}_r$ versore radiale. Dal teorema di Gauss si ottiene

$$D(r) = \begin{cases} 0 & 0 < r < R \\ \frac{\sigma R^2}{r^2} & R < r \end{cases} . \tag{8}$$

Poichè il dielettrico è isotropo, si ha $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{D}/\varepsilon_0\kappa = E(r)\boldsymbol{u}_r$ con

$$E(r) = \begin{cases} 0 & 0 < r < R \\ \frac{\sigma R^3}{\varepsilon_0 \gamma r^3} & R < r < R+d \\ \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2} & R+d < r \end{cases} . \tag{9}$$

Dalla relazione

$$V(r) - V(\infty) = \int_r^\infty E(r')dr' \tag{10}$$

si ottiene

$$V(r) - V(\infty) = \begin{cases} \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0(R+d)} + \frac{\sigma R^3}{2\varepsilon_0\gamma R^2} - \frac{\sigma R^3}{2\varepsilon_0\gamma(R+d)^2} & 0 < r < R \\ \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0(R+d)} + \frac{\sigma R^3}{2\varepsilon_0\gamma r^2} - \frac{\sigma R^3}{2\varepsilon_0\gamma(R+d)^2} & R < r < R+d \\ \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r} & R+d < r \end{cases} . \tag{11}$$

Dalla condizione $V(r) - V(\infty) = V_0$ per $0 < r < R$ si ricava

$$\sigma = \frac{\varepsilon_0 V_0}{R}\left[\frac{1}{2\gamma}\left(1 - \frac{R^2}{(R+d)^2}\right) + \frac{R}{R+d}\right]^{-1} = 9.4 \times 10^{-9}\ \mathrm{Cm^{-2}} \tag{12}$$

La polarizzazione è $\boldsymbol{P} = \varepsilon_0(\kappa - 1)\boldsymbol{E} = P(r)\boldsymbol{u}_r$ con

$$P(r) = \begin{cases} 0 & 0 < r < R \\ \left(\gamma\frac{r}{R} - 1\right)\frac{\sigma R^3}{\gamma r^3} & R < r < R+d \\ 0 & R+d < r \end{cases} , \tag{13}$$

quindi

$$\begin{aligned} \sigma_{pi} &= \boldsymbol{P}(r = R^+) \cdot (-\boldsymbol{u}_r) \\ &= -\sigma\,(\gamma - 1)\,\frac{1}{\gamma} = -7.9 \times 10^{-9}\ \mathrm{Cm^{-2}} \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{pe} &= \boldsymbol{P}(r = R + d^-) \cdot \boldsymbol{u}_r \\ &= \sigma\left(\gamma\frac{R+d}{R} - 1\right)\frac{R^3}{\gamma(R+d)^3} = 6.8 \times 10^{-9}\ \mathrm{Cm^{-2}}. \end{aligned} \tag{15}$$

La densità di carica nel volume del dielettrico è

$$\rho_p(r) = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{P}(r) = -\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2 P(r)\right) = -\frac{\sigma R^3}{\gamma r^4} \tag{16}$$

e quindi

$$
\begin{aligned}
q_p &= \int_R^{R+d} \rho_r(r)\ 4\pi r^2 dr \\
&= -\frac{4\pi R^2\sigma}{\gamma}\left(1-\frac{R}{R+d}\right) = -3.7\times 10^{-12}\ \mathrm{C}. \qquad (17)
\end{aligned}
$$

Alternativamente

$$
q_p = -\Big[\sigma_{pi}\ 4\pi R^2 + \sigma_{pe}\ 4\pi(R+d)^2\Big] = -\frac{4\pi R^2\sigma}{\gamma}\left(1-\frac{R}{R+d}\right). \qquad (18)
$$

Infine, l'energia elettrostatica del sistema vale

$$
\begin{aligned}
U &= \int_0^{\infty} \frac{1}{2}\boldsymbol{E}(r)\cdot\boldsymbol{D}(r)\ 4\pi r^2 dr \\
&= \int_R^{R+d} \frac{1}{2}\frac{\sigma R^3}{\varepsilon_0\gamma r^3}\frac{\sigma R^2}{r^2}\ 4\pi r^2 dr + \int_{R+d}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}\frac{\sigma R^2}{r^2}\ 4\pi r^2 dr \\
&= \frac{1}{2}\frac{(4\pi R^2\sigma)^2}{4\pi\varepsilon_0 R}\left[\frac{1}{2\gamma}\left(1-\frac{R^2}{(R+d)^2}\right)+\frac{R}{R+d}\right] = 7.4\times 10^{-9}\ \mathrm{J}. \qquad (19)
\end{aligned}
$$