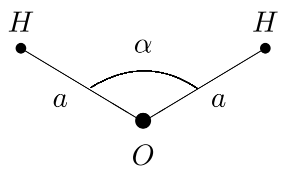
Corso di Laurea in Chimica Industriale
Fisica Generale (secondo corso)
I esonero – 15 novembre 2001

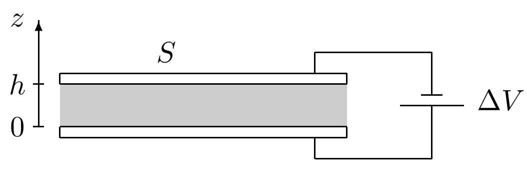
Esercizio 1

In un modello elementare per la molecola H_2O gli atomi H hanno ciascuno carica $+e$ mentre l'atomo O ha carica $-2e$. La distanza $H-O$ vale $a = 1$ Å mentre l'angolo $\widehat{HOH}$ è $\alpha = 105°$. Calcolare:
a) il momento di dipolo elettrico $\boldsymbol{p}$ della molecola,
b) il lavoro W_1 fatto dal campo elettrico della molecola per spostare uno ione di carica $+3e$, lungo uno degli assi $O-H$, dalla distanza $d = 50$ Å all'infinito,
c) il lavoro W_2 fatto nelle stesse condizioni per spostare una seconda molecola H_2O con momento di dipolo antiparallelo alla prima.



Esercizio 2

Un condensatore piano avente superficie $S = 36$ cm^2 e distanza tra le armature $h = 4$ mm è riempito con un isolante lineare e isotropo la cui costante dielettrica relativa varia con la distanza z dall'armatura inferiore con legge $\kappa(z) = 2 + z/h$. Le armature del condensatore sono tenute a differenza di potenziale costante $\Delta V = 9$ V. Calcolare:
a) la densità di carica σ sulle armature del condensatore,
b) le densità di carica di polarizzazione $\sigma_p(0)$ e $\sigma_p(h)$ sulle superfici $z = 0$ e $z = h$ del dielettrico,
c) la carica di polarizzazione q_p nel volume del dielettrico,
d) la forza che si esercita tra le armature del condensatore.



Costanti Fisiche

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= 8.8542 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2N^{-1}m^{-2}} \\ e &= 1.6022 \times 10^{-19}\ \mathrm{C} \end{aligned}$$

Esercizio 1 Sia $\boldsymbol{u}$ il versore della bisettrice dell'angolo α. Per motivi di simmetria si ha $\boldsymbol{p} = p\boldsymbol{u}$ con

$$p = 2ea\cos\frac{\alpha}{2} = 1.95 \times 10^{-29} \text{ Cm}. \tag{1}$$

Detto $\boldsymbol{n}$ il versore dell'asse $H-H$, rispetto alla molecola H_2O lo ione si trova nel punto individuato dal vettore $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{u}d\cos\frac{\alpha}{2} + \boldsymbol{n}d\sin\frac{\alpha}{2}$. Il lavoro W_1 fatto dal campo elettrico della molecola per spostare lo ione da questo punto all'infinito è dato da

$$W_1 = 3e\left[V(\boldsymbol{d}) - V(\infty)\right] = 3eV(\boldsymbol{d}), \tag{2}$$

essendo $V(\boldsymbol{d})$ il potenziale elettrico generato dalla molecola nel punto $\boldsymbol{d}$. In approssimazione di dipolo si ha

$$V(\boldsymbol{d}) = \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{d}}{4\pi\varepsilon_0 d^3} = \frac{2ea\cos^2\frac{\alpha}{2}}{4\pi\varepsilon_0 d^2}, \tag{3}$$

e quindi

$$W_1 = \frac{6e^2a\cos^2\frac{\alpha}{2}}{4\pi\varepsilon_0 d^2} = 2.05 \times 10^{-21} \text{ J} = 12.8 \text{ meV}. \tag{4}$$

Alternativamente, posto $\boldsymbol{s} = \left(\boldsymbol{u}\cos\frac{\alpha}{2} + \boldsymbol{n}\sin\frac{\alpha}{2}\right)s$,

$$\begin{aligned} W_1 &= \int_d^\infty 3e\boldsymbol{E}(\boldsymbol{s})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_d^\infty 3e\frac{3(\boldsymbol{p}\cdot\hat{\boldsymbol{s}})\hat{\boldsymbol{s}} - \boldsymbol{p}}{4\pi\varepsilon_0 s^3}\cdot\hat{\boldsymbol{s}}\mathrm{d}s \\ &= 3e\frac{2p\cos\frac{\alpha}{2}}{4\pi\varepsilon_0}\int_d^\infty \frac{\mathrm{d}s}{s^3} = \frac{3ep\cos\frac{\alpha}{2}}{4\pi\varepsilon_0 d^2}. \end{aligned} \tag{5}$$

Il lavoro W_2 è dato da

$$W_2 = \left[U(\boldsymbol{d}) - U(\infty)\right] = U(\boldsymbol{d}), \tag{6}$$

essendo $U(\boldsymbol{d})$ l'energia di interazione dei due dipoli antiparalleli alla distanza relativa $\boldsymbol{d}$. Si ha

$$\begin{aligned} U(\boldsymbol{d}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 d^3}\left[\boldsymbol{p}\cdot(-\boldsymbol{p}) - \frac{3\left(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{d}\right)\left(-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{d}\right)}{d^2}\right] \\ &= \frac{-p^2 + 3p^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{4\pi\varepsilon_0 d^3} \end{aligned} \tag{7}$$

e quindi

$$W_2 = \frac{4e^2a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\left(3\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1\right)}{4\pi\varepsilon_0 d^3} = 3.06 \times 10^{-24} \text{ J} = 19.1\ \mu\text{eV}. \tag{8}$$

Esercizio 2 Trascurando effetti di bordo, per la simmetria del sistema e usando la legge di Gauss si trova che l'induzione elettrica è data da $\boldsymbol{D} = D\boldsymbol{u}$ con $\boldsymbol{u}$ versore dell'asse z e $D = \sigma$. Il campo elettrico è quindi $\boldsymbol{E} = E(z)\boldsymbol{u}$ con

$$E(z) = \frac{D}{\varepsilon_0 \kappa(z)} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \frac{1}{2 + \frac{z}{h}}. \tag{9}$$

Imponendo che la differenza di potenziale tra le armature valga ΔV si ha

$$\Delta V = V(0) - V(h) = \int_0^h E(z)\ \mathrm{d}z = \frac{\sigma h}{\varepsilon_0} \ln \frac{3}{2}. \tag{10}$$

La densita di carica sull'armatura positiva è quindi

$$\sigma = \frac{\varepsilon_0 \Delta V}{h \ln \frac{3}{2}} = 4.91 \times 10^{-8}\ \mathrm{Cm}^{-2}. \tag{11}$$

Il vettore polarizzazione elettrica è $\boldsymbol{P} = P(z)\boldsymbol{u}$, con

$$P(z) = \frac{\kappa(z) - 1}{\kappa(z)} D = \frac{1 + \frac{z}{h}}{2 + \frac{z}{h}} \sigma. \tag{12}$$

Le densità di carica di polarizzazione sulle superfici del dielettrico valgono

$$\begin{aligned} \sigma_p(0) &= \boldsymbol{P}(0) \cdot (-\boldsymbol{u}) = -P(0) = -\frac{1}{2}\sigma = -2.46 \times 10^{-8}\ \mathrm{Cm}^{-2} \\ \sigma_p(h) &= \boldsymbol{P}(h) \cdot \boldsymbol{u} = P(h) = \frac{2}{3}\sigma = 3.28 \times 10^{-8}\ \mathrm{Cm}^{-2} \end{aligned} \tag{13}$$

La carica di polarizzazione nel volume del dielettrico si calcola immediatamente usando la proprietà che la carica di poalrizzazione totale deve essere nulla

$$q_p = -\left[\sigma_p(0)S + \sigma_p(h)S\right] = -\frac{1}{6}\sigma S = -2.95 \times 10^{-11}\ \mathrm{C}. \tag{14}$$

Alternativamente, si può integrare la densità di carica di polarizzazione nel volume del dielettrico

$$q_p = \int_0^h -\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{P}\ S\mathrm{d}z = \int_0^h -\frac{\sigma}{h} \frac{1}{\left(2 + \frac{z}{h}\right)^2}\ S\mathrm{d}z = -\frac{1}{6}\sigma S. \tag{15}$$

L'energia elettrostatica del sistema vale

$$U = \int_0^h \frac{1}{2} D E(z)\ S\mathrm{d}z = \frac{\varepsilon_0 \Delta V^2 S}{2h \ln \frac{3}{2}}. \tag{16}$$

Poiché il sistema è mantenuto dal generatore a potenziale costante, si ha $\boldsymbol{F} = F\boldsymbol{u}$ con

$$F = +\frac{\partial U}{\partial h} = -\frac{\varepsilon_0 \Delta V^2 S}{2h^2 \ln \frac{3}{2}} = -1.20 \times 10^{-7}\ \mathrm{N}. \tag{17}$$

La forza è attrattiva.